

# METHODS OF QUALITATIVE THEORY IN NONLINEAR DYNAMICS

LEONID P. SHILNIKOV, ANDREY L. SHILNIKOV,  
DMITRY V. TURAEV

Research institute for  
Applied Mathematics and Cybernetics,  
Nizhny Novgorod, Russia

LEON O. CHUA

University of California, Berkeley, USA

Л. П. ШИЛЬНИКОВ, А. Л. ШИЛЬНИКОВ,  
Д. В. ТУРАЕВ, Л. ЧУА

# Методы качественной теории в нелинейной динамике

Перевод с английского С. С. Пашкиной



Москва ♦ Ижевск

2003

 **World Scientific**  
*Singapore • New Jersey • London • Hong Kong*

УДК 530  
ББК 22.31

Интернет-магазин  
**MAHESIS**

<http://shop.rcd.ru>

- физика
- математика
- биология
- техника



Издание осуществлено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований по проекту №01-01-14073

**Шильников Л. П., Шильников А. Л., Тураев Д. В., Чуа Л.**

Методы качественной теории в нелинейной динамике. — Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003, 428 стр.

Книга представляет собой наиболее полное руководство по методам нелинейной динамики. В ней обсуждаются вопросы структурной устойчивости, теория бифуркаций, инвариантные торы и теоремы о центральном многообразии. Наряду с классическими результатами в ней обсуждаются новые методы, в основном созданные нижегородской школой нелинейной динамики.

Для студентов и аспирантов, специализирующихся в области качественных методов и динамического хаоса.

**ISBN 5-93972-351-11**

© Институт компьютерных исследований, 2003

<http://rcd.ru>

## Оглавление

Предисловие . . . . .	8
ГЛАВА 1. Основные понятия . . . . .	20
1.1. Необходимые сведения из теории обыкновенных дифференциальных уравнений . . . . .	20
1.2. Динамические системы. Основные понятия . . . . .	25
1.3. Качественное интегрирование динамических систем . . . . .	32
ГЛАВА 2. Грубые положения равновесия динамических систем . . . . .	39
2.1. Понятие положения равновесия. Линеаризованная система . . . . .	39
2.2. Качественное исследование двумерных и трехмерных линейных систем . . . . .	42
2.3. Многомерные линейные системы. Инвариантные подпространства . . . . .	54
2.4. Поведение траекторий линейной системы вблизи положений равновесия седлового типа . . . . .	66
2.5. Топологическая классификация грубых положений равновесия . . . . .	76
2.6. Устойчивые положения равновесия. Ведущие и неведущие многообразия . . . . .	85
2.7. Состояния равновесия седлового типа. Инвариантные многообразия . . . . .	99
2.8. Решение вблизи седла. Краевая задача . . . . .	106
2.9. Задача гладкой линеаризации. Резонансы . . . . .	118
ГЛАВА 3. Грубые периодические траектории динамических систем . . . . .	135
3.1. Отображение Пуанкаре. Неподвижная точка. Мультипликаторы . . . . .	136
3.2. Невырожденные одномерные и двумерные линейные отображения . . . . .	140
3.3. Неподвижные точки многомерных линейных отображений . . . . .	148
3.4. Топологическая классификация неподвижных точек . . . . .	152

3.5. Свойства нелинейных отображений вблизи устойчивой неподвижной точки . . . . .	159
3.6. Неподвижные точки седлового типа. Инвариантные многообразия . . . . .	166
3.7. Краевая задача в окрестности седловой неподвижной точки . . . . .	180
3.8. Поведение линейных отображений вблизи неподвижных точек седлового типа. Примеры . . . . .	194
3.9. Геометрические свойства нелинейных отображений седлового типа . . . . .	207
3.10. Нормальные координаты в окрестности периодической траектории . . . . .	212
3.11. Уравнения в вариациях . . . . .	221
3.12. Устойчивость периодических траекторий. Периодические траектории седлового типа . . . . .	230
3.13. Гладкая эквивалентность и резонансы . . . . .	238
3.14. Автономные нормальные формы . . . . .	248
3.15. Принцип сжимающих отображений. Седловые отображения . . . . .	253
<b>ГЛАВА 4. Инвариантные торы . . . . .</b>	<b>265</b>
4.1. Неавтономные системы . . . . .	266
4.2. Теорема о существовании инвариантного тора. Принцип кольца . . . . .	272
4.3. Теорема о сохранении инвариантного тора . . . . .	291
4.4. Основы теории диффеоморфизмов окружности. Задачи синхронизации . . . . .	297
<b>ГЛАВА 5. Центральное многообразие. Локальный случай . . . . .</b>	<b>303</b>
5.1. Приведение к центральному многообразию . . . . .	308
5.2. Краевая задача . . . . .	322
5.3. Теорема об инвариантном слое . . . . .	341
5.4. Доказательство теорем о центральных многообразиях . . . . .	356
<b>ГЛАВА 6. Центральное многообразие. Нелокальный случай . . . . .</b>	<b>367</b>
6.1. Теорема о центральной многообразии для гомоклинической петли . . . . .	369
6.2. Отображение Пуанкаре вблизи гомоклинической петли . . . . .	378
6.3. Доказательство теоремы о центральной многообразии вблизи гомоклинической петли . . . . .	391
6.4. Теорема о центральной многообразии для гетероклинических циклов . . . . .	394

<b>Приложение А. Специальные формы систем вблизи положения равновесия седлового типа . . . . .</b>	<b>404</b>
<b>Приложение В. Асимптотика первого порядка для траекторий вблизи неподвижной точки седлового типа . . . . .</b>	<b>419</b>
<b>Литература . . . . .</b>	<b>431</b>
<b>Предметный указатель . . . . .</b>	<b>438</b>

## Предисловие

Многие явления науки и техники имеют динамическую природу. Стационарные режимы, периодические движения и биения, вызванные модуляциями, долгое время считались единственно возможными наблюдаемыми состояниями. Однако открытия второй половины 20-го века резко изменили традиционное представление о характере динамических процессов. Исключительно важным достижением явилось открытие нового вида колебаний, названного *динамическим хаосом*. Более глубокое понимание динамических процессов привело к явному осознанию нелинейности мира. Результатом этого явилось возникновение *нелинейной динамики* как научной дисциплины, цель которой заключается в изучении общих правил (закономерностей) нелинейных динамических процессов.

Типовая схема исследования нового явления обычно состоит в следующем: определенный эксперимент или наблюдение изучается с помощью предварительно созданной математической модели в виде уравнений динамики. Эта модель анализируется, а полученный результат сравнивается с экспериментальным явлением. Такой подход был впервые предложен Ньютоном.

Открытые им законы послужили основой для математического моделирования многочисленных задач, включая механику небесных тел. Решение ограниченной задачи двух тел дает прекрасное объяснение экспериментальным законам Кеплера. Действительно, со времен Ньютона на протяжении многих лет этот метод моделирования природных процессов был доминирующим в данной области. Однако достоверность этого чисто научного подхода необходимо подтвердить путем нахождения соответствия между реальным явлением и его феноменологической моделью. В этой связи Бриллюэн точно заметил: «Математическая модель также отличается от реальности, как глобус от Земли».

Математическая модель в нелинейной динамике обычно представляется в виде системы уравнений с аналитически заданными нелинейностями и конечным числом параметров. Систему можно описать при помощи обыкновенных дифференциальных уравнений, дифференциальных уравнений с

частными производными, уравнений с запаздывающим аргументом, интегро-дифференциальных уравнений и т. д. В этой книге мы рассмотрим лишь сосредоточенные системы, описываемые обыкновенными дифференциальными уравнениями. Более того, ограничимся изучением *неконсервативных систем*, не рассматривая «идеальную» динамику гамильтоновых систем (которую в конце 19-го века Клейн охарактеризовал как «механику притяжения без трения»).

Система дифференциальных уравнений записывается в виде

$$\frac{dx}{dt} = X(x),$$

где независимая переменная  $t$  представляет собой время. Один из постулатов нелинейной динамики, сформулированный еще Аристотелем и основанный лишь на здравом смысле, гласит, что все наблюдаемые состояния должны быть устойчивы. Следовательно, при всестороннем изучении систем дифференциальных уравнений необходимо обратить особое внимание на характер решений, получаемых на *бесконечном* временном интервале. Системы, рассматриваемые с такой точки зрения, называются *динамическими*. Хотя понятие динамической системы — математическая абстракция — в действительности из космологии известно, что даже время существования вселенной *конечно* — многие явления реального мира получили успешное объяснение *с помощью* теории динамических систем. На языке этой теории математическим образом стационарного состояния является положение равновесия, автоколебаний — предельный цикл, модуляции — инвариантный тор с квазипериодической траекторией, а образом динамического хаоса — странный аттрактор, то есть притягивающее предельное множество, состоящее из неустойчивых траекторий.

В принципе, первые три из указанных типов движения поддаются объяснению при помощи линейной теории. Этого подхода придерживались в 19-м веке; он использовался, в основном, для различных практических приложений, моделируемых при помощи линейных обыкновенных дифференциальных уравнений или линейных уравнений в частных производных. Наиболее известной является задача об управлении паровыми двигателями, изучение которой привело к решению задачи устойчивости положений равновесия, то есть к классическому критерию Рауса–Гурвица.

Наиболее значимые события в нелинейной динамике относятся к двадцатым–тридцатым годам 20-го века. Этот период характеризуется быстрым развитием радиотехники. Общей чертой многих нелинейных задач радио-

техники является, как правило, очень быстрое протекание соответствующих переходных процессов, в связи с чем проведение сложных экспериментов не требует больших затрат времени. Важно также то, что в те дни соответствующие математические модели большей частью были представлены простыми системами квазилинейных уравнений. Это, в свою очередь, позволило исследователям довольно подробно изучить модели, используя методы, основанные на теории предельных циклов Пуанкаре и теории устойчивости Ляпунова.

Другим важным событием того периода явилось создание математической теории колебаний двумерных систем. В частности, Андронов и Понтрягин выделили большой класс грубых (структурно устойчивых) систем, которые можно описать при помощи довольно простых математических моделей. Кроме того, были изучены все основные бифуркации предельных циклов (Андронов, Леонтович) и описаны полные топологические инварианты как для грубых (Андронов, Понтрягин), так и для общих систем (Леонтович, Майер). Вскоре после этого специалисты, занимающиеся исследованиями в различных областях науки, использовали эти математически простые и геометрически полные методы для изучения конкретных двумерных систем. Данный этап развития представлен в классическом научном труде «Теория колебаний» Андронова, Витта и Хайкина<sup>1</sup>.

При дальнейшем изучении данного вопроса была предпринята попытка непосредственно обобщить понятия, касающиеся систем на плоскости. Цель заключалась как в распространении условий грубости, так и бифуркаций на многомерные системы. Такой подход ни коим образом не отражает ограниченности взглядов. Напротив, это была верная с точки зрения математики стратегия. Действительно, было очевидно, что с выходом в пространство станут известны новые типы движения, которые могут приобрести в нелинейной динамике наибольшую значимость. Как было упомянуто, математическим образом модуляции является тор с квазипериодическими траекториями. Последние представляют собой частный случай почти периодических траекторий, являющихся по определению незамкнутыми траекториями, главная особенность которых заключается в том, что они имеют *почти периоды* — интервалы времени, за которые траектория возвращается почти в начальное состояние. Квазипериодические и почти периодические траектории самопредельны. Класс самопредельных траекторий включает также устойчивые по Пуассону траектории. Этот тип траекторий был от-

<sup>1</sup>Эта книга была впервые опубликована в 1937 г., но среди авторов не значилось имя Витта, который к тому времени был репрессирован.

крыт Пуанкаре при изучении устойчивости ограниченной задачи трех тел. Устойчивая по Пуассону траектория также возвращается сколь угодно близко к своему начальному положению, однако для произвольной, но малой фиксированной окрестности исходного положения последовательность соответствующих промежутков времени возвращения неограничена, то есть движение не поддается прогнозированию. В соответствии с классификацией Биркгофа все типы движения, соответствующие непереходному поведению, представлены стационарными, периодическими, квазипериодическими, почти периодическими и устойчивыми по Пуассону траекториями.

В начале тридцатых годов Андронов сформулировал основной вопрос, касающийся математической теории колебаний: «Может ли устойчивая по Пуассону траектория являться устойчивой по Ляпунову?». Ответ на него дал Марков: «Если устойчивая по Пуассону траектория устойчива по Ляпунову (точнее равномерно устойчива), то она является почти периодической». Казалось, что в нелинейной динамике нет других типов движений, кроме почти периодических. Поэтому, несмотря на новые открытия в качественной теории систем большой размерности, в шестидесятых годах было неясно имеет ли эта теория какую-либо значимость, кроме чисто математической. Но вскоре ситуация изменилась.

За относительно короткий промежуток времени Смейл заложил основу теории грубых систем со сложным поведением траекторий, которая широко известна в настоящее время как *гиперболическая теория*. По существу, была создана новая математическая дисциплина с собственной терминологией, понятиями и задачами. Благодаря достижениям в этой области было сделано одно из главных открытий 20-го века — динамический хаос<sup>2</sup>. Гиперболическая теория позволила привести примеры странных аттракторов, которые могут являться математическим образом хаотических колебаний, таких как известные турбулентные потоки в гидродинамике.

Тем не менее, значимость странных аттракторов в нелинейной динамике не была широко признана, особенно специалистами по турбулентности. Их скептицизм был вызван несколькими причинами. При математическом построении известные гиперболические аттракторы имеют настолько топологически сложную структуру, что невозможно представить какой-либо рациональный план действий по их созданию. В связи с этим гиперболические аттракторы стали рассматривать как результат, полученный при помощи чисто абстрактной схемы, не имеющей ничего общего с динами-

<sup>2</sup>Хронологически это открытие было сделано после создания «теории относительности» и «квантовой механики».

ческими процессами<sup>3</sup>. Кроме того, явление хаоса, наблюдаемое во многих конкретных моделях, вряд ли можно было связать с гиперболическими аттракторами вследствие возникновения устойчивых периодических орбит с большими периодами при заданных, либо ближайших к ним значениях параметров. Это позволило скептикам утверждать, что любое наблюдаемое хаотическое поведение представляет собой лишь переходный процесс. В этом отношении, следует подчеркнуть, что суть проблемы заключается в том, что неустойчивое поведение траекторий странного аттрактора сохраняется при достаточно малых изменениях управляющих параметров: чтобы явление можно было наблюдать, оно должно быть устойчивым относительно внешних возмущений.

Разногласия были разрешены в середине семидесятых с появлением простой маломерной модели

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -\sigma(x - y), \\ \dot{y} &= rx - y - xz, \\ \dot{z} &= -bz + xy,\end{aligned}$$

хаотическое поведение в решениях которой численно определил Е. Лоренц в 1962 году. Проведенный математиками детальный анализ позволил выявить существование не гиперболического, а негрубого странного аттрактора. Тем не менее, главная особенность сохранялась: поведение траекторий аттрактора оставалось неустойчивым при малых гладких возмущениях системы. Такие аттракторы, содержащие единственное положение равновесия седлового типа, называются аттракторами Лоренца. Вторая особенность этих аттракторов состоит в том, что их можно получить из систем, имеющих тривиальную динамику, при помощи конечного числа легко наблюдаемых бифуркаций.

С тех пор динамический хаос стал практически везде восприниматься как подтвержденное фундаментальное явление природы. А модель Лоренца явилась фактическим доказательством существования хаоса, хотя сама модель, несмотря на ее гидродинамическое происхождение, «слишком мало касалась воды»<sup>4</sup>. Впоследствии было строго доказано, что более близкая к действительности математическая модель реальной физической системы —

<sup>3</sup>Даже в настоящее время использование гиперболических аттракторов в нелинейной динамике проблематично.

<sup>4</sup>Система Лоренца — это простейшее приближение Галеркина задачи о конвекции слоя жидкости на плоскости.

*цени Чуа* — также проявляет динамический хаос, а полученные экспериментальные данные очень хорошо согласуются как с результатами математического анализа, так и с результатами моделирования на ЭВМ [76–79].

На этом мы завершим рассмотрение значимости теории странных аттракторов, заметим лишь, что теория нелинейных колебаний, созданная в тридцатых годах, была так очевидна и понятна, что поколения исследователей нелинейных процессов могли успешно использовать ее для решения задач из различных областей науки. В семидесятых годах ситуация изменилась. Предельные циклы и торы, обладающие едиными свойствами, были заменены странными аттракторами, имеющими более сложную математическую структуру. Они включали в себя гладкие и негладкие поверхности и многообразия, множества с локальной структурой, представленной в виде прямого произведения интервала на множество Кантора, и более сложные множества. На сегодняшний день специалист в нелинейной динамике должен либо хорошо знать математические приемы, используемые в качественной теории многомерных динамических систем, либо, по крайней мере, достаточно глубоко понимать ее основные утверждения и следствия. Следует заметить, что подобно тому, как нелинейные уравнения, как правило, невозможно проинтегрировать в квадратурах, большинство конкретных динамических моделей не допускают «качественного интегрирования» с помощью чисто математического анализа, что неизбежно приводит к исследованиям с использованием ЭВМ. Следовательно, основным требованием к любому формальному утверждению в качественной теории дифференциальных уравнений является его полнота и точность. Также оно не должно содержать лишних ограничений, которые, перефразируя Адамара, диктуются не необходимостью для науки, а умственными способностями человека.

В большинстве случаев пространство параметров многомерной модели может быть разделено на две области в соответствии с тем, является ли поведение ее траекторий простым или сложным. В данной книге в качестве главного признака сложного поведения мы рассматриваем присутствие в системе гомоклинической траектории Пуанкаре. Хотя эти траектории были обнаружены Пуанкаре при решении ограниченной задачи трех тел, то есть в гамильтоновой системе, они также являются основным предметом изучения во всех областях нелинейной динамики. В целом, присутствие гомоклинических траекторий Пуанкаре приводит к довольно важному заключению. Смейл и Л. Шильников одновременно (из противоположных точек земного шара) установили, что системы с гомоклинической траекторией Пуанкаре обладают бесконечным множеством сосуществующих периодических

траекторий и континуумом устойчивых по Пуассону траекторий. Все они являются неустойчивыми. По существу, эти гомоклинические структуры — простейшие элементы динамического хаоса.

Многомерные системы с простым поведением траекторий аналогичны системам на плоскости [80]. В принципе, их единственная особенность состоит в возможности существования в фазовом пространстве инвариантного тора с квазипериодической траекторией, охватывающей его. Таким образом, определенную модель можно полностью проанализировать в данной области пространства параметров.

Абсолютно противоположная ситуация складывается для систем со сложным поведением траекторий. Действительно, Гонченко, Л. Шильников и Тураев не так давно установили, что большинство моделей нелинейной динамики не поддаются полному анализу [28].

В данной книге рассматривается только качественная теория многомерных систем дифференциальных уравнений с простой динамикой. По поводу экстремального разнообразия динамических систем, встречающихся в приложениях, мы можем указать читателю системы нелинейных дифференциальных уравнений очень большой размерности (как правило, больше 10 000 фазовых переменных), которые встречаются в нейронных сетях (Cellular Neural Networks) [81], частными случаями которых являются динамические системы на решетках и клеточные автоматы. Книга разделена на две части. Первая часть является преимущественно вводной и технической. В ней исследуется поведение траекторий в окрестности простых положений равновесия и периодических траекторий, а также рассматриваются некоторые задачи, связанные с существованием инвариантных торов. В первую очередь приводятся классические результаты, касающиеся задачи устойчивости. Особое внимание уделяется неустойчивым положениям равновесия и периодическим траекториям седлового типа. Такие траектории играют важную роль в современной качественной теории. Например, положения равновесия седлового типа могут образовывать неразделенные части странных аттракторов. Седла также связаны с некоторыми принципиально важными задачами нелинейного характера и т. д. Методика исследования поведения систем вблизи траекторий седлового типа, используемая в данной книге, основана на способе, предложенном в шестидесятых годах Л. Шильниковым. Особенность этого способа заключается в том, что решение вблизи седла получают не из задачи Коши, а из специальной краевой задачи. Поскольку данный метод еще не был полно представлен в литера-

туре, а известен лишь малому кругу специалистов, в книге приводится его подробное изложение.

Во второй части книги исследуются основные бифуркации положений равновесия, периодических, гомоклинических и гетероклинических траекторий. Теория бифуркаций играет ключевую роль в нелинейной динамике. В ее основе лежат пионерские работы Пуанкаре и Ляпунова по изучению формы вращающейся жидкости. Впоследствии была создана теория бифуркации, основанная на понятии грубости или структурной устойчивости. Поскольку в грубых системах небольшие изменения не влекут значительных изменений состояний системы, теория бифуркации дает объяснение тому, что происходит в негрубых системах, включая множество возможных качественных преобразований. Многие из этих переходов могут быть опасными, возможно, влекущими катастрофические и необратимые последствия. Теория бифуркации позволяет спрогнозировать многие реальные явления. В частности, с помощью теории бифуркации были сформулированы и исследованы такие понятия, как мягкие и жесткие режимы возбуждения колебаний, безопасные и опасные границы областей устойчивости установившихся состояний и периодических движений, гистерезис, фазовая синхронизация и т. д.

В данной книге особое внимание мы уделяем границам области устойчивости положений равновесия и периодических траекторий. Наряду со стандартными бифуркациями — локальными и глобальными — изучается также так называемая «катастрофа голубого неба» — бифуркация, недавно открытая Л. Шильниковым и Тураевым [66]. Суть ее заключается в том, что в пространстве параметров могут существовать такие границы области устойчивости периодической траектории, что при приближении к границе и длина, и период периодической траектории стремятся к бесконечности, несмотря на то, что периодическая траектория находится на конечном расстоянии от любого положений равновесия в ограниченной области фазового пространства. Эта бифуркация еще не наблюдалась в моделях физических систем, хотя известна трехмерная двухпараметрическая модель с полиномиальной правой частью [25].

По существу, книга замкнута. Вся необходимая информация приводится с полными доказательствами, кроме некоторых хорошо известных классических результатов таких, как теория Пуанкаре–Данжуа о поведении траектории на инвариантном торе.

В основу книги положен специальный курс, который первый из авторов читал в университете Нижнего Новгорода (ранее Горького) на протяжении

последних тридцати лет. Продолжением данного курса, как правило, является годовой курс лекций по качественной теории двумерных систем, читаемый в течение многих лет профессором Е. А. Леонтович-Андроновой. Кроме того, рассмотрение некоторых аспектов данного курса служит темой студенческих и еженедельных научных семинаров в отделе дифференциальных уравнений Института прикладной математики и кибернетики. Эта книга предназначена тем, кто избрал качественную теорию и теорию бифуркаций в качестве профилирующей дисциплины. Несомненно, эта книга также будет полезна специалистам по указанным предметам и связанным с ними математическим дисциплинам, а также широкому кругу исследователей нелинейной динамики и хаоса из других областей науки, которых интересует анализ конкретных динамических систем.

Первая часть книги состоит из шести глав и двух приложений. В главе 1 описываются основные свойства автономной системы, дается понятие абстрактной динамической системы и выделяются основные типы траекторий и инвариантных множеств, которые будут изучаться в последующих главах. Кроме того, рассматриваются некоторые задачи качественного интегрирования дифференциальных уравнений, основанного на понятии топологической эквивалентности. Материал, приведенный в данной главе, носит также справочный характер.

В главе 2 исследуется поведение траекторий в окрестности грубого положения равновесия. При этом используется предложенная Пуанкаре классификация основных типов положений равновесия. Особое внимание уделяется седловым состояниям равновесия и, в частности, их ведущим и неведущим (сильно устойчивым) инвариантным многообразиям. Достаточное внимание уделяется также асимптотическому представлению решений вблизи точки седлового типа. Как было указано выше, используемые методы основаны на краевой задаче Шильникова. Кроме того, в главе приводятся доказательства некоторых теорем об инвариантных многообразиях. Следует подчеркнуть, что вместе с хорошо известными теоремами об устойчивых и неустойчивых многообразиях седла здесь приводятся некоторые результаты, необходимые для дальнейшего изучения вопроса. В последнем разделе главы представлена некоторая информация, касающаяся теории резонансов Пуанкаре, полезная для исследования локальных бифуркаций.

В главе 3 рассматриваются грубые периодические траектории. Анализируется поведение траекторий отображения Пуанкаре в окрестности неподвижной точки. Как для положений равновесия, в данном случае исследуется соответствующая краевая задача вблизи неподвижной точки седлового

типа и приводится доказательство теоремы о существовании ее инвариантных многообразий. Разделы 3.10–3.12 и 3.14 посвящены свойствам периодических траекторий в системах с непрерывным временем.

Инвариантные торы рассматриваются в главе 4. В частности, изучаются неавтономные системы, зависящие от времени периодически и квазипериодически. Данный класс неавтономных систем можно распространить на большие размерности путем включения некоторых уравнений, записанных в особом виде относительно циклических переменных. Чтобы доказать существование инвариантного тора в такой системе используется универсальный критерий — так называемый принцип кольца, применимый к системам с малыми возмущениями. В случае приложения периодической внешней силы поведение траекторий на двумерном инвариантном торе можно смоделировать при помощи ориентируемого диффеоморфизма окружности. В связи с этим коротко рассматриваются некоторые результаты теории Пуанкаре–Данжуа. В заключение главы анализируется важная задача нелинейной динамики — задача синхронизации, связанная с возникновением «биений» при модуляциях.

Две заключительные главы, 5 и 6, посвящены локальным и глобальным центральным многообразиям, соответственно. В главе 5 повторно доказывается хорошо известный факт о том, что в малой окрестности негрубого положения равновесия или вблизи негрубой периодической траектории  $\mathbb{C}^r$ -гладкой динамической системы существует локальное инвариантное  $\mathbb{C}^r$ -гладкое центральное многообразие, размерность которого для положений равновесия равна числу показателей с нулевой действительной частью, а для периодических траекторий — числу мультипликаторов, лежащих на единичной окружности. При доказательстве теоремы о центральном многообразии решается частная краевая задача и рассматриваются все основные локальные инвариантные многообразия (сильно устойчивые и неустойчивые, расширенные устойчивые и неустойчивые, и сильно устойчивые и неустойчивые инвариантные слоения). В главе анализируется, каким образом существование центрального многообразия и инвариантных слоений позволяет свести задачу исследования локальных бифуркаций системы к задаче, относящейся к соответствующей подсистеме на центральном многообразии, тем самым существенно уменьшая размерность задачи.

В главе 6 представлено доказательство аналогичной теоремы о центральном многообразии для глобальных бифуркаций. В отличие от локальных бифуркаций, размерность нелокального центрального многообразия не зависит от степени вырождения матрицы Якоби, а равна целому числу,



которое можно определить через количество отрицательных и положительных характеристических показателей траекторий седлового типа, входящих в гетероклинический цикл. Другая особенность нелокального центрального многообразия состоит в том, что вообще оно является лишь  $C^1$ -гладким. Ограничения на подобные центральные многообразия могут накладываться лишь при изучении задач о бифуркации, допускающих решение в пределах  $C^1$ -гладкости. Следовательно, в отличие от теории локальной бифуркации, в данном случае для изучения различных тонких явлений бифуркации, требующих большей гладкости, нельзя непосредственно использовать нелокальные центральные многообразия. Таким образом, теорема, по существу, содержит определенные качественные результаты, позволяющие лишь прогнозировать возможную динамику траекторий в малой окрестности гомоклинического цикла и определить размерности устойчивого и неустойчивого многообразий траекторий, лежащих в его окрестности и, следовательно, установить число положительных и отрицательных показателей Ляпунова данных траекторий. Подробно рассматривается лишь класс систем, обладающих простейшим циклом, а именно: системы с двояко-асимптотической траекторией (гомоклинической петлей), которая начинается и заканчивается в одном и том же положении равновесия седлового типа. Затем, полученный результат распространяется на гетероклинические циклы.

В приложении доказывается теорема о приведении системы к определенной форме, удобной для анализа поведения траекторий вблизи седловой точки. Эта теорема представляет особую важность в связи с тем, что зачастую предположение о прямой линеаризации системы вблизи седла может повлечь нежелательные последствия в случае, когда необходимо получить более точные данные о поведении траекторий. Доказательство построено на технике (основанной на сведении задачи к теореме о сильно устойчивом инвариантном многообразии), использующей ряд замен координат, которые мало меняются при малых гладких возмущениях системы. Эта специальная форма рассматривается во второй части книги при изучении гомоклинических бифуркаций.

В заключение хотелось бы выразить признательность за содействие в подготовке данной книги коллегам: Сергею Гонченко, Михаилу Шашкову, Олегу Стенькину, Джорджу Мойоле и Полу Каррану. В частности, Сергею Гонченко за помощь в написании разделов 3.7 и 3.8, Олегу Стенькину за помощь в написании раздела 3.9 и приложения А, и Михаилу Шашкову за помощь в написании разделов 6.1 и 6.2. Также благодарим Освальдо Гарсия, который внес последние штрихи в качественные расчеты.

Также хотелось бы выразить благодарность за серьезную финансовую поддержку, полученную в виде грантов, предоставленных Научно-исследовательским управлением ВМС США (номер N00014-96-1-0753) и НАТО (номер OURLG96-578), премии имени Александра фон Гумбольдта и специальной совместной премии приглашенным профессорам (полученной Л. Чуа), предоставленной Высшей политехнической школой в Лозанне (Ecole Polytechnique Federale de Lausanne) и Высшей технической школой в Цюрихе (Eidgenossosche Technische Hochschule Zurich). Также мы признательны за помощь издательству «Ворлд Сайнтифик» («World Scientific»).

Леонид Шильников  
 Андрей Шильников  
 Дмитрий Тураев  
 Леон Чуа

## ГЛАВА 1

# Основные понятия

### 1.1. Необходимые сведения из теории обыкновенных дифференциальных уравнений

Основным объектом изучения являются автономные системы обыкновенных дифференциальных уравнений, записанные в виде

$$\dot{x} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{dx}{dt} = X(x), \quad (1.1.1)$$

где  $x = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $X(x) = (X_1, \dots, X_n)$ . Положим, что  $X_1, \dots, X_n$  —  $C^r$ -гладкие ( $r \geq 1$ ) функции, определенные в некоторой области  $D \subseteq \mathbb{R}^n$ . В теории динамических систем переменную  $t$  принято рассматривать как время, а область  $D$  — как фазовое пространство: ограниченное, неограниченное или совпадающее с евклидовым пространством  $\mathbb{R}^n$ . Дифференцируемое отображение  $\varphi: \tau \mapsto D$ , где  $\tau$  — интервал на оси  $t$ , называется решением  $x = \varphi(t)$  системы (1.1.1), если

$$\dot{\varphi}(t) = X(\varphi(t)), \quad \text{для любых } t \in \tau. \quad (1.1.2)$$

Поскольку, согласно предположению, условия теоремы Коши выполняются, то для любых значений  $x_0 \in D$  и  $t_0 \in \mathbb{R}^1$  существует единственное решение  $\varphi$ , удовлетворяющее начальному условию

$$x_0 = \varphi(t_0). \quad (1.1.3)$$

Решение определено на некотором интервале  $(t^-, t^+)$ , содержащем значение  $t = t_0$ . Вообще, граничные точки  $t^-$  и  $t^+$  могут принимать как конечные, так и бесконечные значения. Решения системы (1.1.1) обладают следующими свойствами:

1. Если  $x = \varphi(t)$  — решение системы (1.1.1), то очевидно, что  $x = \varphi(t+C)$  также является решением, определенным на интервале  $(t^- - C, t^+ - C)$ .
2. Решения  $x = \varphi(t)$  и  $x = \varphi(t+C)$  можно рассматривать как решения, соответствующие одной начальной точке  $x_0$ , но различным начальным моментам времени  $t_0$ .
3. Решение, удовлетворяющее уравнению (1.1.3), можно записать в виде  $x = \varphi(t - t_0, x_0)$ , где  $\varphi(0, x_0) = x_0$ .
4. Если  $x_1 = \varphi(t_1 - t_0, x_0)$ , то  $\varphi(t - t_0, x_0) = \varphi(t - t_1, x_1)$ . Обозначая  $t_1 - t_0$  через новую переменную  $t_1$ , а  $t - t_1$  — через  $t_2$ , получаем так называемое групповое свойство решений:

$$\varphi(t_2, \varphi(t_1, x_0)) = \varphi(t_1 + t_2, x_0). \quad (1.1.4)$$

Известно, что решение  $x = \varphi(t - t_0, x_0)$  задачи Коши (1.1.3) для  $C^r$ -гладкой системы (1.1.1) является гладким ( $C^r$ ) относительно времени и начальных данных  $x_0$ . Первая производная  $\xi(t - t_0, x_0) \equiv \frac{\partial \varphi}{\partial x_0}$  удовлетворяет так называемому *уравнению в вариациях*  $\dot{\xi} = X'(\varphi(t - t_0, x_0))\xi$  при выполнении следующего начального условия:  $\xi(0; x_0) = I$  ( $I$  — единичная матрица). Уравнение в вариациях — это линейная неавтономная система, полученная путем формального дифференцирования выражения (1.1.1). Дальнейшее дифференцирование дает уравнения для производных высшего порядка.

Существует две геометрические интерпретации решений системы (1.1.1). Первая относится к фазовому пространству  $D$ , вторая — к так называемому *расширенному фазовому пространству*  $D \times \mathbb{R}^1$ . Согласно первой интерпретации, любое решение, удовлетворяющее заданному начальному условию (1.1.3), можно рассматривать как параметрическое уравнение (с параметром  $t$ ) некоторой кривой. Эта кривая задается в фазовом пространстве  $D$  точками  $\varphi(t, x_0)$  при изменении  $t$ . В соответствии с общепринятой терминологией такие кривые называются *фазовыми траекториями* или просто траекториями (орбитами, или, иногда, фазовыми кривыми). Система дифференциальных уравнений (1.1.1) описывает правую часть векторного поля в фазовом пространстве, где, согласно уравнению (1.1.2), вектор скорости  $X(x)$  касается фазовой траектории в точке  $x$ . В силу единственности решения задачи Коши (1.1.3) для гладкого векторного поля  $X$  существует

единственная траектория, проходящая через каждую точку фазового пространства.

Согласно второй интерпретации решение системы (1.1.1) рассматривается как кривая в расширенном фазовом пространстве  $D \times \mathbb{R}^1$ . Такую кривую называют *интегральной*. Существует прямая взаимосвязь между траекториями и интегральными кривыми. Каждая фазовая траектория есть проекция вдоль оси  $t$  соответствующей интегральной кривой на фазовое пространство, как показано на рис. 1.1.1. Однако в отличие от интегральных кривых, являющихся кривыми в строгом смысле этого слова, их проекции на фазовое пространство можно представить не кривыми, а точками. Эти точки называют *положениями равновесия*. Они соответствуют постоянным решениям  $x = x^*$ . Согласно уравнению (1.1.2),  $X(x^*) = 0$ , то есть положения равновесия — особые точки векторного поля. Уместен вопрос: «Могут ли пересекаться фазовые траектории?» Ответ на него дает следующая теорема.

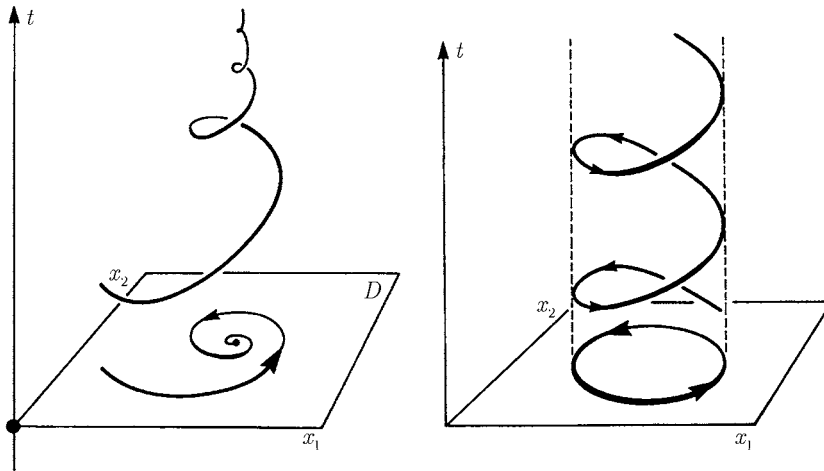


Рис. 1.1.1. Проекцию интегральной кривой на фазовое пространство  $D$  можно представить незамкнутой кривой (а) или, например, периодической траекторией (б)

**Теорема 1.1.** Пусть траектория  $L$ , отличная от положения равновесия, соответствует такому решению  $\varphi(t)$  системы (1.1.1), что  $\varphi(t_1) =$

$= \varphi(t_2)$  при  $t_1 \neq t_2$ . Тогда  $\varphi(t)$  определено для всех значений  $t$  и периодически, а  $L$  — простая гладкая замкнутая кривая.

Если  $\tau$  — наименьший период  $\varphi(t)$ , то параметрическое уравнение траектории  $L$  принимает вид  $x = \varphi(t)$ , где  $t_0 \leq t \leq t_0 + \tau$ , причем в данном интервале определены значения  $t$  соответствуют определенным точкам траектории  $L$ .

По поводу доказательства теоремы см. книгу «Теория динамических систем на плоскости» Андронова, Леонтович, Гордона и Майера [6].

Траекторию  $L$ , соответствующую периодическому решению  $\varphi(t)$ , называют *периодической*.

Любая другая траектория, не являющаяся ни положением равновесия, ни периодической траекторией, есть незамкнутая кривая. Из теоремы 1.1 следует, что незамкнутая траектория не имеет точек самопересечения.

Заметим, что любые два решения, отличие которых состоит лишь в выборе начального момента времени  $t_0$ , соответствуют одной и той же траектории. И наоборот: два различных решения, отвечающие одной и той же траектории, являются одинаковыми с точностью до сдвига по времени  $t \rightarrow t + C$ . Следовательно, все решения, отвечающие одной и той же периодической траектории, периодичны и имеют равные периоды.

Если решение, отвечающее данной траектории  $L$ , определено для всех  $t \in (-\infty, +\infty)$ , то  $L$  — *целая траектория*. Любая траектория, лежащая в ограниченной области, является целой.

С точки зрения кинематики, точка  $\varphi(t)$  называется *представляющей*, а ее траектория — *ассоциированным движением*. Кроме того, для любых траекторий, отличных от положений равновесия, можно задать положительное направление движения, совпадающее с направлением возрастания  $t$ . В каждой точке такой траектории направление определяется при помощи соответствующего касательного вектора. Чтобы подчеркнуть это, будем указывать направление движения точки по траектории стрелками.

Вместе с системой (1.1.1) рассмотрим соответствующую «обращенную во времени» систему

$$\dot{x} = -X(x). \quad (1.1.5)$$

Векторное поле системы (1.1.5) получается из векторного поля системы (1.1.1) путем изменения направления каждого касательного вектора на противоположное. Легко видеть, что каждое решение  $x = \varphi(t)$  системы (1.1.1) соответствует решению  $x = \varphi(-t)$  системы (1.1.5) и наоборот. Очевидно также, что системы (1.1.1) и (1.1.5) имеют одни и те же фазовые кривые с

точностью до замены времени  $t \rightarrow -t$ . Таким образом, ориентированные по времени траектории одной системы получаются из соответствующих траекторий другой системы путем изменения направления стрелок на противоположное.

Рассмотрим следующую систему:

$$\dot{x} = X(x)f(x), \quad (1.1.6)$$

где  $\mathbb{C}^r$ -гладкая функция  $f(x): D \mapsto \mathbb{R}^1$  не обращается в нуль в пространстве  $D$ . Заметим, что системы (1.1.1) и (1.1.6) имеют одни и те же фазовые кривые, отличающиеся лишь параметризацией времени. Кроме того, траектории обеих систем имеют одно направление при  $f(x) > 0$  и противоположное при  $f(x) < 0$ . Если  $x = \varphi(t - t_0, x_0)$  — траектория системы (1.1.1), проходящая через точку  $x_0$  при  $x = x_0$ , то при параметризации времени по этой траектории в соответствии с правилом  $d\tilde{t} = \frac{dt}{f(\varphi(t - t_0, x_0))}$  или  $\tilde{t} = t_0 + \int_{t_0}^t \frac{ds}{f(\varphi(s - t_0, x_0))}$  получаем траекторию системы (1.1.6). Такое преобразование будем называть *изменением масштаба времени* или *заменой времени*.

Заметим, что при рассмотрении системы (1.1.1) интерес представляет только вид траектории, поэтому нет необходимости в учете независимой переменной  $t$ . В данном случае можно перейти к изучению следующей более симметричной системы:

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \dots = \frac{dx_n}{X_n}.$$

Если, например, в определенной подобласти  $G \subset D$  значение  $X_n$  отлично от нуля, то вид траекторий в этой подобласти можно определить, решая систему

$$\frac{dx_i}{dx_n} = X_i X_n^{-1}.$$

Данный метод особенно эффективен при изучении двумерных систем.

Вообще говоря, не все траектории могут быть продолжены на бесконечный интервал  $\tau = (-\infty, +\infty)$ . Другими словами, не все траектории являются целыми<sup>1</sup>. Примерами целых траекторий служат положения рав-

<sup>1</sup>Существуют системы, решения которых уходят на бесконечность за *конечное* время. Такие системы не являются *динамически определенными*

новесия и периодические траектории. С точки зрения динамики, целые траектории или траектории, которые можно определить, по крайней мере, для всех положительных  $t$  на бесконечном промежутке времени, представляют особый интерес. Причина этого в том, что, несмотря на важность информации, полученной при помощи решений для переходного состояния на конечном промежутке времени, наиболее интересные явления, наблюдаемые в естествознании и технологии, получают адекватное объяснение только если время  $t$  растёт. Биркгоф назвал системы, решения которых могут быть определены на бесконечном промежутке времени, *динамическими*. Абстрактное определение таких систем с учетом их групповых свойств, приводится в следующем разделе.

## 1.2. Динамические системы. Основные понятия

При определении динамической системы используются три элемента. (1) Метрическое пространство  $D$ , называемое фазовым пространством. (2) Переменная времени  $t$ , которая может являться либо непрерывной, то есть  $t \in \mathbb{R}^1$ , либо дискретной, то есть  $t \in \mathbb{Z}$ . (3) Закон эволюции, то есть отображение любой заданной точки  $x$  в фазовом пространстве  $D$  и любого значения  $t$  на однозначное состояние  $\varphi(t, x) \in D$ , удовлетворяющее следующим теоретико-групповым свойствам:

1.  $\varphi(0, x) = x$ .
2.  $\varphi(t_1, \varphi(t_2, x)) = \varphi(t_1 + t_2, x)$ .
3.  $\varphi(t, x)$  непрерывно по  $(x, t)$ .

Если переменная  $t$  непрерывна, указанные условия определяют непрерывную динамическую систему или поток. Другими словами, потоком — это однопараметрическая группа *гомеоморфизмов*<sup>2</sup> фазового пространства  $D$ . Фиксируя  $x$  и изменяя  $t$  от  $-\infty$  до  $+\infty$ , получаем ориентируемую кривую<sup>3</sup>, называемую фазовой траекторией. Принята следующая классификация фазовых траекторий: положения равновесия, периодические траектории и незамкнутые траектории. *Положительной полутраекторией* будем назы-

<sup>2</sup>То есть взаимнооднозначных непрерывных отображений, для которых обратное отображение тоже непрерывно. Из группового свойства (1.2.1) непосредственно следует, что функция  $\varphi(-t, \cdot)$  взаимнообратна  $\varphi(t, \cdot)$ .

<sup>3</sup>Ориентация индуцируется направлением движения.

вать кривую  $\{x: \varphi(t, x), t \geq 0\}$ , а *отрицательной полутраекторией* — кривую  $\{x: \varphi(t, x), t \leq 0\}$ . Заметим, что любая точка незамкнутой траектории делит ее на две части: положительную и отрицательную полутраектории. Если отображение  $\varphi(t, x)$  — *диффеоморфизм*<sup>4</sup>, поток представляет собой гладкую динамическую систему. В данном случае в фазовом пространстве  $D$  возникают некоторые дополнительные гладкие структуры. В качестве фазового пространства  $D$ , как правило, выбирают либо пространство  $\mathbb{R}^n$ , либо  $\mathbb{R}^{n-k} \times T^k$ , где  $T^k$  может являться  $k$ -мерным тором  $\underbrace{\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \times \dots \times \mathbb{S}^1}_{k \text{ раз}}$ ,

гладкой поверхностью или многообразием. На основании этого можно установить взаимосвязь между гладким потоком и соответствующим ему векторным полем путем определения поля скоростей

$$X(x) = \left. \frac{d\varphi(t, x)}{dt} \right|_{t=0}. \quad (1.2.2)$$

По определению, траектории гладкого потока являются траекториями системы  $\dot{x} = X(x)$ . В данной работе рассматриваются, главным образом, свойства гладких динамических систем.

Дискретные динамические системы часто называют *каскадами*. Каскаду присущи следующие особенности. Рассмотрим гомеоморфизм  $\varphi(1, x)$  и обозначим его через  $\psi(x)$ . Очевидно, что  $\varphi(t, x) = \psi^t(x)$ , где

$$\psi^t = \underbrace{\psi(\psi(\dots\psi(x)))}_{t-1 \text{ раз}}.$$

Следовательно, для задания каскада достаточно лишь определить гомеоморфизм  $\psi: D \mapsto D$ .

Для дискретной динамической системы последовательность  $\{x_k\}_{k=-\infty}^{+\infty}$ , где  $x_{k+1} = \psi(x_k)$ , называется *траекторией* точки  $x_0$ . Существует три типа траекторий:

1. Точка  $x_0$ . Эта точка является неподвижной точкой гомеоморфизма  $\psi(x)$ , то есть отображается при помощи гомеоморфизма в себя.
2. Цикл  $(x_0, \dots, x_{k-1})$ , где  $x_i = \psi^i(x_0)$ ,  $i = (0, \dots, k-1)$ , а  $x_0 = \psi^k(x_0)$ , кроме того,  $x_i \neq x_j$  при  $i \neq j$ . Число  $k$  называется *периодом*, а каждая

<sup>4</sup>Взаимно однозначное дифференцируемое отображение, обратное к которому тоже дифференцируемо.

точка  $x_i$  — *периодической точкой с периодом  $k$* . Заметим, что неподвижная точка является периодической и имеет период 1.

3. Бесконечная в обе стороны траектория, то есть последовательность  $\{x_k\}_{k=-\infty}^{+\infty}$ , где  $k \rightarrow \pm\infty$ ,  $x_i \neq x_j$  при  $i \neq j$ . Как и в случае потоков, такую траекторию будем называть *незамкнутой*.

Если  $\psi(x)$  — диффеоморфизм, каскад — гладкая динамическая система. Каскады такого типа возникают при изучении неавтономных периодических систем вида

$$\dot{x} = X(x, t),$$

где функция  $X(x, t)$  является непрерывной относительно всех переменных в пространстве  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^1$ , гладкой относительно  $x$  и периодической с периодом  $\tau$  относительно  $t$ . Предполагается, что система имеет решения, которые можно продолжить на интервал  $t_0 \leq t \leq t_0 + \tau$ . Если известно решение  $x = \varphi(t, x_0)$ , где  $\varphi(0, x_0) = x_0$ , можно найти отображение

$$x_1 = \varphi(\tau, x) \quad (1.2.3)$$

гиперплоскости  $t = 0$  в гиперплоскость  $t = \tau$ . В силу того, что функция  $X(x, t)$  периодична,  $(X, t_1)$  и  $(X, t_2)$  совпадают тождественно, если разность  $(t_2 - t_1)$  кратна  $\tau$ . Таким образом, систему (1.2.3) можно рассматривать как диффеоморфизм  $\psi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ .<sup>5</sup>

Прежде чем продолжить рассмотрение вопроса, необходимо ввести некоторые понятия.

Множество  $A$  является *инвариантным* относительно динамической системы, если  $A = \varphi(t, A)$  для любого значения  $t$ . В этом выражении  $\varphi(t, A)$  обозначает множество  $\bigcup_{x \in A} \varphi(t, x)$ . Из данного определения следует, что при  $x \in A$  траектория  $\varphi(t, x)$  лежит в множестве  $A$ . Точка  $x_0$  называется *блуждающей*, если существует открытая окрестность  $U(x_0)$  и положительное значение  $T$  такое, что

$$U(x_0) \cap \varphi(t, U(x_0)) = \emptyset \quad \text{при } t > T. \quad (1.2.4)$$

<sup>5</sup>Заметим, что систему (1.2.3) можно записать в виде автономной системы

$$\dot{x} = X(x, \theta), \quad \dot{\theta} = 1,$$

где  $\theta$  берется по модулю  $\tau$ .

Используя для выражения (1.2.4) преобразование  $\varphi(-t, \cdot)$ , получаем, что

$$\varphi(-t, U(x_0)) \cap U(x_0) = \emptyset \quad \text{при } t < T.$$

Следовательно, определение блуждающей точки является симметричным относительно обращения времени.

Обозначим множество блуждающих точек через  $\mathcal{W}$ . Множество  $\mathcal{W}$  является открытым и инвариантным. Открытость множества следует из того, что вместе с  $x_0$  любая точка в окрестности  $U(x_0)$  является блуждающей. Инвариантность множества следует из того, что если точка  $x_0$  — блуждающая, то точка  $\varphi(t_0, x_0)$  также будет блуждающей при любом значении  $t_0$ . Чтобы доказать это, положим, что  $\varphi(t_0, U(x_0))$  представляет окрестность точки  $\varphi(t_0, x_0)$ . Тогда

$$\varphi(t_0, U(x_0)) \cap \varphi(t, \varphi(t_0, U(x_0))) = \emptyset \quad \text{при } t > T.$$

Следовательно, множество *неблуждающих точек*  $\mathcal{M} = D\mathcal{W}$  замкнуто и инвариантно. Множество неблуждающих точек может быть пустым. В качестве примера последнего рассмотрим динамическую систему, задаваемую в фазовом пространстве  $\mathbb{R}^{n+1}$ , при помощи автономной системы

$$\begin{aligned} \dot{x} &= X(x, \theta), \\ \dot{\theta} &= 1. \end{aligned}$$

где  $x = (x_1, \dots, x_n)$ . Заметим, что уравнение (1.2.4) справедливо, поскольку выражение  $\theta(t) = \theta_0 + t$  монотонно возрастает с увеличением  $t$ . Следовательно, каждая точка фазового пространства  $\mathbb{R}^{n+1}$  — блуждающая.

Очевидно, что положения равновесия, а также все точки, принадлежащие периодическим траекториям, являются неблуждающими. Все точки двояко-асимптотических траекторий, которые при  $t \rightarrow \pm\infty$  стремятся к положениям равновесия и периодическим траекториям, также неблуждающие. Такая двояко-асимптотическая траектория незамкнута и называется *гомоклинической*. Точки, принадлежащие устойчивым по Пуассону траекториям, также неблуждающие.

**Определение 1.1.** Точка  $x_0$  является положительно устойчивой по Пуассону, если для произвольной окрестности  $U(x_0)$  и  $T > 0$ , существует такое значение  $t > T$ , что

$$\varphi(t, x_0) \subset U(x_0). \quad (1.2.5)$$

Если для любого  $T > 0$  существует такое значение  $t$ , что  $t < -T$ , и справедливо (1.2.5), то  $x_0$  — отрицательно устойчивая по Пуассону точка. Положительно и отрицательно устойчивая по Пуассону точка называется устойчивой по Пуассону.

Заметим, что если точка  $x_0$  положительно (отрицательно) устойчива по Пуассону, то любая точка, лежащая на траектории  $\varphi(t, x_0)$ , также является положительно (отрицательно) устойчивой по Пуассону. Таким образом, можно ввести понятие  $P^+$ -траектории (положительно устойчивая по Пуассону),  $P^-$ -траектории (отрицательно устойчивая по Пуассону) и просто  $P$ -траектории (устойчивая по Пуассону). Непосредственно из выражения (1.2.5) следует, что  $P^+$ ,  $P^-$  и  $P$ -траектории состоят из неблуждающих точек.

Очевидно, что положения равновесия и периодические траектории являются замкнутыми  $P$ -траекториями.

**Теорема 1.2 (Биркгоф).** <sup>6</sup> Если  $P^+(P^-, P)$ -траектория незамкнута, то ее замыкание  $\Sigma$  содержит континуум незамкнутых  $P$ -траекторий.

Рассмотрим положительную последовательность  $\{T_n\}$ , где  $T_n \rightarrow +\infty$  при  $n \rightarrow +\infty$ . По определению  $P^+$ -траектории, при  $n \rightarrow +\infty$  существует такая последовательность  $\{t_n\} \rightarrow +\infty$ , что  $\varphi(t_n, x_0) \subset U(x_0)$ . Аналогичное утверждение справедливо для  $P^-$ -траектории. Из этого следует, что  $P$ -траектория последовательно пересекает любую  $\varepsilon$ -окрестность  $U_\varepsilon(x_0)$  точки  $x_0$  бесконечное число раз<sup>7</sup>. Допустим, последовательность  $\{t_n(\varepsilon)\}_{-\infty}^{+\infty}$  такова, что  $t_n(\varepsilon) < t_{n+1}(\varepsilon)$ , а  $\varphi(t_n(\varepsilon), x_0) \subset U_\varepsilon(x_0)$ . Величина

$$\tau_n(\varepsilon) = t_{n+1}(\varepsilon) - t_n(\varepsilon)$$

называется *временем возвращения Пуанкаре*. При незамкнутой  $P$ -траектории возможны два различных случая:

- 1) Последовательность  $\{\tau_n(\varepsilon)\}$  ограничена для любого конечного  $\varepsilon$ , то есть существует такое число  $L(\varepsilon)$ , что  $\tau_n(\varepsilon) < L(\varepsilon)$  при любом  $n$ . Заметим, что  $L(\varepsilon) \rightarrow +\infty$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .
- 2) Последовательность  $\{\tau_n(\varepsilon)\}$  неограничена при любом достаточно малом  $\varepsilon$ .

<sup>6</sup>Доказательство приводится в работе [14].

<sup>7</sup>Для потоков множество, включающее промежутки времени, в течение которых  $P$ -траектория пересекает окрестность  $U_\varepsilon(x_0)$ , состоит из бесконечного множества временных интервалов  $I_n(\varepsilon)$ , где  $t_n(\varepsilon)$  — одна из величин, входящих в  $I_n(\varepsilon)$ .

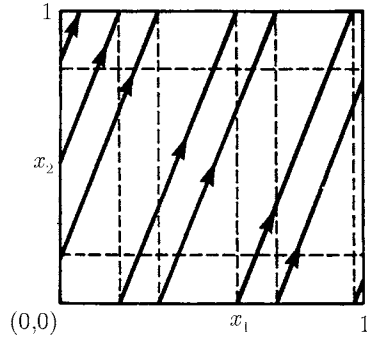


Рис. 1.2.1. Поток на торе можно представить в виде потока на единичном квадрате. Тангенс угла наклона всех параллельных траекторий равен  $\omega_2/\omega_1$ . Склеивание противоположных сторон квадрата дает двумерный тор

В первом случае  $P$ -траектория называется *рекуррентной*. Все траектории, лежащие в ее замыкании  $\Sigma$  также рекуррентные, а само замыкание — *минимальное множество*<sup>8</sup>. Основное свойство такой траектории состоит в том, что она возвращается в  $\varepsilon$ -окрестность точки  $x_0$  в промежуток времени, не превышающий  $L(\varepsilon)$ . Однако, в отличие от периодических траекторий, время возвращения которых фиксировано, рекуррентная траектория имеет неограниченное время возвращения.

Во втором случае замыкание  $\Sigma$  незамкнутой  $P$ -траектории называется *квазимиимальным множеством*. В данном случае в  $\Sigma$  всегда существуют другие инвариантные замкнутые подмножества, которые могут быть представлены положениями равновесия, периодическими траекториями, инвариантными торами и т. д. Поскольку  $P$ -траектория может приближаться к таким подмножествам сколь угодно близко, время возвращения Пуанкаре может быть сколь угодно велико.

Самый простой пример потока, все траектории которого устойчивы по Пуассону, — *квазипериодический поток* на двумерном торе  $T^2$ , описываемый уравнениями

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \omega_1, \\ \dot{x}_2 &= \omega_2,\end{aligned}\tag{1.2.6}$$

<sup>8</sup>Множество называется *минимальным*, если оно является непустым, инвариантным, замкнутым и не содержит собственных подмножеств, обладающих этими тремя свойствами.

где отношение  $\omega_1/\omega_2$  — иррационально. Данный поток можно представить в виде потока, заданного на единичном прямоугольнике, на котором обозначены точки  $(x_1, 0)$ ,  $(x_1, 1)$ ,  $(0, x_2)$  и  $(1, x_2)$ , как показано на рис. 1.2.1. В данном случае  $\Sigma = T^2$  — минимальное множество, а поток имеет незамкнутую траекторию, всюду плотную на торе<sup>9</sup>. При рациональном отношении  $\omega_1/\omega_2$  все траектории, определяемые уравнениями (1.2.6), на торе  $T^2$  являются периодическими.

Пусть  $f(x_1, x_2)$  — функция, заданная на торе  $T^2$ , то есть  $f(x_1 + 1, x_2 + 1) = f(x_1 + 1, x_2) = f(x_1, x_2)$ . Положим также, что функция  $f$  гладкая и обращается в нуль только в одной точке  $(x_1^0, x_2^0)$ . Поток на торе  $T^2$ , описываемый при помощи системы

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \omega_1 f_1(x_1, x_2), \\ \dot{x}_2 &= \omega_2 f_2(x_1, x_2),\end{aligned}$$

является квазимиимальным. В данном случае замыкание  $\Sigma$  также совпадает с тором  $T^2$ . Однако  $\Sigma$  содержит инвариантное подмножество, представленное точкой  $(x_1^0, x_2^0)$ . Все траектории потока, принадлежащего тору, устойчивы по Пуассону, кроме двух, одна из которых стремится к точке  $(x_1^0, x_2^0)$  при  $t \rightarrow +\infty$ , а другая — при  $t \rightarrow -\infty$ , соответственно. При изучении многомерных автономных систем мы рассмотрим другие примеры квазимиимальных множеств.

Введем понятие аттрактора.

**Определение 1.2.** Аттрактор  $\mathcal{A}$  — это замкнутое инвариантное множество, имеющее окрестность (поглощающую область)  $U(\mathcal{A})$  такую, что траектория  $\varphi(t, x)$  произвольной точки  $x$ , принадлежащей  $U(\mathcal{A})$ , удовлетворяет условию

$$\rho((\varphi(t, x), \mathcal{A}) \rightarrow 0 \quad \text{при } t \rightarrow +\infty,\tag{1.2.7}$$

где

$$\rho(x, \mathcal{A}) = \inf_{x_0 \in \mathcal{A}} \|x - x_0\|.$$

Простейшие примеры аттракторов — положения равновесия, устойчивые периодические траектории и устойчивые инвариантные торы, содержащие квазипериодические траектории.

<sup>9</sup>Она называется *квазипериодической траекторией*.

Данное определение аттрактора не исключает того, что он может содержать другие аттракторы. Понятие аттрактора следует ограничить путем наложения условия квазиминимальности. Существует ряд аттракторов, удовлетворяющих этому условию. Среди них особый интерес представляют так называемые *странные аттракторы*, являющиеся инвариантными замкнутыми множествами, состоящими только из неустойчивых траекторий.

В завершение данного раздела заметим, что также существуют системы, в которых  $t \in \mathbb{R}^+$ , где  $\mathbb{R}^+$  — неотрицательная полупрямая, или  $t \in \mathbb{Z}^+$ , где  $\mathbb{Z}^+$  — множество неотрицательных целых чисел. В первом случае динамическая система определяется при помощи полумножества (полугруппы), в последнем — при помощи необратимого отображения.

### 1.3. Качественное интегрирование динамических систем

Исследование любого явления, проявляющего динамическое поведение, как правило, начинается с построения соответствующей математической модели динамической системы в виде (1.2.1). Наличие модели в явном виде позволяет проследить эволюцию ее состояния при изменении  $t$ , поскольку исходные данные определяют единственное решение системы (1.2.1). Для полного изучения системы необходимо найти это решение, то есть «проинтегрировать» исходную систему. «Интегрирование системы» подразумевает получение в качестве ее решения аналитического выражения. Однако данная цель достижима только для очень малого класса динамических систем: для систем линейных уравнений с постоянными коэффициентами и для некоторых особых уравнений, которые можно проинтегрировать в *квадратурах*. Вместе с тем, даже в случае, когда решение представлено в аналитическом виде, координатные функции, определяющие решение, могут быть настолько сложны, что непосредственный анализ становится практически невозможным. Кроме того, задача нахождения решения в аналитическом виде не является главной целью нелинейной динамики, которая, в основном, затрагивает «качественные» свойства такие, как количество положений равновесия, устойчивость, существование периодических траекторий и т. д. Таким образом, при использовании метода Пуанкаре, вместо прямого интегрирования дифференциальных уравнений мы постараемся получить информацию о характере и виде функций, задаваемых этими уравнениями, из самих уравнений<sup>10</sup>. В частности, мы по-

<sup>10</sup>«Analyse des travans de Henri Poincaré faite par lui-même» [54].

пытаемся описать важные качественные особенности этих функций путем геометрического представления фазовых траекторий. Вот почему данный метод называется «качественным интегрированием».

На первом этапе качественного исследования определяются все возможные типы траекторий, имеющих определенное поведение и «формы». Второй этап состоит в описании для каждой группы качественно схожих систем. Для того, чтобы дать полное описание, необходимо определить некоторые наиболее важные или «специальные» траектории. Но при этом возникает трудноразрешимая задача: «Какие свойства траектории необходимо определить для того, чтобы описать качественную структуру деления фазового пространства на траектории?»

Первый этап довольно прост. По сути, его можно переформулировать следующим образом: необходимо определить, к чему стремится траектория при  $t \rightarrow +\infty$  ( $t \rightarrow -\infty$ ). В этом случае мы должны положить, что траектория  $L$ , задаваемая уравнением  $x = \varphi(t)$ , при  $t \geq t_0$  ( $t \leq t_0$ ) остается в некоторой ограниченной области фазового пространства. При изучении данного вопроса существенными являются следующие понятия.

**Определение 1.3.** Точку  $x^*$  называют  $\omega$ -предельной точкой траектории  $L$ , если для некоторой последовательности  $\{t_k\}$ , где  $t_k \rightarrow +\infty$ ,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi(t_k) = x^*.$$

Аналогичное определение  $\alpha$ -предельной точки применимо для  $t_k \rightarrow -\infty$  при  $k \rightarrow \infty$ . Обозначаем множество всех  $\omega$ -предельных точек, принадлежащих траектории  $L$ , через  $\Omega_L$ , а множество  $\alpha$ -предельных точек — через  $\mathcal{A}_L$ . Заметим, что положение равновесия представлено единственной предельной точкой. В случае, если траектория  $L$  — периодическая, все точки, принадлежащие ей, являются  $\alpha$  и  $\omega$ -предельными точками, то есть  $L = \Omega_L = \mathcal{A}_L$ . Если  $L$  — незамкнутая устойчивая по Пуассону траектория, то множества  $\Omega_L$  и  $\mathcal{A}_L$  совпадают с ее замыканием  $\bar{L}$ . Множество  $\bar{L}$  является либо минимальным (если  $L$  — рекуррентная траектория), либо квазиминимальным множеством, если время возвращения Пуанкаре траектории  $L$  неограничено. Все положения равновесия, а также периодические и устойчивые по Пуассону траектории *самопредельны*.

Структура множеств  $\Omega_L$  и  $\mathcal{A}_L$  более подробно изучена для *двумерных* динамических систем, все траектории которых при  $t \rightarrow \pm\infty$  остаются в некоторой ограниченной области на плоскости. Для данного случая Пуан-



каре и Бендиксон [13] установили, что множество  $\Omega_L$  можно представить лишь одним из трех приведенных ниже топологических типов:

- I. Положения равновесия.
- II. Периодические траектории.
- III. Циклы, образованные положениями равновесия и траекториями, стремящимися к данным положениям равновесия при  $t \rightarrow \pm\infty$ .

На рисунке 1.3.1 приведены примеры предельных множеств типа III; положения равновесия обозначены через  $O$ . Используя указанную общую классификацию, можно перечислить *все* типы положительных полутраекторий систем на плоскости:

- 1) положения равновесия;
- 2) периодические траектории;
- 3) полутраектории, стремящиеся к положению равновесия;
- 4) полутраектории, стремящиеся к периодической траектории;
- 5) полутраектории, стремящиеся к предельному множеству типа III.

Аналогичная ситуация имеет место в случае отрицательных полутраекторий. Среди периодических траекторий двумерных систем особую роль играют траектории, представляющие собой  $\omega$ - либо  $\alpha$ -предельные множества незамкнутых траекторий, расположенных во внутренней или внешней области периодической траектории, как показано на рис. 1.3.2. В теории двумерных систем такая траектория называется *предельным циклом*.

Аналогичная ситуация для многомерных систем намного сложнее. В данном случае, помимо положений равновесия и периодических траекторий, предельные множества могут быть минимальными или квазимиимальными множествами различных топологических типов таких, как странные аттракторы, которые могут быть гладкими или негладкими многообразиями или фрактальными множествами с локальной структурой прямого произведения диска на канторово множество, и на другие еще более экзотические множества.

Вернемся к задаче, касающейся изучения совокупности траекторий. В сущности, описать динамическую систему означает дать топологическое

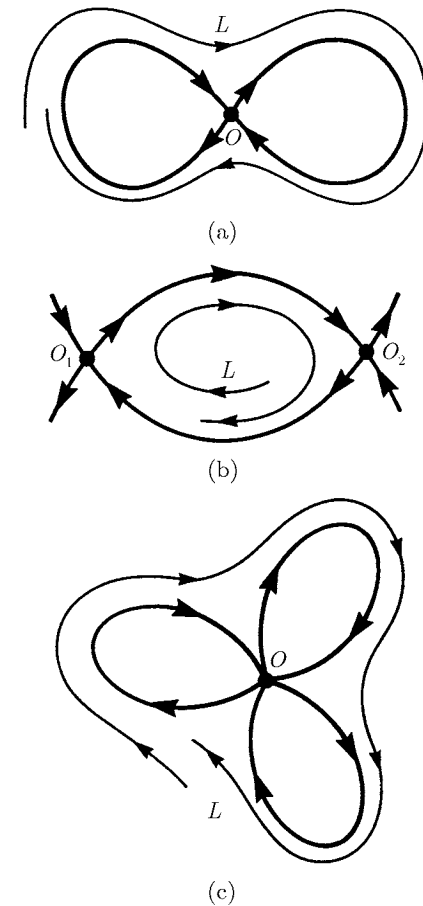


Рис. 1.3.1. Под буквами (a) и (c) приведены примеры двух  $\omega$ -предельных гомоклинических циклов; под буквой (b) — пример гетероклинического цикла, образованного двумя траекториями, направленными от одного положения равновесия к другому

(качественное) разбиение фазового пространства на области существования траекторий разных топологических типов. Эту задачу, как правило, называют «построение фазового портрета». При ее решении возникает вопрос: «В каком случае два фазовых портрета являются одинаковыми?» С точки

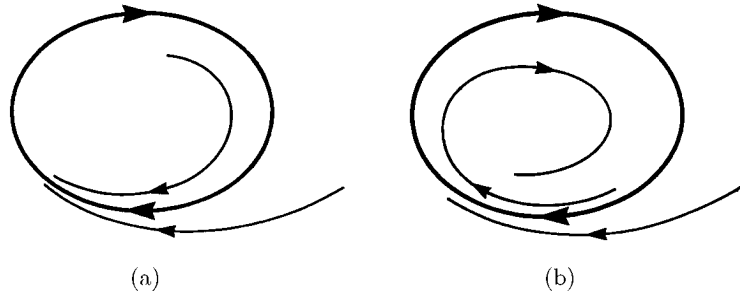


Рис. 1.3.2. (а)  $\omega$ -предельный цикл. (б) Цикл, являющийся для незамкнутых траекторий в его окрестности как  $\omega$ -, так и  $\alpha$ -предельным

зрения качественной теории динамических систем ответ на поставленный вопрос можно получить, вводя понятие топологической эквивалентности.

**Определение 1.4.** Две системы являются топологически эквивалентными, если существует гомеоморфизм соответствующих фазовых пространств, отображающий траектории одной системы в траектории второй<sup>11</sup>.

В этом определении подразумевается, что положения равновесия, а также периодические и незамкнутые траектории одной системы соответственно отображаются в положения равновесия, периодические и незамкнутые траектории другой системы. Топологическая эквивалентность двух систем в некоторой области фазового пространства определяется аналогично. Последняя, как правило, используется для изучения локальных задач, например, в окрестности положения равновесия либо вблизи периодической или гомоклинической траектории. Определение топологической эквивалентности двух динамических систем дает косвенное определение качественной структуры разбиения фазового пространства на области существования траекторий различных топологических типов. Такие структуры должны быть инвариантны относительно всех возможных гомеоморфизмов фазового пространства.

Пусть  $G$  — ограниченная область фазового пространства, а  $H = \{h_i\}$  — множество гомеоморфизмов в  $G$ . Метрика задается следующим образом:

$$\text{dist}(h_1, h_2) = \sup_{x \in G} \|h_1 x - h_2 x\|.$$

<sup>11</sup> Более подробно этот вопрос рассматривается в разделе 2.5.

**Определение 1.5.** Траектория  $L (L \in G)$  называется особой, если при достаточно малом значении  $\varepsilon > 0$  для всех гомеоморфизмов  $h_i$ , удовлетворяющих условию  $\text{dist}(h_i, I) < \varepsilon$ , где  $I$  — тождественное отображение, выполняется условие

$$h_i L = L.$$

Очевидно, все положения равновесия и периодические траектории являются особыми траекториями. Незамкнутые траектории также могут быть особыми. Например, все траектории двумерной системы, стремящиеся к положениям равновесия седлового типа как при  $t \rightarrow +\infty$ , так и при  $t \rightarrow -\infty$ , являются особыми. Поскольку такие траектории разделяют определенные области на плоскости, их называют *сепаратрисами* (см. примеры сепаратрис, приведенные на рис. 1.3.1). Определение особых полутраекторий можно сформулировать аналогично.

**Определение 1.6.** Две траектории  $L_1$  и  $L_2$  эквивалентны, если при  $\varepsilon > 0$  существуют такие гомеоморфизмы  $h_1, h_2, \dots, h_{m(\varepsilon)}$ , что

$$L_2 = h_{m(\varepsilon)} \cdots h_1 L_1.$$

где  $\text{dist}(h_k, I) < \varepsilon$  ( $k = 1, 2, \dots, m(\varepsilon)$ ).

Каждое множество эквивалентных траекторий будем называть *ячейкой*. Заметим, что все траектории в ячейке имеют один и тот же топологический тип. В частности, если ячейка состоит из незамкнутых траекторий, то все они имеют одни и те же  $\omega$ - и  $\alpha$ -предельные множества.

Особые траектории и ячейки особенно важны для двумерных систем. В этом случае можно определить некоторое множество  $S$ , если взять из каждой ячейки по одной траектории (все особые траектории по определению принадлежат  $S$ ). Данное множество  $S$  будем называть *схемой*<sup>12</sup>. Допустим, что множество  $S$  состоит из конечного числа траекторий<sup>13</sup>.

**Теорема 1.3.** *Схема является полным топологическим инвариантом.*

Доказательству этой теоремы посвящена значительная часть книги Андронова, Леонтович, Гордон и Майер «Теория динамических систем на плоскости» [6]. Данная теория не только является математической основой те-

<sup>12</sup> Относительно указанного отношения эквивалентности множество  $S$  можно рассматривать как фактор-систему.

<sup>13</sup> Условие конечности числа траектории множества  $S$  имеет довольно общий характер и выполняется для большого класса систем на плоскости.

ории колебаний двумерных систем, но также предоставляет методы исследования конкретных систем. В частности, исследование проводится в следующем порядке: сначала классифицируются положения равновесия, а затем все особые траектории, такие как сепаратрисы, стремящиеся к седловым положениям равновесия, и траектории, предельные для множеств типа III при  $t \rightarrow +\infty$  либо при  $t \rightarrow -\infty$ . Полный набор особых траекторий определяет схематический портрет, называемый *скелетом*. Он позволяет разделить фазовое пространство на ячейки и изучить поведение траекторий внутри каждой из них.

К сожалению, данный метод неприемлем для исследования многомерных систем. Множество особых траекторий в трехмерной системе может быть бесконечным или даже континуальным. То же самое относится к ячейкам. Таким образом, в этом случае задача нахождения полного топологического инварианта кажется не вполне реалистичной. Поэтому мы должны смириться с относительно неполной классификацией, основанной на некоторых топологических инвариантах, которые можно применить лишь в определенных случаях. Тем не менее, основной подход для изучения конкретных многомерных систем остается таким же, как и для двумерных: анализ системы начинается с исследования положений равновесия и периодических траекторий. Эта «современная» локальная теория рассматривается в главах 2 и 3, соответственно.

## ГЛАВА 2

# Грубые положения равновесия динамических систем

### 2.1. Понятие положения равновесия. Линеаризованная система

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = X(x), \quad (2.1.1)$$

где  $x \in \mathbb{R}^n$ , а  $X$  — гладкая функция, принадлежащая некоторой области  $D \subset \mathbb{R}^n$ .

**Определение 2.1.** Траектория  $x(t)$  системы (2.1.1) называется положением равновесия, если она не зависит от времени, то есть  $x(t) \equiv x_0 = \text{const}$ .

Из определения следует, что координаты положения равновесия можно найти, решая систему

$$X(x_0) = 0. \quad (2.1.2)$$

Если матрица Якоби  $\partial X/\partial x$  невырождена в точке  $x_0$ , то по теореме о неявной функции вблизи точки  $x_0$  не существует других решений уравнения (2.1.2). Следовательно, положение равновесия является *изолированным*. Однако даже если матрица Якоби оказывается вырожденной, положение равновесия, как правило, изолировано (за исключением случая, когда правая часть функции  $X(x)$  принадлежит к очень специфическому типу). Таким образом, в общем случае, в любой ограниченной подобласти фазового пространства  $\mathbb{R}^n$  система (2.1.1) имеет конечное число положений равновесия. Кроме того, если правая часть системы (2.1.1) — полином, то количество положений равновесия можно определить при помощи стандартных алгебраических методов.

С точки зрения численного моделирования, при малых значениях  $n$  определение всех изолированных решений системы (2.1.2) (или, что то же самое, всех стационарных состояний системы (2.1.2)) в ограниченной подобласти фазового пространства  $\mathbb{R}^n$  не вызывает затруднений. Однако число положений равновесия многомерной системы может быть весьма большим, и их нахождение становится проблематичным.

Изучение системы (2.1.1) вблизи положения равновесия основано на стандартном методе линеаризации.

Пусть точка  $O(x = x_0)$  — положение равновесия системы (2.1.1). После подстановки

$$x = x_0 + y \quad (2.1.3)$$

начало координат смещается в  $O$ . В новых переменных систему можно представить следующим образом:

$$\dot{y} = X(x_0 + y), \quad (2.1.4)$$

или, раскладывая в ряд Тейлора вблизи точки  $x = x_0$ , как

$$\dot{y} = X(x_0) + \frac{\partial X(x_0)}{\partial x} y + o(y). \quad (2.1.5)$$

Так как  $X(x_0) = 0$ , то система (2.1.5) принимает вид

$$\dot{y} = Ay + g(y), \quad (2.1.6)$$

где

$$A = \frac{\partial X(x_0)}{\partial x};$$

$A$  есть  $n \times n$ -матрица с постоянными коэффициентами, а  $g(y)$  удовлетворяет условию

$$g(0) = \frac{\partial g(0)}{\partial y} = 0. \quad (2.1.7)$$

В общем случае, последний член системы (2.1.6) является величиной большего порядка малости (относительно обычной нормы), чем первый. Очевидно, что поведение траекторий системы (2.1.6) в малой окрестности начала координат главным образом зависит от *линеаризованной системы*

$$\dot{y} = Ay. \quad (2.1.8)$$

В 19-м и начале 20-го века изучение линейных систем было главной задачей неконсервативной динамики. Основным источником таких систем служила теория автоматического управления, в частности, теория управления паровыми двигателями. Центральная задача линейной динамики на тот период состояла в нахождении наиболее эффективных критериев устойчивости для стационарных состояний<sup>1</sup>.

Устойчивость положений равновесия определяется собственными значениями  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  матрицы Якоби  $A$ , которые являются корнями характеристического уравнения

$$\det |A - \lambda I| = 0 \quad (2.1.9)$$

где  $I$  — единичная матрица. Корни характеристического уравнения также называют *характеристическими показателями* положения равновесия. Положение равновесия *устойчиво*, если все характеристические показатели лежат в левой полуплоскости комплексной плоскости. Кроме того, любые отклонения от положения равновесия экспоненциально затухают с коэффициентом затухания, пропорциональным величинам  $\operatorname{Re} \lambda_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ). Таким образом, задача построения простого и эффективного критерия устойчивости положения равновесия состояла в нахождении некоторых явных условий через такие элементы матрицы  $A$ , которые бы позволили, не решая характеристического уравнения, определить, когда все собственные значения лежат в открытой полуплоскости.

Приведем наиболее известный алгоритм, называемый критерием Рауса–Гурвица. Пусть  $(a_0, \dots, a_n)$  — коэффициенты полинома  $\det |\lambda I - A|$ :

$$\det |\lambda I - A| = a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n.$$

Составляем матрицу размерности  $n \times n$ :

$$\tilde{A} = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \cdots & 0 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-2} & a_n \end{vmatrix} \quad (2.1.10)$$

<sup>1</sup>Необходимость изучения нелинейных неконсервативных систем возникла только в первой половине 20-го века в связи с исследованием явления незатухающих колебаний в ламповом генераторе.

и находим миноры  $\Delta_1 = a_1$ ,  $\Delta_2 = a_1 a_2 - a_0 a_3, \dots$ ,  $\Delta_n = \det \tilde{A}$ , где  $\Delta_i$  — определитель матрицы, элементы которой лежат на пересечении первых  $i$  строк и первых  $i$  столбцов матрицы  $\tilde{A}$ .

**Критерий Рауса–Гурвица.** Все характеристические показатели имеют отрицательные действительные части тогда и только тогда, когда значение  $\Delta_i$  положительно.

Математический вопрос о соответствии свойств нелинейной системы вблизи положения равновесия и линеаризованной системы был впервые сформулирован в работах Пуанкаре и Ляпунова. К настоящему времени эта задача, в основном, решена. В следующих разделах мы ее детально изучим и опишем поведение траекторий нелинейных систем в окрестности грубых положений равновесия, то есть таких, которые не имеют характеристических показателей с нулевой действительной частью. Заметим, что приведенное ниже представление отличается от общепринятой трактовки тем, что основное внимание уделяется особенностям системы, необходимым для изучения странных аттракторов, содержащих седловые положения равновесия, например, аттракторов Лоренца, винтовых аттракторов, аттракторов в виде двойной спирали в цепи Чуа и т. д.

## 2.2. Качественное исследование двумерных и трехмерных линейных систем

В данном и последующих двух разделах мы изучим поведение решений линеаризованных систем. При этом, ограничимся анализом только грубых положений равновесия.

В первую очередь необходимо рассмотреть маломерные ( $n = 2$  и  $n = 3$ ) системы.

При  $n = 2$  общий вид системы следующий:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a_{11}x + a_{12}y, \\ \dot{y} &= a_{21}x + a_{22}y. \end{aligned} \quad (2.2.1)$$

Соответствующее характеристическое уравнение записывается как

$$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = 0, \quad (2.2.2)$$

а корни определяются выражением

$$\lambda_{1,2} = (a_{11} + a_{22})/2 \pm \sqrt{(a_{11} + a_{22})^2/4 - (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})}.$$

Пуанкаре первым дал названия основным положениям равновесия двумерных систем. В зависимости от характеристических показателей  $\lambda_{1,2}$  выделяются следующие типы положений равновесия:

1.  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  — действительные отрицательные:  $\lambda_1 < 0$  и  $\lambda_2 < 0$ . Такое положение равновесия  $O$  называют *устойчивым узлом*. При  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  систему (2.2.1) путем невырожденного линейного преобразования пространственных переменных можно привести к виду

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= \lambda_1 \xi, \\ \dot{\eta} &= \lambda_2 \eta \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

где  $\xi(t)$  и  $\eta(t)$  — проекции фазовой точки  $(x(t), y(t))$  на собственные векторы матрицы  $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ , соответствующие собственным значениям  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ . Решение системы (2.2.3) в общем виде определяется выражением

$$\xi = e^{\lambda_1 t} \xi_0, \quad \eta = e^{\lambda_2 t} \eta_0. \quad (2.2.4)$$

Поскольку значения  $\lambda_{1,2}$  отрицательны, все траектории притягиваются к началу координат при  $t \rightarrow +\infty$ . Кроме того, каждая траектория достигает начала координат по касательной либо к оси  $\xi$ , либо к оси  $\eta$ . Чтобы проверить это, исследуем следующее уравнение интегральных кривых системы (2.2.3):

$$\eta \xi_0^\nu = \xi^\nu \eta_0 \quad (2.2.5)$$

где  $\nu = |\lambda_2|/|\lambda_1|$ . Для определенности допустим, что  $|\lambda_2|$  больше  $|\lambda_1|$ . Тогда  $\nu > 1$ , и, согласно уравнению (2.2.5), все траектории достигают точки  $O$  по касательной к оси  $\xi$ , кроме двух траекторий, лежащих на оси  $\eta$  (рис. 2.2.1). Оси  $\xi$  и  $\eta$  называются *ведущим и неведущим направлениями*, соответственно. При  $\lambda_1 = \lambda_2 = -\lambda < 0$  систему (2.2.1) можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= -\lambda \xi + \eta, \\ \dot{\eta} &= -\lambda \eta \end{aligned} \quad (2.2.6)$$

(нетривиальный блок Жордана), или в виде

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= -\lambda \xi, \\ \dot{\eta} &= -\lambda \eta. \end{aligned} \quad (2.2.7)$$

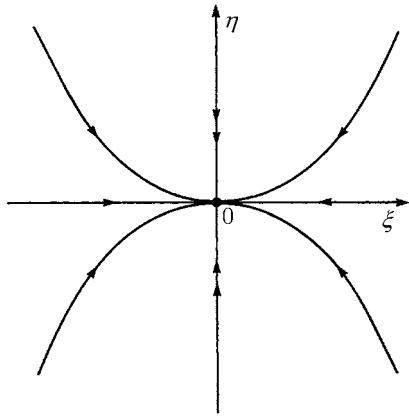


Рис. 2.2.1. Устойчивый узел. Двойными стрелками показано сильно устойчивое (неведущее) направление, совпадающее с осью  $\eta$

Решение в общем виде системы (2.2.6) описывается следующими выражениями:

$$\xi = e^{-\lambda t} \xi_0 + t e^{-\lambda t} \eta_0, \quad \eta = e^{-\lambda t} \eta_0 \quad (2.2.8)$$

а системы (2.2.7) — выражениями

$$\xi = e^{-\lambda t} \xi_0, \quad \eta = e^{-\lambda t} \eta_0. \quad (2.2.9)$$

На рис. 2.2.2 показан фазовый портрет, соответствующий первому случаю. Все траектории стремятся к точке  $O$  по касательной к единственному собственному вектору — оси  $\xi$ . Во втором случае любая траектория приближается к точке  $O$  в собственном направлении, как показано на рис. 2.2.3. Такой узел называется *дикритическим*.

2. Пара комплексно-сопряженных корней:  $\lambda_{1,2} = -\rho \pm i\omega$ , где  $\rho > 0$ ,  $\omega > 0$ . В данном случае положение равновесия  $O$  называется *устойчивым фокусом*. При помощи невырожденной нелинейной замены координат систему (2.2.1) можно преобразовать следующим образом:

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= -\rho\xi - \omega\eta, \\ \dot{\eta} &= \omega\xi - \rho\eta. \end{aligned} \quad (2.2.10)$$

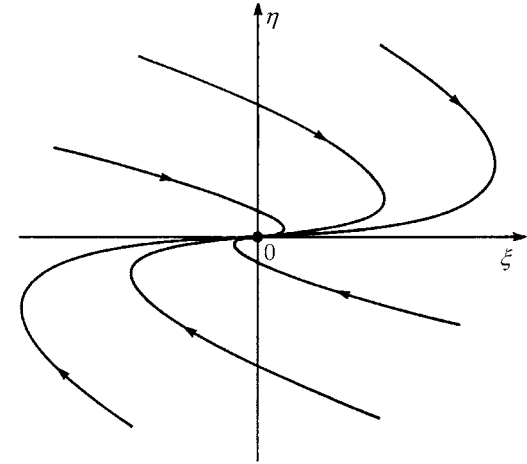


Рис. 2.2.2. Другой пример устойчивого узла. Каждая траектория приближается к началу координат в единственном ведущем направлении, совпадающем с осью  $\xi$

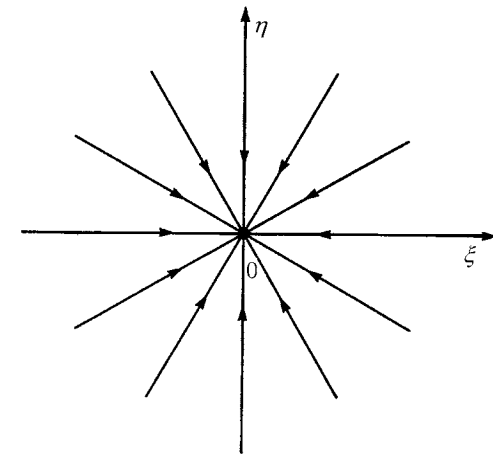


Рис. 2.2.3. Дикритический узел. Каждая траектория стремится к точке  $O$  в собственном направлении

При записи в полярных координатах  $\xi = r \cos \varphi$ ,  $\eta = r \sin \varphi$  система (2.2.10) принимает вид

$$\begin{aligned} \dot{r} &= -\rho r, \\ \dot{\varphi} &= \omega. \end{aligned} \quad (2.2.11)$$

Решение системы (2.2.11) в общем виде можно представить при помощи уравнений

$$\begin{aligned} r(t) &= e^{-\rho t} r_0, \\ \varphi(t) &= \omega t + \varphi_0, \end{aligned} \quad (2.2.12)$$

или, возвращаясь к декартовым координатам, как

$$\begin{aligned} \xi(t) &= e^{-\rho t} (\xi_0 \cos(\omega t) - \eta_0 \sin(\omega t)), \\ \eta(t) &= e^{-\rho t} (\xi_0 \sin(\omega t) + \eta_0 \cos(\omega t)). \end{aligned} \quad (2.2.13)$$

Фазовый портрет показан на рис. 2.2.4. Любая траектория (за исключением  $O$ ) имеет вид спирали, закрученной против часовой стрелки и стремящейся к началу координат при  $t \rightarrow +\infty$ .

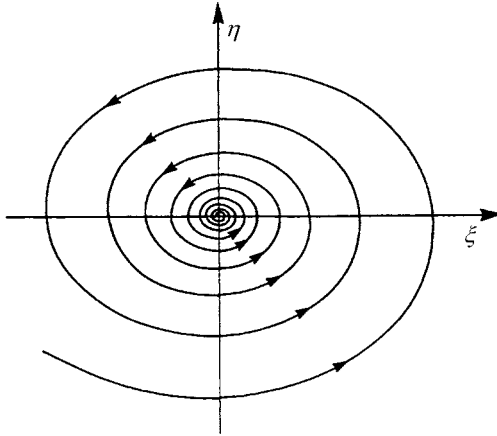


Рис. 2.2.4. Устойчивый фокус на плоскости

3. И  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  являются действительными числами, но имеют противоположный знак:  $\lambda_1 = \gamma > 0$ ,  $\lambda_2 = -\lambda < 0$ . Такая точка равновесия

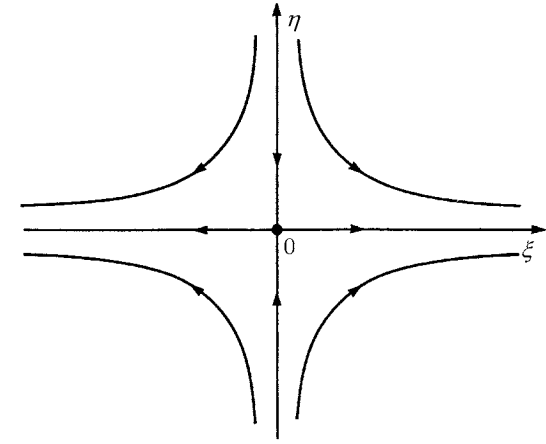


Рис. 2.2.5. Плоское седло

называется *седлом*. Линейная замена переменных приводит систему (2.2.1) к виду

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= \gamma \xi, \\ \dot{\eta} &= -\lambda \eta. \end{aligned} \quad (2.2.14)$$

Решение системы (2.2.14) в общем виде можно представить при помощи уравнений

$$\xi = e^{\gamma t} \xi_0, \quad \eta = e^{-\lambda t} \eta_0. \quad (2.2.15)$$

Соответствующее уравнение интегральных кривых имеет вид

$$\eta \xi^\nu = \xi_0^\nu \eta_0, \quad (2.2.16)$$

где  $\nu = \lambda/\gamma$ . Портрет фазового пространства (или просто «фазовое пространство») вблизи седла показан на рис. 2.2.5. Существует четыре исключительные траектории, называемые *сепаратрисами*: две устойчивые и две неустойчивые, которые стремятся к седлу  $O$  при  $t \rightarrow +\infty$  и  $t \rightarrow -\infty$ , соответственно. Остальные траектории минуют седло. Пара устойчивых сепаратрис и седло  $O$  образуют *устойчивое инвариантное подпространство* (ось  $\eta$ ). *Неустойчивое инвариантное подпространство* (ось  $\xi$ ) состоит из неустойчивых сепаратрис и точки седлового типа.

4. Случай, когда действительные части обоих характеристических показателей положительны, легко сводится к рассмотренным выше случаям (1) и (2) путем обращения времени  $t \rightarrow -t$ , в результате чего направление стрелок на соответствующем фазовом портрете меняется на противоположное. Если характеристические показатели — действительные числа, то соответствующее положение равновесия называется *неустойчивым узлом*. В случае комплексных характеристических показателей его называют *неустойчивым фокусом* (см. рис. 2.2.6 и 2.2.7).

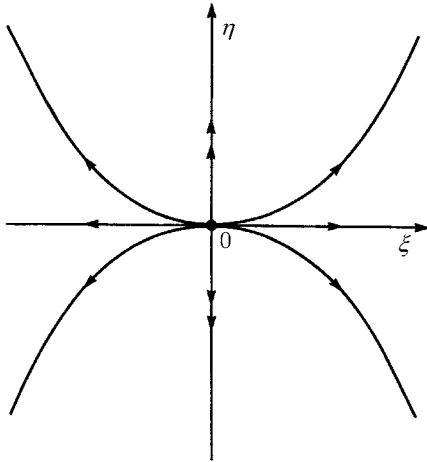


Рис. 2.2.6. Неустойчивый узел. Фазовый портрет получен в соответствии с рис. 2.2.1 путем обращения времени

5. Рассмотрим положения равновесия трехмерных систем. В первую очередь изучим случай, когда характеристические показатели  $\lambda_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) — действительные числа такие, что  $\lambda_3 < \lambda_2 < \lambda_1 < 0$ . Тогда, соответствующая трехмерная система приводится к виду

$$\dot{x} = \lambda_1 x, \quad \dot{y} = \lambda_2 y, \quad \dot{z} = \lambda_3 z. \quad (2.2.17)$$

Решение системы в общем виде можно представить при помощи уравнений

$$x = e^{\lambda_1 t} x_0, \quad y = e^{\lambda_2 t} y_0, \quad z = e^{\lambda_3 t} z_0. \quad (2.2.18)$$

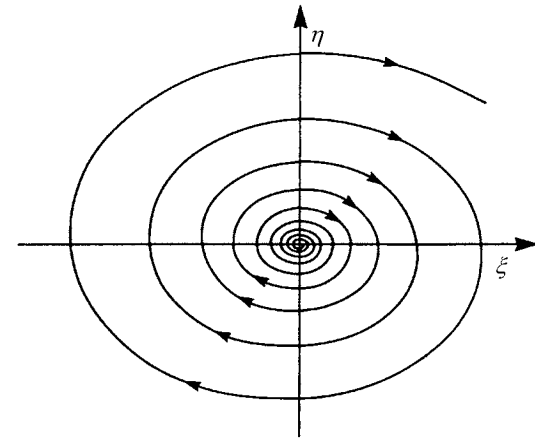


Рис. 2.2.7. Неустойчивый фокус. Траектория на плоскости образует спираль, закрученную по часовой стрелке

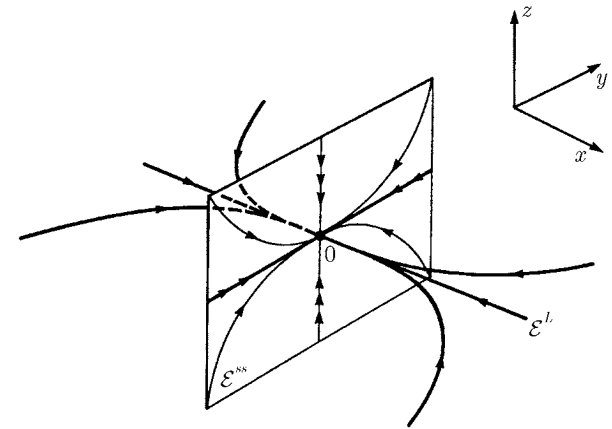


Рис. 2.2.8. Устойчивый узел в  $\mathbb{R}^3$ . Чем реже стрелки, тем меньше скорость сходимости. Ведущее подпространство  $\mathcal{E}^L$  — одномерное, двумерное подпространство  $\mathcal{E}^{SS}$  — неведущее



Поскольку показатели  $\lambda_i$  отрицательны, точка  $O$  — устойчивое положение равновесия, то есть все траектории стремятся к ней при  $t \rightarrow +\infty$ . Кроме того, все траектории вне *неведущей плоскости* ( $yoz$ ) приближаются к точке  $O$  в *ведущем направлении*, совпадающем с осью  $x$  (см. рис. 2.2.8). Такое положение равновесия называется *устойчивым узлом*. Рассмотрим случай, когда в ряду характеристических показателей имеется пара комплексно-сопряженных показателей  $\lambda_{2,3} = -\rho \pm i\omega$ . Состояние равновесия системы

$$\dot{x} = \lambda_1 x, \quad \dot{y} = -\rho y - \omega z, \quad \dot{z} = \omega y - \rho z \quad (2.2.19)$$

при  $-\rho < \lambda_1 < 0$  также называют *устойчивым узлом*. В данном случае решение в общем виде можно представить как

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{\lambda_1 t} x_0, \\ y(t) &= e^{-\rho t} (y_0 \cos(\omega t) - z_0 \sin(\omega t)), \\ z(t) &= e^{-\rho t} (y_0 \sin(\omega t) + z_0 \cos(\omega t)). \end{aligned} \quad (2.2.20)$$

(см. (2.2.13)). Фазовый портрет данной системы показан на рис. 2.2.9. Из системы (2.2.20) следует, что

$$\sqrt{y(t)^2 + z(t)^2} = e^{-\rho t} \sqrt{y_0^2 + z_0^2}.$$

Кроме того, для любой траектории, начальная точка которой не лежит в неведущей плоскости ( $yoz$ ), имеем

$$\sqrt{y(t)^2 + z(t)^2} = C|x(t)|^\nu \quad (2.2.21)$$

где  $\nu = \rho/|\lambda_1|$ , а  $C = \sqrt{y_0^2 + z_0^2}/|x_0|^\nu$ . Поскольку  $\nu > 1$ , все эти траектории приближаются к точке  $O$  вдоль ведущей оси  $x$ .

6. При  $\lambda_1 < -\rho < 0$  положение равновесия системы (2.2.19) называется *устойчивым фокусом*. Зависимость (2.2.21) продолжает выполняться, но при  $\nu < 1$  все траектории, для которых  $C \neq 0$  (то есть траектории, начальные точки которых не лежат на оси  $x$ ), стремятся к точке  $O$  по касательной к плоскости ( $yoz$ ), как показано на рис. 2.2.10. В данном случае ось  $x$  называют *неведущим направлением*, а плоскость ( $yoz$ ) — *ведущей плоскостью*, соответственно.

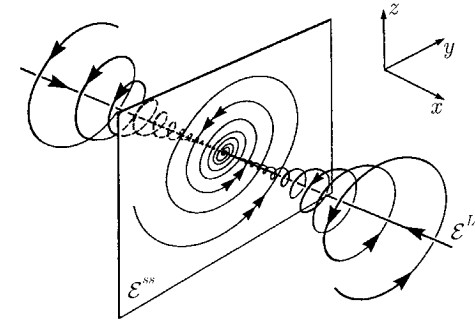


Рис. 2.2.9. Пример другого устойчивого узла в фазовом пространстве  $\mathbb{R}^3$ . Хотя точка  $O$  является устойчивым фокусом на плоскости  $\mathcal{E}^{ss}$ , все траектории вне этой плоскости приближаются к точке  $O$  вдоль одномерного ведущего подпространства  $\mathcal{E}^L$

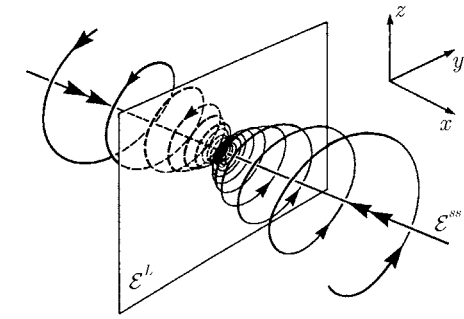


Рис. 2.2.10. Устойчивый фокус в фазовом пространстве  $\mathbb{R}^3$ . В отличие от рис. 2.2.9, все траектории вне одномерного подпространства  $\mathcal{E}^{ss}$  стремятся к точке  $O$  по касательной к двумерному ведущему подпространству  $\mathcal{E}^L$

7. Если все характеристические показатели лежат справа от мнимой оси (то есть открытой правой полуплоскости (ППП)), то при обращении времени  $t \rightarrow -t$  задача сводится к рассмотренным выше случаям. В данном случае все траектории стремятся к положению равновесия при  $t \rightarrow -\infty$ . Как и прежде, имеют место два вида положений равновесия: *неустойчивый узел*, если ближайший к мнимой оси харак-

теристический показатель является действительным; и *неустойчивый фокус*, когда ближайшие к мнимой оси характеристические показатели содержат комплексно-сопряженную пару. Соответствующий данному случаю фазовый портрет аналогичен показанным на рис. 2.2.8–2.2.10, но все стрелки направлены в противоположную сторону.

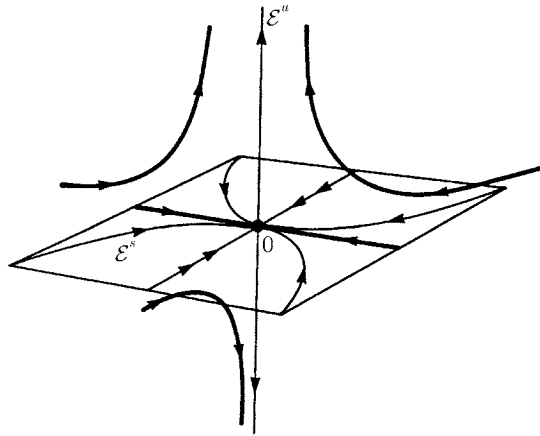


Рис. 2.2.11. Седло  $O$  с двумерным устойчивым подпространством  $\mathcal{E}^s$  и одномерным неустойчивым подпространством  $\mathcal{E}^u$

8. Если характеристические показатели существуют как слева, так и справа от мнимой оси, то положение равновесия является либо *седлом*, либо *седло-фокусом* (это название также дал Пуанкаре), см. рис. 2.2.11–2.2.14. Положим, что в системе (2.2.17)  $\lambda_1 > 0$ , а  $\lambda_s < 0$  ( $s = 2, 3$ ). Тогда положение равновесия данной системы — седло, см. рис. 2.2.11. Решение в общем виде также задается при помощи системы (2.2.17). Поскольку  $\lambda_1 > 0$ ,  $\lambda_2 < 0$ ,  $\lambda_3 < 0$  при  $t \rightarrow +\infty$  координаты  $y$  и  $z$  экспоненциально уменьшаются до нуля, тогда как координата  $x$  стремится к бесконечности. С другой стороны, координата  $x$  уменьшается до нуля при  $t \rightarrow -\infty$ . Следовательно, все траектории, полностью лежащие в *устойчивом подпространстве*  $\mathcal{E}^s$ :  $x = 0$ , стремятся к седлу  $O$  при  $t \rightarrow +\infty$ , тогда как все траектории, лежащие в *неустойчивом подпространстве*  $\mathcal{E}^u$  ( $y = 0, z = 0$ ), стремятся к седлу при  $t \rightarrow -\infty$ .

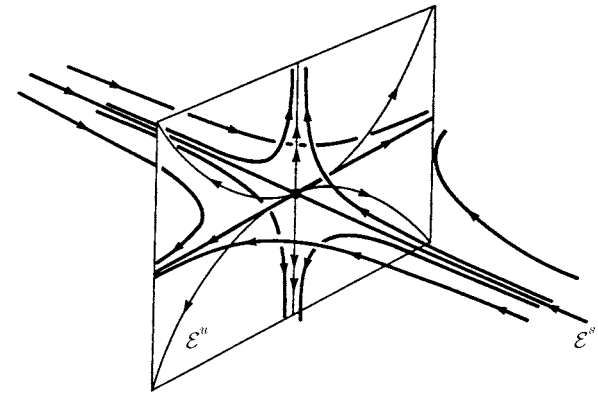


Рис. 2.2.12. Седло (1,2)

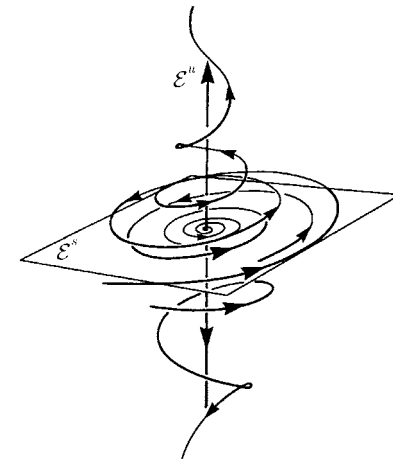


Рис. 2.2.13. Седло-фокус (2,1). Он имеет двумерное устойчивое подпространство  $\mathcal{E}^s$  и одномерное устойчивое подпространство  $\mathcal{E}^u$

Траектории вне  $\mathcal{E}^s \cup \mathcal{E}^u$  проходят вблизи седла, но минуют его. Траектории системы (2.2.19) вблизи седло-фокуса ведут себя аналогично. В данном случае  $\lambda_1 > 0$ , а  $\lambda_{2,3} = -\rho \pm i\omega$ , где  $\rho > 0$ . Единствен-

ное различие заключается в том, что для седла точка  $O$  на устойчивом подпространстве является узлом, а для седло-фокуса — устойчивым фокусом. Случай, когда  $\lambda_1 < 0$ ,  $\text{Re } \lambda_2 > 0$ ,  $\text{Re } \lambda_3 > 0$ , приводится к двум рассмотренным выше случаям при помощи замены переменной времени  $t \rightarrow -t$ , см. рис. 2.2.12 и 2.2.14.

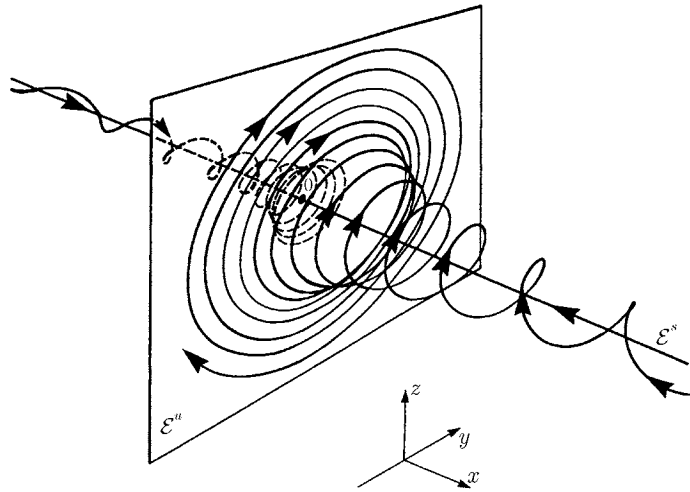


Рис. 2.2.14. Седло-фокус (1,2). Случай, обратный представленному на рис. 2.2.13

### 2.3. Многомерные линейные системы. Инвариантные подпространства

Рассмотрим систему

$$\dot{y} = Ay, \quad (2.3.1)$$

где  $y \in \mathbb{R}^n$ . Решение в общем виде задается выражением

$$y(t) = e^{At}y_0. \quad (2.3.2)$$

Напомним, что показатель  $e^B$  матрицы  $B$  определяется как сумма элементов матричного ряда

$$e^B = I + B + B^2/2 + \dots + B^k/k! + \dots,$$

здесь и далее через  $I$  обозначается единичная матрица. Таким образом, решение системы (2.3.1) в общем виде можно записать как

$$y(t) = (I + At + A^2t^2/2 + \dots + A^k t^k/k! + \dots)y_0. \quad (2.3.3)$$

Сходимость ряда (2.3.3) при любых значениях  $t$  очевидна, так как значение  $\|A^k t^k/k!\|$  не превышает значения  $\|A\|^k |t|^k/k!$ , которое очень быстро уменьшается при  $k \rightarrow \infty$ . Чтобы проверить то, что (2.3.3) является решением в общем виде, следует заметить, что, согласно данному выражению,

$$y(0) = y_0,$$

а

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= (A + A^2t + \dots + A^k t^{k-1}/(k-1)! + \dots)y_0 \\ &= A(I + At + A^2t^2/2 + \dots + A^{k-1} t^{k-1}/(k-1)! + \dots)y_0 = Ay(t). \end{aligned}$$

Рассмотрим уравнение (2.3.2) подробнее. Если все собственные значения матрицы  $A$  действительны и не равны между собой, то существует собственный базис, в котором матрица  $A$  приводится к диагональному виду, то есть

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \mathbf{0} \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ \mathbf{0} & & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

где во избежание путаницы была нарушена существующая система обозначений: был использован тот же символ  $A$  для обозначения исходной матрицы в новом базисе. В данном базисе

$$A^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & \mathbf{0} \\ & \lambda_2^k & \\ & & \ddots \\ \mathbf{0} & & & \lambda_n^k \end{pmatrix},$$

следовательно,

$$e^{At} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & \mathbf{0} \\ & e^{\lambda_2 t} & \\ & & \ddots \\ \mathbf{0} & & & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, если в данном базисе обозначить составляющие вектора  $y \in \mathbb{R}^n$  через  $(y_1, \dots, y_n)$ , то решение системы можно записать в виде

$$y_s(t) = e^{\lambda_s t} y_{s0}, \quad (s = 1, \dots, n). \quad (2.3.4)$$

Если все собственные значения (называемые также *характеристическими показателями*), как и прежде, не равны между собой, но некоторые из них являются комплексными, то существует базис, в котором матрица  $A$  приводится к блочно-диагональному виду:

$$\begin{pmatrix} A_1 & & & \mathbf{0} \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & A_m \end{pmatrix}, \quad (2.3.5)$$

где каждый блок  $A_j$  соответствует либо вещественному собственному значению, либо паре комплексно-сопряженных собственных значений (напомним, что если матрица  $A$  — вещественная, то комплексно-сопряженное значение  $\lambda_j^*$  любого собственного значения  $\lambda_j$  также является собственным значением). Если значение  $\lambda_j$  — вещественное, то соответствующий ему блок представляет собой матрицу размерности  $1 \times 1$ :

$$A_j = (\lambda_j). \quad (2.3.6)$$

Если  $\lambda = \rho + i\omega$  и  $\lambda^* = \rho - i\omega$  — пара комплексно-сопряженных собственных значений, то соответствующий блок представляет собой матрицу размерности  $2 \times 2$ :

$$A_j = \begin{pmatrix} \rho & -\omega \\ \omega & \rho \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{Re} \lambda & -\operatorname{Im} \lambda \\ \operatorname{Im} \lambda & \operatorname{Re} \lambda \end{pmatrix}. \quad (2.3.7)$$

В данном базисе

$$A^k = \begin{pmatrix} A_1^k & & & \mathbf{0} \\ & A_2^k & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & A_m^k \end{pmatrix}.$$

Кроме того, для комплексного значения  $\lambda$  имеем

$$A_j^k = \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(\lambda^k) & -\operatorname{Im}(\lambda^k) \\ \operatorname{Im}(\lambda^k) & \operatorname{Re}(\lambda^k) \end{pmatrix},$$

отсюда получаем

$$e^{At} = \begin{pmatrix} e^{A_1 t} & & & \mathbf{0} \\ & e^{A_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & e^{A_m t} \end{pmatrix},$$

где

$$e^{A_j t} = \begin{cases} e^{\lambda t} & \text{для } A_j = (\lambda) \\ \begin{pmatrix} \operatorname{Re} e^{\lambda t} & -\operatorname{Im} e^{\lambda t} \\ \operatorname{Im} e^{\lambda t} & \operatorname{Re} e^{\lambda t} \end{pmatrix} = e^{\rho t} \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & -\sin(\omega t) \\ \sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{pmatrix} & \\ \text{для } A_j = \begin{pmatrix} \rho & -\omega \\ \omega & \rho \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Таким образом, решение системы (2.3.2) в общем виде можно представить как

$$y_s(t) = e^{\lambda_s t} y_{s0} \quad (2.3.8)$$

для вещественных значений  $\lambda_s$ , и как

$$\begin{cases} y_s(t) = e^{\rho t} (y_{s0} \cos(\omega t) - y_{s+1,0} \sin(\omega t)) \\ y_{s+1}(t) = e^{\rho t} (y_{s0} \sin(\omega t) + y_{s+1,0} \cos(\omega t)) \end{cases} \quad (2.3.9)$$

$$(2.3.10)$$

для комплексных значений  $\lambda_s = \lambda_{s+1}^* = \rho + i\omega$ .

Если матрица  $A$  имеет какие-либо кратные собственные значения, то можно выполнить линейное преобразование, приводящее матрицу  $A$  в базисе Жордана к блочно-диагональному виду. Блоки, соответствующие простым собственным значениям, остаются такими же, что и в предыдущем случае, но для каждого собственного значения  $\lambda$  кратности  $k$  соответству-

ющий блок является матрицей размерности  $k \times k$  вида

$$\begin{pmatrix} \lambda & \delta_1 & & & \mathbf{0} \\ & \lambda & \delta_2 & & \\ & & \lambda & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots \\ \mathbf{0} & & & & \delta_{k-1} \\ & & & & \lambda \end{pmatrix}, \quad (2.3.11)$$

где  $\delta_i$  принимает значения 0 или 1. Для каждой пары комплексно-сопряженных собственных значений кратности  $k$  соответствующий блок представляет собой матрицу размерности  $2k \times 2k$  вида

$$\begin{pmatrix} \Lambda & \delta_1 I & & & \mathbf{0} \\ & \Lambda & \delta_2 I & & \\ & & \Lambda & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots \\ \mathbf{0} & & & & \delta_{k-1} I \\ & & & & \Lambda \end{pmatrix}, \quad (2.3.12)$$

где матрица  $\Lambda$  определяется формулой (2.3.7),  $I$  — единичная матрица размерности  $2 \times 2$ , а  $\delta_i$  принимает значения 0 или 1. В данном случае функцию  $y(t)$  также можно легко найти из выражения (2.3.3). Для координат  $y_s$ , соответствующих простым собственным значениям, формулы (2.3.8), (2.3.9) и (2.3.10) остаются неизменными.

Для координат  $y_{i+1}, \dots, y_{i+k}$ , соответствующих вещественным собственным значениям  $\lambda$  кратности  $k$  в случае полного блока Жордана (то есть если значения всех элементов  $\delta$  матрицы (2.3.11) равны 1) справедли-

вы формулы

$$\begin{aligned} y_{i+k}(t) &= e^{\lambda t} y_{i+k,0}, \\ y_{i+k-1}(t) &= e^{\lambda t} (y_{i+k-1,0} + t y_{i+k,0}), \\ &\vdots \\ y_{i+j}(t) &= e^{\lambda t} \sum_{s=j}^{s=k} \frac{y_{i+s,0} t^{s-j}}{(s-j)!}, \\ &\vdots \end{aligned} \quad (2.3.13)$$

или, что то же самое,

$$(y_{i+1}(t), \dots, y_{i+k}(t)) = e^{\lambda t} (y_{i+1,0}, \dots, y_{i+k,0}) e^{J_k t}, \quad (2.3.14)$$

где через  $J_k$  обозначается следующая матрица размерности  $k \times k$ :

$$\begin{pmatrix} 0 & & & & \mathbf{0} \\ 1 & 0 & & & \\ & 1 & 0 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots \\ \mathbf{0} & & & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

которая является транспонированной недиагональной частью матрицы (2.3.11).

Для координат  $y_{i+1}, \dots, y_{i+2k}$ , соответствующих паре комплексно-сопряженных собственных значений кратности  $k$  в случае полного блока Жордана, выполняются выражения

$$\begin{aligned} y_{i+2j-1}(t) &= e^{\rho t} \sum_{s=j}^{s=k} (y_{i+2s-1,0} \cos(\omega t) - y_{i+2s,0} \sin(\omega t)) t^{s-j} / (s-j)!, \\ y_{i+2j}(t) &= e^{\rho t} \sum_{s=j}^{s=k} (y_{i+2s-1,0} \sin(\omega t) + y_{i+2s,0} \cos(\omega t)) t^{s-j} / (s-j)! \end{aligned} \quad (2.3.15)$$

или, что то же самое,

$$\begin{pmatrix} y_{i+1}(t) & \cdots & y_{i+2k-1}(t) \\ y_{i+2}(t) & \cdots & y_{i+2k}(t) \end{pmatrix} = e^{\Lambda t} \begin{pmatrix} y_{i+1,0} & \cdots & y_{i+2k-1,0} \\ y_{i+2,0} & \cdots & y_{i+2k,0} \end{pmatrix} e^{J_k t}, \quad (2.3.16)$$

где  $\Lambda$  — матрица (2.3.7),  $J_k$  — то же, что в выражении (2.3.14).

Если значение  $\lambda$  — вещественное, а блок Жордана — неполный, то есть некоторые элементы  $\delta$  матрицы (2.3.11) обращаются в нуль, то блок, соответствующий  $\lambda$ , можно разделить на два подблока следующим образом:

$$\left( \begin{array}{cccc|cccc} \lambda & \delta_1 & & 0 & & & & \\ & \lambda & & \ddots & & & & \\ & & & \ddots & \delta_{j-1} & & & \mathbf{0} \\ 0 & & & & \lambda & & & \\ - & - & - & - & - & - & - & - \\ & & & & \lambda & \delta_{j+1} & & 0 \\ & & & \mathbf{0} & & \lambda & \ddots & \\ & & & & & & \ddots & \delta_k \\ & & & & & & & \lambda \\ & & & & & & 0 & \end{array} \right)$$

Для каждого подблока показатель находится отдельно. В случае неполного блока Жордана аналогичные вычисления выполняются для каждого комплексного собственного значения  $\lambda$  кратности  $k$ .

Теперь можно доказать следующую лемму, дающую стандартную оценку нормы экспоненциальной матрицы. Такая оценка будет часто использоваться в этой книге.

**Лемма 2.1.** *Для произвольно малой величины  $\varepsilon > 0$  в фазовом пространстве  $\mathbb{R}^n$  существует соответствующий базис, в котором решение  $y(t) = e^{At}y_0$  линейной системы*

$$\dot{y} = Ay$$

удовлетворяет следующим неравенствам:

$$\|y(t)\| \leq \|e^{At}\| \|y_0\| \leq e^{(\max \operatorname{Re} \lambda_i + \varepsilon)t} \|y_0\| \quad \text{при } t \geq 0; \quad (2.3.17)$$

$$\|y(t)\| \geq \|e^{-At}\|^{-1} \|y_0\| \geq e^{(\min \operatorname{Re} \lambda_i - \varepsilon)t} \|y_0\| \quad \text{при } t \geq 0; \quad (2.3.18)$$

$$\|y(t)\| \leq \|e^{At}\| \|y_0\| \leq e^{(\min \operatorname{Re} \lambda_i - \varepsilon)t} \|y_0\| \quad \text{при } t \leq 0; \quad (2.3.19)$$

$$\|y(t)\| \geq \|e^{-At}\|^{-1} \|y_0\| \geq e^{(\max \operatorname{Re} \lambda_i + \varepsilon)t} \|y_0\| \quad \text{при } t \leq 0, \quad (2.3.20)$$

где  $\lambda_i (i = 1, \dots, n)$  — характеристические показатели матрицы  $A$ , а норма  $\|\cdot\|$  вектора  $y \in \mathbb{R}^n$  обозначает евклидову норму  $\sqrt{y_1^2 + \dots + y_n^2}$ .

**Доказательство.** Доказательство аналогично для всех четырех неравенств, поэтому рассмотрим первое из них. Чтобы доказать справедливость неравенства (2.3.17) в случае, когда все характеристические показатели простые, рассмотрим такой базис, в котором выполняются равенства (2.3.8), (2.3.9) и (2.3.10), и, следовательно, неравенства (2.3.17) является верным.

В случае кратных характеристических показателей, после выбора базиса Жордана в формулах для определения  $y(t)$  (см. (2.3.13) и (2.3.15)) фигурируют степенные множители  $t^k$ , поэтому получаем следующую оценку нормы  $y(t)$ :

$$\|y(t)\| \leq e^{\max(\operatorname{Re} \lambda_i)t} \|y_0\| Q(|t|),$$

где  $Q$  — полином, степень которого меньше наибольшей кратности характеристических показателей. Поскольку для произвольно малой величины  $\varepsilon > 0$  существует такое значение  $C(\varepsilon)$ , что

$$Q(|t|) \leq C e^{\varepsilon|t|},$$

получаем следующую оценку:

$$\|y(t)\| \leq C e^{(\max \operatorname{Re} \lambda_i + \varepsilon)t} \|y_0\| \quad \text{для } t \geq 0.$$

Чтобы приравнять постоянную  $C$  к 1 следует заметить, что базис Жордана можно выбрать таким, чтобы ненулевые значения элементов  $\delta$  матриц (2.3.11) и (2.3.12) были равны произвольно малой величине  $\varepsilon$ . Для этого координаты

$$(y_{i+1}, \dots, y_{i+k}),$$

которые для вещественных собственных значений соответствуют блоку Жордана (2.3.11), необходимо заменить на координаты

$$(y_{i+1}/\varepsilon^{k-1}, y_{i+2}/\varepsilon^{k-2}, \dots, y_{i+k}).$$

Аналогично, для комплексных собственных значений (см. формулу (2.3.12)) следует произвести замену координат

$$(y_{i+1}, \dots, y_{i+2k})$$

на координаты

$$(y_{i+1}/\varepsilon^{k-1}, y_{i+2}/\varepsilon^{k-1}, y_{i+3}/\varepsilon^{k-2}, y_{i+4}/\varepsilon^{k-2}, \dots, y_{i+2k-1}, y_{i+2k}).$$

В данном базисе перед  $t^{s-j}$  (формулы (2.3.13) и (2.3.15)) появляется множитель  $\varepsilon^{s-j}$  или, что аналогично, перед  $J_k t$  (формулы (2.3.14) и (2.3.16)) появляется коэффициент  $\varepsilon$ . В результате получаем следующую оценку функции  $y(t)$ :

$$\|y(t)\| \leq e^{\max(\operatorname{Re} \lambda_i)t} \|y_0\| \|e^{\varepsilon J_k t}\|. \quad (2.3.21)$$

Поскольку  $\|J_k\| < 1$ , выполняется оценка

$$\begin{aligned} \|e^{\varepsilon J_k t}\| &\leq (1 + \varepsilon \|J_k\| t + \varepsilon^2 \|J_k\|^2 t^2 / 2 + \dots + \\ &+ \varepsilon^m \|J_k\|^m t^m / m! + \dots) = e^{\varepsilon \|J_k\| t} \leq e^{\varepsilon t}, \end{aligned}$$

откуда следует справедливость неравенства (2.3.17).

Из доказательства следует, что если показатели с максимальной действительной частью простые, то в неравенствах (2.3.17) и (2.3.20) можно положить  $\varepsilon = 0$ . Если показатели с минимальной действительной частью простые, то в неравенствах (2.3.18) и (2.3.19) можно положить  $\varepsilon = 0$ .

Заметим также, что любой произвольный базис изменяет неравенства (2.3.17)–(2.3.20) таким образом, что в их правой части может появиться дополнительный коэффициент, который, как правило, больше 1 в формулах (2.3.17) и (2.3.19) и меньше 1 в формулах (2.3.18) и (2.3.20). Действительно, переход от одного базиса к другому представляет собой просто линейную замену переменных

$$x = Py,$$

где  $P$  — невырожденная матрица. В новых координатах  $x$  получаем неравенства

$$\|x\| \leq \|P\| \|y\|, \quad \|y\| \leq \|P^{-1}\| \|x\|.$$

Таким образом, вместо (2.3.17) получаем следующее неравенство для  $x(t)$ :

$$\|x(t)\| \leq C e^{(\max \operatorname{Re} \lambda_i + \varepsilon)t} \|x_0\| \quad \text{при } t \geq 0, \quad (2.3.22)$$

где

$$C = \|P\| \|P^{-1}\| \geq 1. \quad (2.3.23)$$

В частном случае, когда все характеристические показатели  $\lambda_i$  лежат слева от мнимой оси, неравенство (2.3.17) принимает вид

$$\|y(t)\| \leq e^{-\lambda t} \|y_0\| \quad \text{при } t \geq 0, \quad (2.3.24)$$

где значение  $\lambda > 0$  таково, что  $\operatorname{Re} \lambda_i < -\lambda$  при всех значениях  $i$  (а если ближайшие к мнимой оси характеристические показатели простые, можно принять  $\lambda = \min |\operatorname{Re} \lambda_i|$ ). Таким образом, в данном случае каждая траектория линейной системы (2.3.1) экспоненциально стремится к точке  $O$  при  $t \rightarrow +\infty$ . Такое положение равновесия называется *экспоненциально асимптотически устойчивым*.

Изменим порядок характеристических показателей устойчивого положения равновесия таким образом, что  $\operatorname{Re} \lambda_1 \geq \operatorname{Re} \lambda_2 \geq \dots \geq \operatorname{Re} \lambda_n$ . Положим также, что первые  $m$  показателей имеют равные действительные части  $\operatorname{Re} \lambda_i = \operatorname{Re} \lambda_1$  ( $i = 1, \dots, m$ ) и  $\operatorname{Re} \lambda_i < \operatorname{Re} \lambda_1$  ( $i = m+1, \dots, n$ ). Обозначим через  $\mathcal{E}^L$  и  $\mathcal{E}^{ss}$   $m$ -мерное и  $(n-m)$ -мерное собственные подпространства матрицы  $A$ , соответствующие характеристическим показателям  $(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$  и  $\lambda_{m+1}, \dots, \lambda_n$ . Подпространство  $\mathcal{E}^L$  называют *ведущим инвариантным подпространством*, а  $\mathcal{E}^{ss}$  — *неведущим* или *сильно устойчивым инвариантным подпространством*.

Такие названия даны исходя из того, что при  $t \rightarrow +\infty$  все траектории, кроме лежащих в подпространстве  $\mathcal{E}^{ss}$ , стремятся к положению равновесия по касательной к подпространству  $\mathcal{E}^L$ . Кроме того, траектории, лежащие в  $\mathcal{E}^{ss}$  стремятся к точке  $O$  быстрее, чем  $e^{(\operatorname{Re} \lambda_{m+1} + \varepsilon)t}$ , тогда как скорость сходимости других траекторий не превышает  $e^{(\operatorname{Re} \lambda_1 - \varepsilon)t}$ , где постоянная  $\varepsilon > 0$  может быть произвольно мала.

Чтобы доказать справедливость этого утверждения заметим, что каждый вектор  $y \in \mathbb{R}^n$  можно единственным образом представить в виде  $y = u + v$ , где  $u \in \mathcal{E}^L$ , а  $v \in \mathcal{E}^{ss}$ . Система (2.3.1), записанная через координаты  $(u, v)$ , принимает вид

$$\begin{aligned} \dot{u} &= A_1 u, \\ \dot{v} &= A_2 v, \end{aligned}$$

где  $\operatorname{spectr} A_1 = \{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}$ , а  $\operatorname{spectr} A_2 = \{\lambda_{m+1}, \dots, \lambda_n\}$ . Решение в общем виде можно представить как

$$u(t) = e^{A_1 t} u_0, \quad v(t) = e^{A_2 t} v_0. \quad (2.3.25)$$

В соответствии с леммой 2.1 (см. неравенства (2.3.18), (2.3.17)) из выражений (2.3.25) следует, что для положительных значений  $t$

$$\begin{aligned}\|u(t)\| &\geq e^{(\operatorname{Re} \lambda_1 - \varepsilon)t} \|u_0\|, \\ \|v(t)\| &\leq e^{(\operatorname{Re} \lambda_{m+1} + \varepsilon)t} \|v_0\|,\end{aligned}$$

где при выборе соответствующих базисов в подпространствах  $\mathcal{E}^L$  и  $\mathcal{E}^{ss}$  величина  $\varepsilon$  может быть произвольно мала. Следовательно, получаем неравенство

$$\|v(t)\| \|u_0\|^\nu \leq \|v_0\| \|u(t)\|^\nu \quad (2.3.26)$$

где  $\nu > 1$ . Из неравенства очевидно, что если  $\|u_0\| \neq 0$ , любая траектория достигает точки  $O$  по касательной к ведущему подпространству  $\nu = 0$ .

Если  $m = 1$ , то есть в случае, когда характеристический показатель  $\lambda_1$  вещественный, а  $\operatorname{Re} \lambda_i < \lambda_1$  ( $i = 2, \dots, n$ ), ведущее подпространство есть прямая линия. Такое положение равновесия называется *устойчивым узлом* (см. рис. 2.2.8, 2.2.9).

Если  $m = 2$ , а  $\lambda_{1,2} = -\rho \pm i\omega$ , где  $\rho > 0$ ,  $\omega \neq 0$ , то соответствующее положение равновесия называют *устойчивым фокусом*. В данном случае ведущее подпространство двумерное, а все траектории, не принадлежащие  $\mathcal{E}^{ss}$ , имеют форму спиралей, закрученных вокруг точки  $O$ , см. рис. 2.2.10.

Неустойчивый случай, когда  $\operatorname{Re} \lambda_i > 0$  ( $i = 1, \dots, n$ ), приводится к рассмотренному выше путем обращения времени  $t \rightarrow -t$ . Следовательно, решение можно записать как

$$\|y(t)\| \leq e^{-\lambda|t|} \|y_0\|, \quad \text{при } t \leq 0, \quad (2.3.27)$$

где  $\lambda > 0$  — произвольная постоянная, удовлетворяющая неравенству  $\operatorname{Re} \lambda_i > \lambda$ . Согласно формуле (2.3.27) все траектории экспоненциально стремятся к точке  $O$  при  $t \rightarrow -\infty$ . Такие положения равновесия являются *экспоненциально вполне неустойчивыми*. Ведущее и неведущее подпространства в данном случае определяются аналогично устойчивым положениям равновесия (но при  $t \rightarrow -\infty$ ). Если ведущее подпространство — одномерное, то положение равновесия называется *неустойчивым узлом*. Если ведущее подпространство является двумерным, а пара комплексно-сопряженных показателей — ближайшей к мнимой оси, то такое положение равновесия называют *неустойчивым фокусом*.

Положим, что слева от мнимой оси лежит  $k$  характеристических показателей, а справа —  $(n - k)$ , то есть  $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$  ( $i = 1, \dots, k$ ), а  $\operatorname{Re} \lambda_j > 0$

( $j = k + 1, \dots, n$ ), где  $k \neq 0, n$ . Такое положение равновесия называется *положением равновесия седлового типа*.

Путем линейной невырожденной замены переменных система (2.3.1) приводится к виду

$$\begin{aligned}\dot{u} &= A^- u, \\ \dot{v} &= A^+ v\end{aligned} \quad (2.3.28)$$

где  $\operatorname{spectr} A^- = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$ , а  $\operatorname{spectr} A^+ = \{\lambda_{k+1}, \dots, \lambda_n\}$ ;  $u \in \mathbb{R}^k$ ,  $v \in \mathbb{R}^{n-k}$ . В общем виде решение записывается как

$$u(t) = e^{A^- t} u_0, \quad v(t) = e^{A^+ t} v_0. \quad (2.3.29)$$

В соответствие с леммой 2.1, для переменных  $u$  и  $v$  справедливы выражения, аналогичные формулам (2.3.24) и (2.3.27), соответственно, то есть любая траектория, принадлежащая *устойчивому инвариантному подпространству*  $\mathcal{E}^s$ :  $v = 0$ , экспоненциально стремится к точке  $O$  при  $t \rightarrow +\infty$ , а любая траектория из *неустойчивого инвариантного подпространства*  $\mathcal{E}^u$ :  $u = 0$  экспоненциально стремится к точке  $O$  при  $t \rightarrow -\infty$ ; соседние траектории проходят вблизи седла, но минуют его.

Таким образом, седло является устойчивым положением равновесия для системы на подпространстве  $\mathcal{E}^s$  и волне неустойчивым на подпространстве  $\mathcal{E}^u$ . Кроме того, *устойчивое и неустойчивое ведущее и неведущее подпространства*  $\mathcal{E}^{sL}$ ,  $\mathcal{E}^{uL}$ ,  $\mathcal{E}^{ss}$  и  $\mathcal{E}^{uu}$ , соответственно, можно определить в подпространствах  $\mathcal{E}^s$  и  $\mathcal{E}^u$ . Прямую сумму  $\mathcal{E}^{sE} = \mathcal{E}^s \oplus \mathcal{E}^{uL}$  будем называть *расширенным устойчивым инвариантным подпространством*, а  $\mathcal{E}^{uE} = \mathcal{E}^u \oplus \mathcal{E}^{sL}$  — *расширенным неустойчивым инвариантным подпространством*. Инвариантное подпространство  $\mathcal{E}^L = \mathcal{E}^{sE} \cap \mathcal{E}^{uE}$  называется *ведущим подпространством седлового типа*.

Если точка  $O$  — узел как в подпространстве  $\mathcal{E}^s$ , так и в подпространстве  $\mathcal{E}^u$ , такое положение равновесия называется *седлом*. Следовательно, размерность подпространств  $\mathcal{E}^{sL}$  и  $\mathcal{E}^{uL}$  равна 1.

В том случае, если точка  $O$  является фокусом, по крайней мере, на одном из двух подпространств  $\mathcal{E}^s$  и  $\mathcal{E}^u$ , ее называют *седло-фокусом*. В зависимости от размерности устойчивого и неустойчивого ведущих подпространств можно выделить три типа седло-фокусов:

- *седло-фокус* (2,1) — фокус на  $\mathcal{E}^s$  и узел на  $\mathcal{E}^u$ ;
- *седло-фокус* (1,2) — узел на  $\mathcal{E}^s$  и фокус на  $\mathcal{E}^u$ ;



- седло-фокус (2,2) — фокус и на  $\mathcal{E}^s$ , и на  $\mathcal{E}^u$ .

Фазовые портреты для двух типов трехмерных седел и седло-фокусов (2,1) и (1,2) приведены на рис. 2.2.11–2.2.14; четырехмерный седло-фокус схематически показан на рис. 2.3.1.

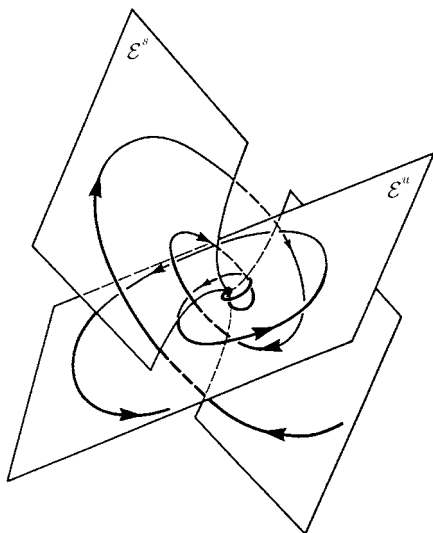


Рис. 2.3.1. Псевдопроекция седло-фокуса (2,2) в пространстве  $\mathbb{R}^3$ . И устойчивое, и неустойчивое инвариантные подпространства имеют размерность, равную двум

## 2.4. Поведение траекторий линейной системы вблизи положений равновесия седлового типа

Теоретические основы, рассмотренные в предыдущих разделах, достаточны для разрешения следующего важного вопроса. Положим, что линейная система имеет грубое положение равновесия  $O$  седлового типа. Рассмотрим точку  $M^+$  в устойчивом инвариантном подпространстве  $\mathcal{E}^s$  положения равновесия  $O$  и точку  $M^-$  в его неустойчивом подпространстве  $\mathcal{E}^u$ . Точка  $M^+$  окружена окрестностью  $V^+$ , а точка  $M^-$  — окрестностью  $V^-$ . Вопрос состоит в том, существуют ли в окрестности  $V^+$  какие-либо точки,

траектории которых достигают окрестности  $V^-$ . Каким образом упорядочены множества таких точек, и какими свойствами обладает отображение, определяемое траекториями, соединяющими  $V^+$  и  $V^-$ ?

Для линеаризованной системы данная задача является чисто геометрической. Однако заметим, что такая постановка вопроса практически аналогична задаче о поведении траекторий вблизи положений равновесия седлового типа в хаотических системах.

В первую очередь рассмотрим трехмерные системы. Пусть точка  $O$  представляет собой седло, то есть оба ее ведущих показателя вещественны. Чтобы конкретизировать задачу допустим, что устойчивое подпространство является двумерным, а неустойчивое — одномерным. В таком случае система принимает вид

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -\lambda_1 x, \\ \dot{u} &= -\lambda_2 u, \\ \dot{y} &= \gamma y,\end{aligned}$$

где  $0 < \lambda_1 < \lambda_2$ ,  $\gamma > 0$ . Неустойчивое подпространство  $\mathcal{E}^u$  совпадает с осью  $y$ , а устойчивое  $\mathcal{E}^s$  представляет собой плоскость  $xoy$ . Ось  $u$  является неведущим подпространством  $\mathcal{E}^{ss}$ , а ось  $x$  — ведущим подпространством  $\mathcal{E}^{sL}$ . Расширенное неустойчивое подпространство  $\mathcal{E}^{uE}$  представляет собой плоскость  $xoy$ , а расширенное устойчивое подпространство  $\mathcal{E}^{sE}$  — все пространство  $\mathbb{R}^3$ .

Решение системы в общем виде можно записать как

$$\begin{aligned}x(t) &= e^{-\lambda_1 t} x_0, \\ u(t) &= e^{-\lambda_2 t} u_0, \\ y(t) &= e^{\gamma t} y_0.\end{aligned}$$

В подпространстве  $\mathcal{E}^s$  рассмотрим точку  $M^+(x^+, u^+, y = 0)$ , не лежащую в  $\mathcal{E}^{ss}$ , то есть  $x^+ \neq 0$ . Без потери общности можно положить, что  $x^+ > 0$ . При малом значении  $\varepsilon > 0$  в окрестности точки  $M^+$  строим маленький прямоугольник  $\Pi^+ = \{x = x^+, |u - u^+| < \varepsilon, |y| < \varepsilon\}$ . Он лежит в системе координат  $(uoy)$ . При пересечении прямой  $y = 0$ , принадлежащей устойчивому подпространству, с прямоугольником  $\Pi^+$  последний делится на два подэлемента. Из каждой точки элемента, для которого  $y > 0$  (заштрихованная область на рис. 2.4.1), проводим траектории.

Рассмотрим окрестность  $U_\delta: \{|x| \leq \delta, |u| \leq \delta, |y| \leq \delta\}$  седла для некоторого значения  $\delta > 0$ . Беря начало в произвольной точке  $M(x = x^+$

$+, u, y > 0) \in \Pi^+$ , траектория покидает окрестность  $U_\delta$  при  $t \rightarrow +\infty$  и пересекает  $\Pi^-: \{y = \delta\}$  в точке  $\overline{M}(\overline{x}, \overline{u}, y = \delta)$ , координаты которой задаются следующими формулами:

$$\overline{x} = e^{-\lambda_1 t} x^+, \quad \overline{u} = e^{-\lambda_2 t} u, \quad (2.4.1)$$

$$\delta = e^{\gamma t} y. \quad (2.4.2)$$

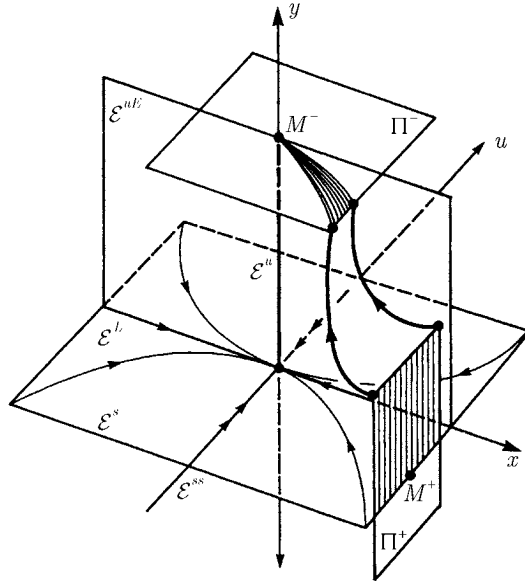


Рис. 2.4.1. Траектории вблизи седла. Отображение прямоугольника  $\Pi^+$  на прямоугольник  $\Pi^-$ , касающийся расширенного неустойчивого подпространства  $\mathcal{E}^{uE}$ , является криволинейным треугольником. Линия пересечения устойчивого подпространства  $\mathcal{E}^s$  с прямоугольником  $\Pi^+$  отображается в точку  $M^-$

Решая уравнение (2.4.2), получаем следующую формулу для определения времени перехода от  $\Pi^+$  до  $\Pi^-$ :

$$t = \frac{1}{\gamma} \ln \frac{\delta}{y}.$$

Подставляя последнее выражение в (2.4.1), находим координаты точки  $M$ , выраженные через координаты  $\overline{M}$ ,

$$\begin{aligned} \overline{x} &= x^+ \left( \frac{y}{\delta} \right)^\nu, \\ \overline{u} &= u \left( \frac{y}{\delta} \right)^{\alpha\nu}, \end{aligned} \quad (2.4.3)$$

где  $\nu = \lambda_1/\gamma$ ,  $\alpha = \lambda_2/\lambda_1 > 1$ . Из данной формулы следует, что отображение  $M \mapsto \overline{M}$  является сжимающим относительно неведущей координаты  $u$ , при условии, что величина  $y$  достаточно мала. Кроме того, при  $y \rightarrow +0$  (то есть, если точка  $M$  стремится к  $\mathcal{E}$ ) сжатие становится бесконечно сильным.

Отображение (2.4.3) по траекториям системы переводит верхнюю часть прямоугольника  $\Pi^+$  в криволинейный клин на  $\Pi^-$ :

$$C_2 \overline{x}^\alpha \leq \overline{u} \leq C_1 \overline{x}^\alpha, \quad C_{1,2} = (u^\pm \pm \varepsilon)/(x^\pm)^\alpha. \quad (2.4.4)$$

Клин прилегает к точке  $M^-(\overline{x} = 0, \overline{u} = 0, \overline{y} = \delta) = \Pi^- \cap \mathcal{E}^u$ . Поскольку  $\alpha > 1$  и  $C_{1,2} \neq \infty$  (при  $x^\pm \neq 0$ ) клин касается расширенного неустойчивого подпространства  $\mathcal{E}^{uE}: \overline{u} = 0$  в точке  $M^-$ , как показано на рис. 2.4.1.

Если подпространство  $\mathcal{E}^s$  — одномерное, а  $\mathcal{E}^u$  — двумерным, задача сводится к рассмотренному выше случаю путем обращения времени. Следовательно, если взять точки  $M^+ \in \mathcal{E}^s$  и  $M^- \in \mathcal{E}^u \setminus \mathcal{E}^{uu}$  и построить два взаимно трансверсальные прямоугольника  $\Pi^+$  и  $\Pi^-$ , то множество точек на  $\Pi^+$ , траектории которых достигают  $\Pi^-$ , так же, как в формуле (2.4.4), имеет форму криволинейного клина, а его образ на  $\Pi^-$  является одним из двух элементов области  $\Pi^- \setminus \mathcal{E}^u$ , как показано на рис. 2.4.2.

Если точка  $O$  — седло-фокус (2,1) (см. рис. 2.4.3), то система имеет вид:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\rho x - \omega u, \\ \dot{u} &= \omega x - \rho u, \\ \dot{y} &= \gamma y, \end{aligned} \quad (2.4.5)$$

где  $\rho > 0$ ,  $\omega > 0$ ,  $\gamma > 0$ . В таком случае решение в общем виде можно записать как

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-\rho t} (x_0 \cos(\omega t) - u_0 \sin(\omega t)), \\ u(t) &= e^{-\rho t} (x_0 \sin(\omega t) + u_0 \cos(\omega t)), \\ y(t) &= e^{\gamma t} y_0. \end{aligned} \quad (2.4.6)$$

<sup>2</sup>Замечание. Следует заметить, что приведенные ниже формулы получены для случая, когда сечение прямоугольника  $\Pi^+$  располагается вдоль оси  $x$ , а не трансверсально ей.

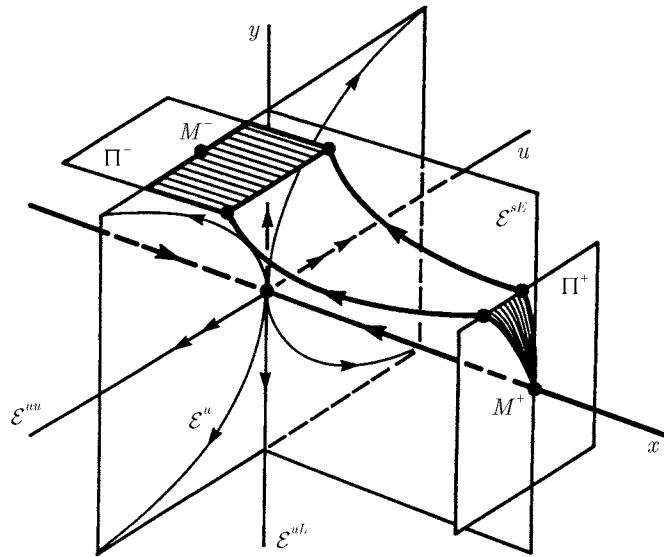


Рис. 2.4.2. Поведение траекторий вблизи седла. На рисунке приведен случай, обратный показанному на рис. 2.4.1

Возьмем на  $\mathcal{E}^s \setminus O$  произвольную точку  $M^+(x^+, u^+, y = 0)$ . Всегда можно положить, что  $u^+ = 0$ , так как поворот системы координат не изменяет формулы (2.4.5) и (2.4.6). Вокруг точки  $M^+$  строим прямоугольник  $\Pi^+ = \{u = 0, |x - x^+| < \varepsilon, |y| < \varepsilon\}$ . Так как  $\dot{u}$  не обращается в нуль в точке  $M^+$ , то в силу непрерывности она не обращается в нуль и в малой окрестности точки  $M^+$ . Поэтому, траектории, выходящие из точек  $\Pi^+$ , пересекают прямоугольники  $\Pi^+$  трансверсально.

Траектории, выходящие из  $\Pi^+ \cap \{y > 0\}$ , покидают окрестность седло-фокуса и пересекают плоскость  $\Pi^-: y = \delta$ . В данном случае отображение из  $\Pi^+ \cap \{y > 0\}$  в  $\Pi^-$  можно представить при помощи следующих формул:

$$\begin{aligned}\bar{x} &= x e^{-\rho t} \cos(\omega t), \\ \bar{u} &= x e^{-\rho t} \sin(\omega t), \\ \delta &= y e^{\gamma t},\end{aligned}$$

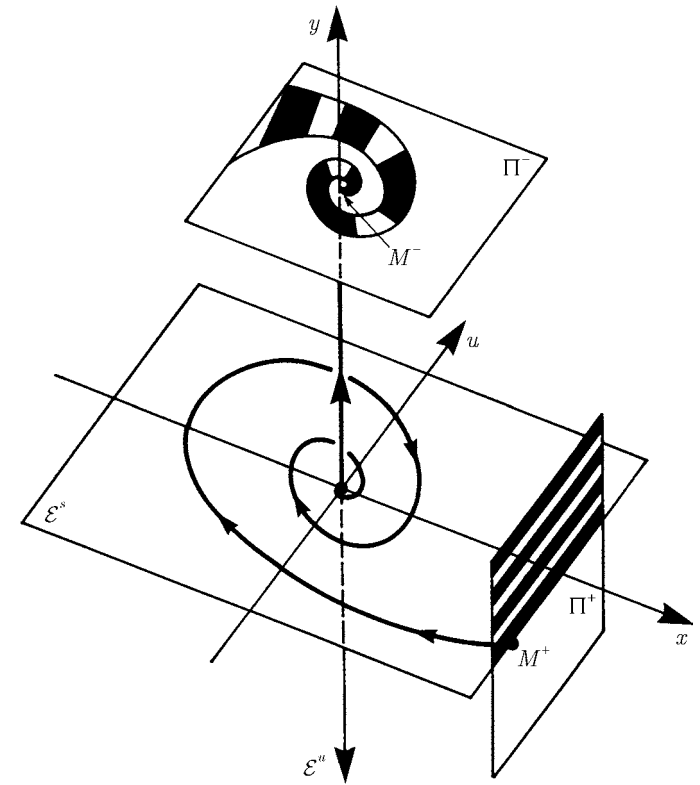


Рис. 2.4.3. Отображение вблизи седло-фокуса (2,1). Полоски на  $\Pi^+$  отображаются по траекториям на полосы, лежащие внутри двух спиралей на  $\Pi^-$ , закрученных вокруг точки  $M^-$ , которую можно рассматривать как образ линии пересечения  $\mathcal{E}^s$  и  $\Pi^+$ <sup>2</sup>

или как

$$\begin{aligned}\bar{x} &= x \left(\frac{y}{\delta}\right)^\nu \cos\left(\frac{\omega}{\gamma} \ln \frac{y}{\delta}\right), \\ \bar{u} &= -x \left(\frac{y}{\delta}\right)^\nu \sin\left(\frac{\omega}{\gamma} \ln \frac{y}{\delta}\right),\end{aligned}$$

где  $\nu = \rho/\gamma$ . При переходе на  $\Pi^-$  к полярным координатам  $\bar{x} = \bar{r} \cos(\bar{\varphi})$  и

$\bar{u} = \bar{r} \sin(\bar{\varphi})$  отображение принимает вид

$$\bar{r} = |x| \left( \frac{y}{\delta} \right)^\nu,$$

$$\bar{\varphi} = -\frac{\omega}{\gamma} \ln \left( \frac{y}{\delta} \right) + \varphi_0,$$

где

$$\varphi_0 = \begin{cases} 0, & \text{если } x^+ > 0 \\ \pi, & \text{если } x^+ < 0. \end{cases}$$

Прямоугольник  $\Pi^+$  ограничен отрезками прямых  $x = x^+ + \varepsilon$  и  $x = x^+ - \varepsilon$ . Следовательно, образ прямоугольника  $\Pi^+$  на прямоугольнике  $\Pi^-$  ограничивается двумя закрученными вокруг точки  $M^- = \Pi^- \cap \mathcal{E}^u$  логарифмическими спиралями (рис. 2.4.3), задаваемыми неравенством

$$(|x^+| - \varepsilon) e^{\rho(\varphi_0 - \bar{\varphi})/\omega} \leq \bar{r} \leq (|x^+| + \varepsilon) e^{\rho(\varphi_0 - \bar{\varphi})/\omega}.$$

Полученный результат можно легко преобразовать и использовать для случая седло-фокуса (1,2) в обратном времени.

Рассмотрим седло-фокус (2,2). Система имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\rho_1 x_1 - \omega_1 x_2, \\ \dot{x}_2 &= -\rho_1 x_2 + \omega_1 x_1, \\ \dot{y}_1 &= \rho_2 y_1 - \omega_2 y_2, \\ \dot{y}_2 &= \rho_2 y_2 + \omega_2 y_1 \end{aligned}$$

где  $\rho_1 > 0$ ,  $\omega_1 > 0$ ,  $\rho_2 > 0$ ,  $\omega_2 > 0$ . Решение системы в общем виде можно представить как

$$\begin{aligned} x_1 &= e^{-\rho_1 t} (x_{10} \cos(\omega_1 t) - x_{20} \sin(\omega_1 t)), \\ x_2 &= e^{-\rho_1 t} (x_{10} \sin(\omega_1 t) + x_{20} \cos(\omega_1 t)), \\ y_1 &= e^{\rho_2 t} (y_{10} \cos(\omega_2 t) - y_{20} \sin(\omega_2 t)), \\ y_2 &= e^{\rho_2 t} (y_{10} \sin(\omega_2 t) + y_{20} \cos(\omega_2 t)). \end{aligned} \quad (2.4.7)$$

Отображение  $T$  из  $\Pi^+ = \{x_2 = 0, |x_1 - x_1^+| < \varepsilon, |y_1| < \varepsilon, |y_2| < \varepsilon\}$  в  $\Pi^- = \{\bar{y}_2 = 0, |\bar{y}_1 - y_1^-| < \varepsilon, |\bar{x}_1| < \varepsilon, |\bar{x}_2| < \varepsilon\}$  вдоль траекторий системы

задается при помощи формул

$$\bar{x}_1 = x_1 e^{-\rho_1 t} \cos(\omega_1 t), \quad (2.4.8)$$

$$\bar{x}_2 = x_1 e^{-\rho_1 t} \sin(\omega_1 t),$$

$$y_1 = \bar{y}_1 e^{-\rho_2 t} \cos(\omega_2 t), \quad (2.4.9)$$

$$y_2 = -\bar{y}_1 e^{-\rho_2 t} \sin(\omega_2 t).$$

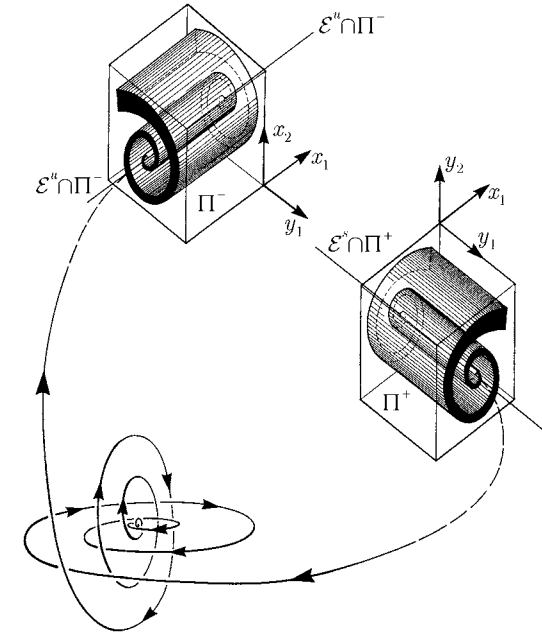


Рис. 2.4.4. Отображение вблизи седло-фокуса (2,2). См. комментарии в тексте

Для нахождения области  $D$  удобнее непосредственно использовать выражения (2.4.8) и (2.4.9), нежели выражать время перехода  $t$  через  $(y_1, y_2)$ . Если выбрать произвольные значения  $x_1$  и  $\bar{y}_1$ , удовлетворяющие неравенствам  $|x_1 - x_1^+| < \varepsilon$  и  $|\bar{y}_1 - y_1^-| < \varepsilon$ , соответственно, и достаточно большое значение  $t$  в формулах (2.4.8) и (2.4.9), то можно получить такие величины  $\bar{x}_1, \bar{x}_2, y_1$  и  $y_2$ , при которых траектория, выходящая из точ-

ки  $M = (x_1, 0, y_2, y_2)$  прямоугольника  $\Pi^+$ , пересекает  $\Pi^-$  в точке  $\overline{M} = (\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{y}_1, 0)$ . Область  $D$  содержит все точки  $M$ , координаты  $x$  которых лежат в интервале  $|x_1 - x_1^+| < \varepsilon$ , а координаты  $y_{1,2}$  определяются по формулам (2.4.9) при соответствующих значениях  $\overline{y}_1$  и  $t$ .

Из уравнений (2.4.9) следует, что при изменении  $t$  и фиксированных  $x_1$  и  $\overline{y}_1$  точка  $(y_1, y_2)$  описывает логарифмическую спираль. Следовательно, множество  $D$  имеет форму рулета, вытянутого в направлении  $x_1$  и закрученного в системе координат  $(y_1, y_2)$ . Образ  $D$  в  $\Pi^-$  имеет аналогичный вид, см. рис. 2.4.4.

Многомерную систему вблизи седла можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A^- x, & \dot{y} &= A^+ y, \\ \dot{u} &= B^- u, & \dot{v} &= B^+ v, \end{aligned}$$

где  $x$  и  $y$  — ведущие переменные, а  $u$  и  $v$  — неведущие. Спектр матрицы  $A^-$  лежит в комплексной плоскости на прямой  $\operatorname{Re} z = -\lambda < 0$ , а спектр матрицы  $A^+$  — на прямой  $\operatorname{Re} z = \gamma > 0$ . Действительные части собственных значений матрицы  $B^-$  строго меньше некоторого значения  $-\hat{\lambda} < -\lambda$ , тогда как матрица  $B^+$  имеет собственные значения, действительные части которых строго больше  $\hat{\gamma} > \gamma$ .

Таким образом,  $\mathcal{E}^s$  — это подпространство  $(y = 0, v = 0)$ ;

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^u &: (x = 0, u = 0); \\ \mathcal{E}^{ss} &: (x = 0, y = 0, v = 0); \\ \mathcal{E}^{sL} &: (u = 0, y = 0, v = 0); \\ \mathcal{E}^{uu} &: (x = 0, u = 0, y = 0); \\ \mathcal{E}^{uL} &: (x = 0, u = 0, v = 0); \\ \mathcal{E}^{sE} &: (v = 0); \\ \mathcal{E}^{uE} &: (u = 0); \\ \mathcal{E}^L &: (u = 0, v = 0). \end{aligned}$$

Выберем некоторые точки  $M^+(x = x^+, u = u^+, y = 0, v = 0) \in \mathcal{E}^s \setminus \mathcal{E}^{ss}$  и  $M^-(x = 0, u = 0, y = y^-, v = v^-) \in \mathcal{E}^u \setminus \mathcal{E}^{uu}$ ,  $\|x^+\| \neq 0$ ,  $\|y^-\| \neq 0$ . Отображение из  $\varepsilon$ -окрестности точки  $M^+$  в  $\varepsilon$ -окрестность точки  $M^-$  по

траекториям системы задается выражениями

$$\overline{x} = e^{A^- t} x, \quad \overline{y} = e^{A^+ t} y, \quad (2.4.10)$$

$$\overline{u} = e^{B^- t} u, \quad \overline{v} = e^{B^+ t} v, \quad (2.4.11)$$

где  $t$  — время перехода.

Поскольку уравнение (2.4.10) для ведущих координат не зависит от уравнения (2.4.11) для неведущих координат, действие отображения в ведущих координатах аналогично рассмотренным выше примерам. В соответствии с леммой 2.1 из формул (2.4.10) следует, что

$$\|y\| = \|e^{-A^+ t} \overline{y}\| \geq e^{-(\gamma + \dots)t} (\|y^-\| - \dots),$$

откуда

$$t \geq \frac{1}{\gamma + \dots} \ln \frac{(\|y^-\| - \dots)}{\|y\|}.$$

Заметим, что при  $y \rightarrow 0$  время перехода  $t$  растет до бесконечности пропорционально  $\ln \|y\|$  (когда размеры обеих окрестностей фиксированы). Кроме того, в соответствии с леммой 2.1 выполняются следующие неравенства:

$$\begin{aligned} \|\overline{u}\| &\leq \|e^{B^+ t}\| \|u\| \leq e^{-\hat{\lambda} t} \|u\|, \\ \|v\| &\leq \|e^{-B^- t}\| \|\overline{v}\| \leq e^{-\hat{\gamma} t} \|\overline{v}\|, \end{aligned}$$

согласно которым отображение является сильно сжимающим в неведущих устойчивых направлениях и сильно растягивающим в неведущих неустойчивых направлениях, при условии, что величина  $\|y\|$  достаточно мала. В сущности, из формул (2.4.10) и (2.4.11) следует, что

$$\begin{aligned} \|\overline{u}\| &\leq C_1 \|x^+\|^{\alpha_1}, \quad C_1 = (\|u^+\| + \varepsilon) / (\|x^+\| - \varepsilon)^{\alpha_1}, \quad \alpha_1 = \hat{\lambda} / \lambda > 1, \\ \|v\| &\leq C_2 \|y^-\|^{\alpha_2}, \quad C_2 = (\|v^-\| + \varepsilon) / (\|y^-\| - \varepsilon)^{\alpha_2}, \quad \alpha_2 = \hat{\gamma} / \gamma > 1. \end{aligned}$$

Поскольку  $\|x^+\| \neq 0$  и  $\|y^-\| \neq 0$ ,  $C_{1,2} \neq \infty$ , область определения отображения  $(x, y, u, v) \mapsto (\overline{x}, \overline{y}, \overline{u}, \overline{v})$  расположена внутри клина, касающегося расширенного устойчивого подпространства  $\mathcal{E}^{sE}$  в точке  $M^+$ , а область его значений лежит внутри клина, касающегося расширенного неустойчивого подпространства  $\mathcal{E}^{uE}$  в точке  $M^-$ . На рис. 2.4.5–2.4.8 показано действие отображения для четырехмерных седел и седло-фокусов (2,1).

### 2.5. Топологическая классификация грубых положений равновесия

Различие между линеаризованной системой

$$\dot{y} = Ay \tag{2.5.1}$$

и исходной нелинейной системой

$$\dot{y} = Ay + g(y) \tag{2.5.2}$$

состоит в том, что интегрирование последней — задача, по сути, невыполнимая. В связи с этим возникает естественный вопрос, который был впервые сформулирован Пуанкаре и Ляпуновым: «При каких условиях траектории системы (2.5.2) вблизи положения равновесия ведут себя аналогично траекториям линеаризованной системы (2.5.1)?»

Ответ, по-видимому, зависит от того, что подразумевается под «аналогичным поведением». Следует учесть, что классическое понимание данного вопроса значительно отличается от современной точки зрения.

В современной терминологии поведение двух систем называется аналогичным, если системы *топологически эквивалентны*.

**Определение 2.2.** Две  $n$ -мерные системы

$$\dot{y} = Y_1(y) \quad \text{и} \quad \dot{y} = Y_2(y),$$

определенные в областях  $D_1$  и  $D_2$ , соответственно, топологически эквивалентны в подобластях  $U_1 \subseteq D_1$  и  $U_2 \subseteq D_2$ , если существует гомеоморфизм

$$\eta: U_1 \rightarrow U_2,$$

под действием которого при сохранении ориентации (направления движения) траектория (полутраектория, отрезок траектории) первой системы отображается в траекторию (полутраекторию, отрезок траектории) второй системы.

Подчеркнем также то, что вопрос об эквивалентности исходной нелинейной системы ее линеаризации в положении равновесия не имеет смысла, если на мнимой оси существует, по крайней мере, один характеристический показатель. То есть, системы не будут топологически эквивалентными, если

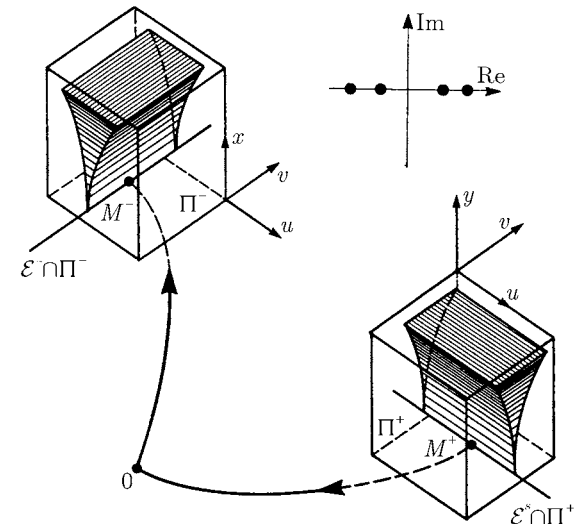


Рис. 2.5.1. Отображение вблизи седла в пространстве  $\mathbb{R}^4$ . Точка  $O$  имеет два собственных значения с положительными действительными частями и два — с отрицательными, то есть седло имеет двумерное устойчивое и двумерное неустойчивое подпространства

положение равновесия негрубое. Этот факт иллюстрируется для систем на плоскости на двух приведенных ниже примерах.

В первом случае положение равновесия имеет пару чисто мнимых показателей  $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$ ,  $\omega > 0$ . Рассмотрим нелинейную систему

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\omega y + g_1(x, y), \\ \dot{y} &= \omega x + g_2(x, y), \end{aligned} \tag{2.5.3}$$

где предполагается, что функции  $g_1$  и  $g_2$ , а также их первые производные обращаются в нуль в начале координат. Решение соответствующей линеаризованной системы в общем виде можно представить как

$$\begin{aligned} x &= x_0 \cos(\omega t) - y_0 \sin(\omega t), \\ y &= y_0 \cos(\omega t) + x_0 \sin(\omega t). \end{aligned}$$

Здесь фазовые траектории являются замкнутыми кривыми (концентриче-

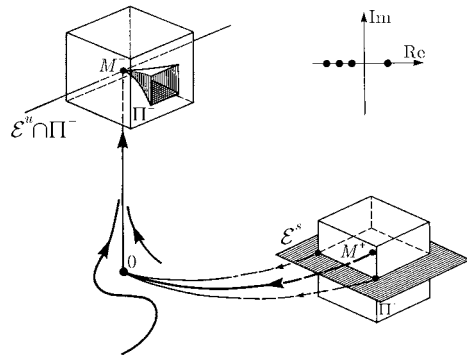


Рис. 2.5.2. Отображение вблизи седла в пространстве  $\mathbb{R}^4$ . Точка  $O$  — седло, имеющее трехмерное устойчивое подпространство  $E^s$  и одномерное неустойчивое подпространство  $E^u$

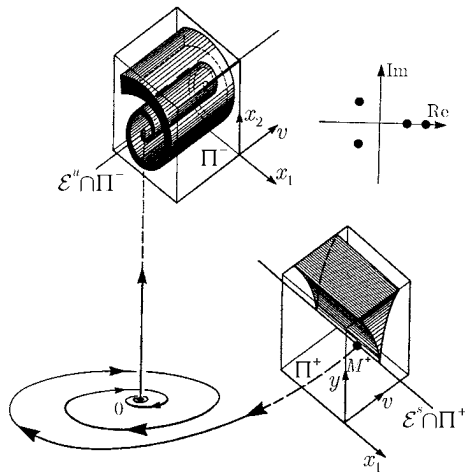


Рис. 2.5.3. Отображение вдоль траекторий, минуя седло-фокус (2,1). Отличие между отображениями состоит в размерности устойчивого и неустойчивого подпространств. Обратите внимание на расположение собственных значений

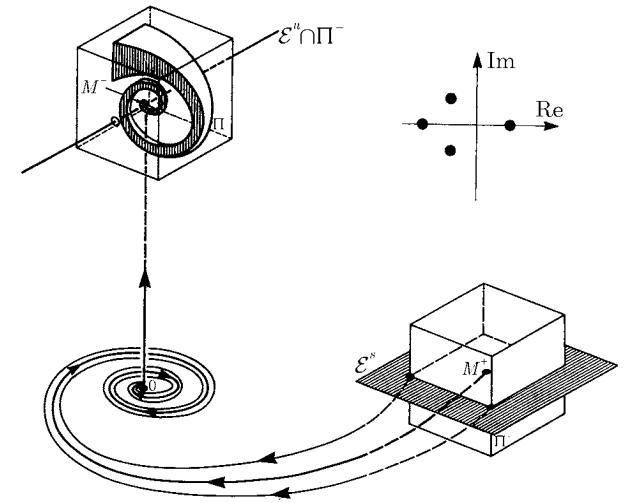


Рис. 2.5.4. Отображение вдоль траекторий, минуя седло-фокус (2,1). Отличие между отображениями состоит в размерности устойчивого и неустойчивого подпространств. Обратите внимание на расположение собственных значений

скими окружностями), в центре которых лежит начало координат (рис. 2.5.1). Такое положение равновесия называется *центром*.

Фазовый портрет нелинейной системы в общем случае значительно отличается от рассмотренного выше. Например, если положить, что  $g_1 = -x(x^2 + y^2)$ , а  $g_2 = -y(x^2 + y^2)$ , то решение уравнения (2.5.3) легко находится в полярных координатах:

$$r^2 = \frac{1}{2t + r_0^{-2}}, \quad \varphi = \omega t + \varphi_0.$$

В данном случае все траектории имеют форму спиралей, закрученных вокруг начала координат, как показано на рис. 2.5.2. Очевидно то, что в любых малых окрестностях обоих положений равновесия не существует гомеоморфизма, при помощи которого траектории такой системы отображаются в траектории линеаризованной системы (в связи с тем, что под действием гомеоморфизма замкнутые кривые отображаются в замкнутые кривые). Таким образом, данная система не является топологически эквивалентной ее линеаризации.

Во втором случае в положении равновесия один показатель  $\lambda_1$  равен нулю, а второй  $\lambda_2 = -\lambda < 0$ . Данную систему можно записать в виде

$$\begin{aligned} \dot{x} &= g_1(x, y), \\ \dot{y} &= -\lambda y + g_2(x, y), \end{aligned} \quad (2.5.4)$$

где функции  $g_1$  и  $g_2$ , а также их первые производные обращаются в нуль в начале координат. Решение линеаризованной системы имеет вид

$$x = x_0, \quad y = e^{-\lambda t} y_0.$$

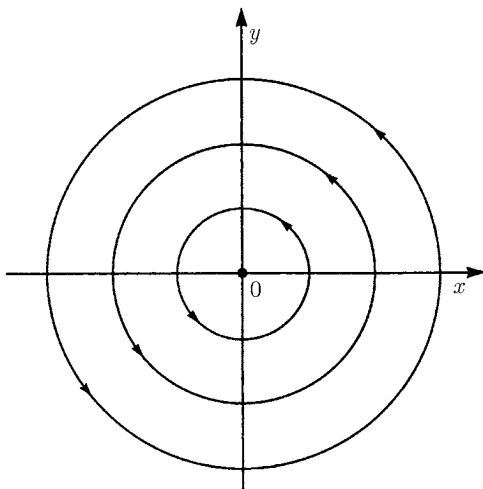


Рис. 2.5.5. Центр. В данном случае каждая траектория является концентрической окружностью, направленной против часовой стрелки

Фазовый портрет приводится на рис. 2.5.3. Ось  $x$  целиком состоит из положений равновесия линеаризованной системы, каждое из которых притягивает только пару траекторий. Очевидно, что нелинейная система может содержать континуум положений равновесия только при выборе строго определенных значений функций  $g_1$  и  $g_2$ , следовательно, наличие топологической эквивалентности между исходной и линеаризованной системами в данном случае маловероятно.

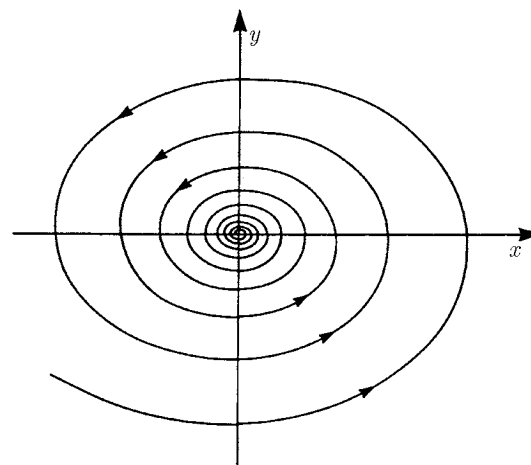


Рис. 2.5.6. Нелинейности вызывают изменение поведения траекторий вблизи центра. В данном случае траектории являются спиралями, закрученными вокруг точки  $O$

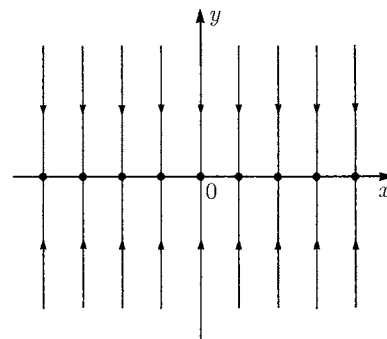


Рис. 2.5.7. Каждая точка на оси  $x$  является положением равновесия, притягивающим пару траекторий

На рис. 2.5.4 показан фазовый портрет в случае функций  $g_1 = x^2$ ,  $g_2 = 0$ . Из рисунков видно, что два локальных фазовых портрета не имеют ничего общего. Состояние равновесия, представленное на рис. 2.5.4, называется *седло-узлом*.



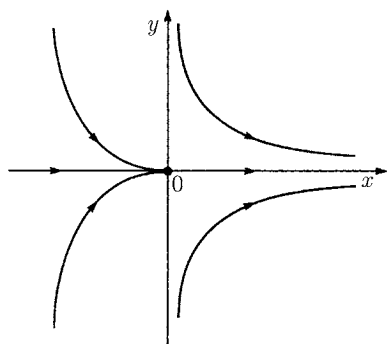


Рис. 2.5.8. Негрубая точка типа седло-узел. Точка  $O$  является устойчивой в области «узел» ( $x < 0$ ), но неустойчивой в области «седло» ( $x > 0$ )

Задача топологической классификации *грубых* положений равновесия находит решение в следующей теореме:

**Теорема 2.1 (Гробман–Хартман).** Пусть точка  $O$  есть грубое положение равновесия. Тогда, существуют ее окрестности  $U_1$  и  $U_2$ , в которых исходная и линеаризованная системы топологически эквивалентны.

Заметим, что положение равновесия нелинейной системы (2.5.2) в таком случае называют *локально топологически эквивалентным* положению равновесия ее линейной части (2.5.1).

В продолжение рассмотрения данной проблемы рассмотрим вопрос о топологической эквивалентности линейных систем. Определим топологический тип грубого положения равновесия как  $(k, n - k)$ , где  $k$  — количество характеристических показателей, лежащих слева от мнимой оси, а  $(n - k)$  — справа от нее.

**Теорема 2.2.** Линейные системы с положениями равновесия одного типа топологически эквивалентны.

Доказательство этой теоремы конструктивно в том смысле, что гомеоморфизм  $\eta: \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$  можно определить в явном виде. Например, рассмотрим две линейные системы, первая из которых в начале координат имеет фокус

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -x + y, \\ \dot{y} &= -x - y \end{aligned} \quad (2.5.5)$$

а вторая — узел

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -x, \\ \dot{y} &= -\frac{1}{3}y. \end{aligned} \quad (2.5.6)$$

Эти системы топологически эквивалентны, так как при помощи гомеоморфизма

$$(x, y) \mapsto (x \cos(\tau) + y^3 \sin(\tau), y^3 \cos(\tau) - x \sin(\tau)),$$

где  $\tau(x, y) = -\ln(x^2 + y^6)/2$ , траектории системы (2.5.6) отображаются на траектории системы (2.5.5).

Непосредственно из теорем 2.1 и 2.2 следует очень важное заключение о том, что  *$n$ -мерная система может иметь только  $(n + 1)$  различных топологических типов грубых положений равновесия*. В частности, любая система с грубым положением равновесия типа  $(k, n - k)$  локально топологически эквивалентна системе

$$\dot{x} = A_k x, \quad (2.5.7)$$

где

$$A_k = \begin{pmatrix} -I_k & 0 \\ 0 & I_{n-k} \end{pmatrix},$$

Через  $I_i$  обозначена  $i$ -мерная единичная матрица. Если положить, что  $x = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ , где  $u \in \mathbb{R}^k$ ,  $v \in \mathbb{R}^{n-k}$ , то систему (2.5.7) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \dot{u} &= -u, \\ \dot{v} &= v. \end{aligned} \quad (2.5.8)$$

Решение системы (2.5.8) задается при помощи выражений

$$u(t) = e^{-I_k t} u_0, \quad v(t) = e^{I_{n-k} t} v_0. \quad (2.5.9)$$

Если  $k = n$ , то при  $t \rightarrow +\infty$  все траектории системы (2.5.9) стремятся к положению равновесия в начале координат. Следовательно, согласно теоремам 2.1 и 2.2, любая траектория из достаточно малой окрестности положения равновесия типа  $(n, 0)$  нелинейной системы также стремится к положению равновесия при  $t \rightarrow +\infty$ . Такое положение равновесия называется *устойчивым топологическим узлом или стоком*. Заметим, что на основании теоремы 2.2 все  $n$ -мерные устойчивые фокусы и узлы, рассмотренные в

предыдущем разделе, топологически эквивалентны, а следовательно, являются стоками.

Любая траектория из малой окрестности положения равновесия  $O$  типа  $(0, n)$  стремится к точке  $O$  при  $t \rightarrow -\infty$ . При  $t \rightarrow +\infty$  любая траектория, за исключением точки  $O$ , покидает окрестность. Такое положение равновесия называется *неустойчивым топологическим узлом или источником*.

Остальные грубые положения равновесия называют *топологическими седлами*. Из теоремы Гробмана–Хартмана следует, что топологическое седло исходной нелинейной системы имеет *локально устойчивое и локально неустойчивое многообразия*  $W_{loc}^s$  и  $W_{loc}^u$  размерности  $k$  и  $(n - k)$ , соответственно. То есть, если  $h$  — локальный гомеоморфизм, под действием которого траектории линеаризованной системы отображаются на траектории нелинейной системы (в данном случае такой гомеоморфизм существует согласно теореме 2.1), то образы  $h\mathcal{E}^s$  и  $h\mathcal{E}^u$  устойчивого и неустойчивого инвариантных подпространств линеаризованной системы как раз являются устойчивым и неустойчивым многообразиями. Аналогично линейному случаю, положительная полутраектория, выходящая из любой точки многообразия  $W_{loc}^s$ , лежит в нем полностью и стремится к положению равновесия  $O$  при  $t \rightarrow +\infty$ . Подобным образом, отрицательная полутраектория, начинающаяся в любой точке многообразия  $W_{loc}^u$ , лежит в нем полностью и стремится к положению равновесия  $O$  при  $t \rightarrow -\infty$ . Траектории точек вне  $W_{loc}^s \cup W_{loc}^u$  покидают любую окрестность седла при  $t \rightarrow \pm\infty$ . Многообразия  $W_{loc}^s$  и  $W_{loc}^u$  являются *инвариантными*, то есть они включают в себя все траектории (до тех пор, пока траектории остаются в некоторой окрестности топологического седла).

Очевидно, что если две системы  $X_1$  и  $X_2$  топологически эквивалентны, то при помощи гомеоморфизма, определяющего топологическую эквивалентность, положения равновесия системы  $X_1$  отображаются на положения равновесия системы  $X_2$ . Если  $O_1$  — положение равновесия системы  $X_1$ , а  $O_2$  — образ  $O_1$  относительно гомеоморфизма, то траектория, асимптотическая к  $O_1$  при  $t \rightarrow +\infty$  (соответственно,  $t \rightarrow -\infty$ ), отображается в траекторию, асимптотическую к  $O_2$  при  $t \rightarrow +\infty$  ( $t \rightarrow -\infty$ ). Следовательно, устойчивые (неустойчивые) многообразия локально топологически эквивалентных седел имеют равные размерности. Таким образом, приходим к теореме.

**Теорема 2.3.** *Два грубых положения равновесия являются локально топологически эквивалентными тогда и только тогда, когда они принадлежат одному и тому же топологическому типу.*

Топологический подход позволяет успешно решить задачу классификации грубых положений равновесия. Однако он не дает ответов на ряд важных вопросов, например, на вопрос об экспоненциальной скорости сходимости к положению равновесия, о характере такой сходимости (монотонная или осциллирующая сходимость), о гладкости инвариантных многообразий и т. д. Эти мельчайшие (то есть неразличимые посредством локальных гомеоморфизмов) подробности, касающиеся поведения траекторий вблизи положений равновесия крайне важны при изучении различных гомоклинических бифуркаций, играющих главную роль в динамических системах со сложной динамикой.

## 2.6. Устойчивые положения равновесия. Ведущие и неведущие многообразия

Пусть  $n$ -мерная система класса гладкости  $\mathbb{C}^r$  ( $r \geq 1$ ) имеет грубое положение равновесия  $O$  в начале координат. Вблизи точки  $O$  систему можно представить в следующем виде:

$$\dot{y} = Ay + h(y), \quad (2.6.1)$$

где  $A$  —  $(n \times n)$ -матрица с постоянными коэффициентами, спектр которой, определяемый как множество всех собственных значений матрицы  $A$ , лежит в комплексной плоскости вне мнимой оси;  $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  — некоторая  $\mathbb{C}^r$ -гладкая функция такая, что

$$h(0) = 0, \quad h'_y(0) = 0. \quad (2.6.2)$$

Пусть  $O$  — устойчивое положение равновесия, то есть все  $n$  характеристических показателей  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  имеют отрицательные действительные части. Для линеаризованной системы

$$\dot{y} = Ay \quad (2.6.3)$$

(согласно лемме 2.1) выполняется неравенство (2.3.22), в соответствии с которым любая траектория стремится к началу координат экспоненциально. Сохраняется ли свойство экспоненциальной сходимости траекторий к положению равновесия для исходной нелинейной системы? Следующая теорема дает на этот вопрос положительный ответ.

**Теорема 2.4.** При достаточно малом  $\delta > 0$ , для такого значения  $y_0$ , что  $\|y_0\| < \delta$ , траектория  $y(t)$  нелинейной системы (2.6.1) с начальной точкой в  $y_0$  при любых значениях  $t \geq 0$  удовлетворяет неравенству

$$\|y(t)\| \leq C e^{(\max \operatorname{Re} \lambda_i + \varepsilon)t} \|y_0\|, \quad (2.6.4)$$

где константа  $\varepsilon > 0$  при уменьшении  $\delta$  становится бесконечно малой, а  $C > 0$  — некоторый множитель, зависящий от выбора базиса в  $\mathbb{R}^n$ .

Доказательство. Если известен квадрат нормы

$$\|y(t)\|^2 = \langle y(t), y(t) \rangle,$$

где через  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  обозначено скалярное произведение в пространстве  $\mathbb{R}^n$ , то из уравнения (2.6.1) находим

$$\frac{d}{dt} \|y(t)\|^2 = 2\langle y(t), \dot{y}(t) \rangle = 2\langle y, Ay \rangle + 2\langle y, h(y) \rangle. \quad (2.6.5)$$

При разложении функции  $h(y)$  вблизи точки  $O$  в ряд Тейлора получаем

$$h(y) = h(0) + h'_y(0)y + o(\|y\|). \quad (2.6.6)$$

Из формулы (2.6.2) следует, что

$$h(y) = o(\|y\|),$$

то есть при заданном значении  $\varepsilon > 0$ , можно найти такое  $\delta > 0$ , что

$$\|h(y)\| \leq \frac{1}{2}\varepsilon\|y\| \quad (2.6.7)$$

при таких значениях  $y$ , что  $\|y\| \leq \delta$ . Из неравенства (2.6.7) получаем следующую оценку второго члена в (2.6.5):

$$|2\langle y, h(y) \rangle| \leq \varepsilon\|y\|^2 \quad (2.6.8)$$

Для того, чтобы оценить первый член  $2\langle y, Ay \rangle$  выбираем базис Жордана, аналогичный базису, используемому при оценке решений линейных систем (лемма 2.1). В данном базисе матрица  $A$  задается формулами (2.3.5)–(2.3.7), (2.3.10) и (2.3.11). Кроме того, в выбранном базисе ненулевые величины

элементов  $\delta_j$ , входящих в формулу (2.3.11), должны быть равны  $\varepsilon/2$ . Составляющие вектора  $z = Ay$  определяются либо как

$$z_i = \lambda_i y_i, \quad (2.6.9)$$

если показатели  $\lambda_i$  являются вещественными и простыми; либо как

$$\begin{aligned} z_i &= y_i \operatorname{Re} \lambda_i - y_{i+1} \operatorname{Im} \lambda_i, \\ z_{i+1} &= y_{i+1} \operatorname{Re} \lambda_i + y_i \operatorname{Im} \lambda_i, \end{aligned} \quad (2.6.10)$$

если  $\lambda_i, \lambda_{i+1}$  — пара комплексно-сопряженных характеристических показателей; либо как

$$z_{i+j} = \lambda_{i+j} y_{i+j} + \delta_j y_{i+j+1}, \quad j = 1, \dots, k, \quad (2.6.11)$$

если  $\lambda_{i+1} = \dots = \lambda_{i+k}$  — показатель кратности  $k$  (в данном случае  $\delta_k \equiv 0$ ); либо как

$$\begin{aligned} z_{i+2j-1} &= y_{i+2j-1} \operatorname{Re} \lambda_{i+1} - y_{i+2j} \operatorname{Im} \lambda_{i+1} + \delta_j y_{i+2j+1} \\ z_{i+2j} &= y_{i+2j} \operatorname{Re} \lambda_{i+1} - y_{i+2j-1} \operatorname{Im} \lambda_{i+1} + \delta_j y_{j+2j+2} \end{aligned} \quad (2.6.12)$$

$(j = 1, \dots, k; \delta_k \equiv 0),$

если  $\lambda_{i+1} = \lambda_{i+3} = \dots = \lambda_{i+2k-1}$  и  $\lambda_{i+2} = \lambda_{i+4} = \dots = \lambda_{i+2k}$  — комплексно-сопряженные характеристические показатели кратности  $k$ . Напомним, что величины  $\delta_j$  в выражениях (2.6.11) и (2.6.12) могут быть равны либо 0, либо  $\varepsilon/2$ .

Из формул (2.6.9) и (2.6.10) вытекает, что если показатели — простые, то

$$\langle y, z \rangle = \sum_{i=1}^n y_i^2 \operatorname{Re} \lambda_i. \quad (2.6.13)$$

В случае кратных характеристических показателей, присутствующих в уравнениях (2.6.9)–(2.6.12), получаем следующую оценку:

$$|\langle y, z \rangle - \sum_{i=1}^n y_i^2 \operatorname{Re} \lambda_i| \leq \frac{\varepsilon}{2} \left( \sum_{\text{действ. } \lambda_i = \lambda_{i+1}} |y_i y_{i+1}| + \sum_{\text{компл. } \lambda_i = \lambda_{i+2}} |y_i y_{i+2}| \right).$$

Поскольку  $|y_i y_j| \leq \frac{1}{2}(y_i^2 + y_j^2)$ , получаем

$$|\langle y, z \rangle - \sum_{i=1}^n y_i^2 \operatorname{Re} \lambda_i| \leq \frac{\varepsilon}{2} \|y\|^2. \quad (2.6.14)$$

Из формул (2.6.5), (2.6.8) и (2.6.13)–(2.6.14) вытекает, что любую траекторию  $y(t)$  можно оценить либо как

$$\frac{d}{dt} \|y(t)\|^2 \leq 2(\max \operatorname{Re} \lambda_i + \varepsilon) \|y(t)\|^2,$$

либо как

$$\frac{d}{dt} \|y(t)\| \leq (\max \operatorname{Re} \lambda_i + \varepsilon) \|y(t)\|, \quad (2.6.15)$$

до тех пор, пока она остается в  $\delta$ -окрестности точки  $O$ . Согласно (2.6.15), при увеличении  $t$  норма траектории  $y(t)$  монотонно убывает, следовательно, если  $\|y_0\| \leq \delta$ , то  $\|y(t)\| \leq \delta$  при  $t \geq 0$ . Таким образом, неравенство (2.6.15) выполняется для любой положительной полутраектории, выходящей из  $\delta$ -окрестности точки  $O$ .

Чтобы проинтегрировать неравенство (2.6.15) необходимо учесть, что оно эквивалентно неравенству

$$\frac{d}{dt} (\|y(t)\| e^{-(\max \operatorname{Re} \lambda_i + \varepsilon)t}) \leq 0.$$

Следовательно величина  $\|y(t)\| e^{-(\max \operatorname{Re} \lambda_i + \varepsilon)t}$  с ростом значения  $t$  монотонно убывает. Таким образом, получаем неравенство

$$\|y(t)\| e^{-(\max \operatorname{Re} \lambda_i + \varepsilon)t} \leq \|y_0\|$$

которое при  $C = 1$  совпадает с неравенством (2.6.4). Переход к произвольному базису приводит к появлению в формуле (2.6.4) коэффициента  $C \neq 1$  (см. (2.3.23)).

**Замечание.** Если система принадлежит классу гладкости  $\mathbb{C}^2$  и выше, а ближайший к мнимой оси характеристический показатель является простым, то в неравенстве (2.6.4) можно положить  $\varepsilon = 0$ .

Действительно, в данном случае первый член в правой части неравенства (2.6.5) оценивается как

$$2\langle y, Ay \rangle \leq \max (\operatorname{Re} \lambda_i) \sum_{i=1}^n y_i^2.$$

Следовательно, величину  $\varepsilon$  в формуле (2.6.15) можно определить только из неравенства (2.6.7). Если  $h \in \mathbb{C}^r$  ( $r \geq 2$ ), то указанный член ряда Тейлора (2.6.6) имеет следующую оценку:

$$\|y\|^2 (\max h''),$$

где максимум берется в  $\delta$ -окрестности точки  $O$ . Значит, в неравенстве (2.6.7) можно выбрать такую постоянную  $\varepsilon$ , чтобы она удовлетворяла условию

$$\varepsilon \leq K \|y\|.$$

Поскольку  $y$  экспоненциально убывает, постоянную  $\varepsilon$  в неравенстве (2.6.15) можно заменить зависящей от времени функцией  $\varepsilon(t)$ , которая убывает экспоненциально, по крайней мере, при  $t \rightarrow +\infty$ , а интеграл  $\int_0^{\infty} \varepsilon(s) ds$  является конечным.

Из неравенства (2.6.15) следует, что

$$\frac{d}{dt} \ln \|y(t)\| \leq \max \operatorname{Re} \lambda_i + \varepsilon(t)$$

откуда

$$\ln \|y(t)\| \leq \ln \|y_0\| + t \max \operatorname{Re} \lambda_i + \int_0^t \varepsilon(s) ds.$$

Так как интеграл сходится, то неравенство принимает вид

$$\ln \|y(t)\| \leq \ln \|y_0\| + t \max \operatorname{Re} \lambda_i + \ln C.$$

Это неравенство совпадает с (2.6.4) при  $\varepsilon = 0$ .

Заметим, что при  $h \in \mathbb{C}^1$  интеграл  $\int_0^{\infty} \varepsilon(s) ds$  может расходиться. Например, в случае, когда  $y \in \mathbb{R}^1$ , а

$$h(y) = \int_0^y \frac{ds}{\ln |s|},$$

при экспоненциальном уменьшении величины  $y$  до нуля, величина  $\varepsilon(t)$  асимптотически стремится к нулю как  $\sim |h(y(t))|/|y(t)| \sim \frac{1}{t}$ .

В приведенной выше теореме утверждается, что топологически устойчивый узел — экспоненциально устойчивое положение равновесия. Как показано в разделе 2.3, в линейном случае скорость и характер сходимости к положению равновесия большинства траекторий определяется ведущими координатами. Эта особенность характерна и для нелинейного случая. Здесь

в качестве неведущего подпространства выступает инвариантное *неведущее многообразие*, существование которого в многомерных нелинейных системах доказал Петровский.

Запишем характеристические показатели в следующем порядке:

$$0 \geq \operatorname{Re} \lambda_1 \geq \operatorname{Re} \lambda_2 \geq \dots \geq \operatorname{Re} \lambda_n.$$

Пусть значение  $m > 0$  таково, что первые  $m$  показателей имеют одинаковые действительные части

$$\operatorname{Re} \lambda_i = \operatorname{Re} \lambda_1, \quad (i = 1, \dots, m)$$

и

$$\operatorname{Re} \lambda_i < \operatorname{Re} \lambda_1, \quad (i = m + 1, \dots, n).$$

Положим, что  $m < n$ . Каждый вектор  $y$  можно однозначно разложить следующим образом:

$$y = u + v,$$

где  $u = (u_1, \dots, u_m)$  и  $v = (v_1, \dots, v_{n-m})$  — проекции матрицы  $A$  на ведущее и неведущее собственные подпространства  $\mathcal{E}^L$  и  $\mathcal{E}^{ss}$ , соответственно. В новых координатах система принимает вид

$$\begin{aligned} \dot{u} &= A_1 u + f(u, v), \\ \dot{v} &= A_2 v + g(u, v), \end{aligned} \quad (2.6.16)$$

где  $\operatorname{spectr} A_1 = \{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}$ , а  $\operatorname{spectr} A_2 = \{\lambda_{m+1}, \dots, \lambda_n\}$ ; функции  $f, g \in \mathbb{C}^r$ , а

$$f(0) = 0, \quad g(0) = 0, \quad f'(0) = 0, \quad g'(0) = 0 \quad (2.6.17)$$

**Определение 2.3.** Пусть  $U$  — окрестность точки  $0$ . Множество  $W \subseteq U$  является локально инвариантным, если траектория, выходящая из точки  $M \in W$ , полностью лежит в  $W$  до тех пор, пока она остается в окрестности  $U$ .

**Теорема 2.5 (О неведущем многообразии).** В окрестности  $U$  устойчивого положения равновесия  $0$  существует  $\mathbb{C}^r$ -гладкое инвариантное многообразие  $W_{loc}^{ss}$  размерности  $(n - m)$  (неведущее или сильно устойчивое), которое проходит через точку  $0$  и касается в ней неведущего подпространства  $\mathcal{E}^{ss}$ :  $u = 0$ . Траектория  $y(t)$ , выходящая из некоторой точки

$y_0$  вне многообразия  $W_{loc}^{ss}$  стремится к  $0$  по касательной к ведущему подпространству  $v = 0$ . Кроме того, при  $t \geq 0$

$$\|y(t)\| \geq C e^{(\operatorname{Re} \lambda_1 - \varepsilon)t} \rho(y_0, W_{loc}^{ss}), \quad (2.6.18)$$

где через  $\rho(y_0, W_{loc}^{ss})$  обозначено расстояние между  $y_0$  и  $W_{loc}^{ss}$ . Все траектории, принадлежащие многообразию  $W_{loc}^{ss}$  стремятся к точке  $0$  быстрее, то есть

$$\|y(t)\| \leq C e^{(\operatorname{Re} \lambda_{m+1} + \varepsilon)t} \|y_0\|. \quad (2.6.19)$$

Доказательство существования и гладкости неведущего многообразия приводится в главе 5. Сейчас же докажем вторую часть теоремы, а именно: неравенства (2.6.18) и (2.6.19).

Так как многообразие  $W_{loc}^{ss}$  касается подпространства  $u = 0$ , оно описывается уравнением вида

$$u = \varphi(v), \quad (2.6.20)$$

где  $\varphi \in \mathbb{C}^r$ , а

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi'(0) = 0. \quad (2.6.21)$$

Так как многообразие  $W_{loc}^{ss}$  является инвариантным, если  $u_0 = \varphi(v_0)$ , то  $u(t) = \varphi(v(t))$  при  $t \geq 0$ . Следовательно,

$$\dot{u} = \varphi'(v)\dot{v} \quad \text{для} \quad u = \varphi(v),$$

или, в соответствии с системой (2.6.16),

$$A_1 \varphi(v) + f(\varphi, v) = \varphi'(v)(A_2 v + g(\varphi, v)). \quad (2.6.22)$$

Введем новую переменную

$$w = u - \varphi(v),$$

с тем чтобы в новых координатах уравнение для многообразия  $W_{loc}^{ss}$  имело вид  $w = 0$ . Такую замену переменных называют *распрямлением многообразия*. Тогда система (2.6.16) принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} \dot{v} &= A_2 v + g(w + \varphi(v), v), \\ \dot{w} &= A_1 w + A_1 \varphi(v) + f(w + \varphi(v), v) - \varphi'(v)\dot{v} = \\ &= A_1 w + A_1 \varphi(v) + f(w + \varphi(v), v) - \varphi'(v)(A_2 v + g(w + \varphi(v), v)). \end{aligned} \quad (2.6.23)$$

Используя выражение (2.6.22), последнее уравнение можно записать в виде

$$\dot{w} = A_1 w + [f(w + \varphi, v) - f(\varphi, v)] - \varphi'(v) [g(w + \varphi, v) - g(\varphi, v)]$$

или, учитывая то, что члены в квадратных скобках обращаются в нуль при  $w = 0$ , как

$$\dot{w} = (A_1 + \tilde{g}(w, v)) w, \quad (2.6.24)$$

где

$$\tilde{g} \equiv \left[ \int_0^1 f'_u(\varphi(v) + sw, v) ds - \varphi'(v) \int_0^1 g'_u(\varphi(v) + sw, v) ds \right] \in \mathbb{C}^{r-1}.$$

Кроме того, в силу формул (2.6.17) и (2.6.21),

$$\tilde{g}(0, 0) = 0.$$

Из (2.6.24) находим норму вектора  $w(t)$ :

$$\|w(t)\| \frac{d}{dt} \|w(t)\| = \langle w(t), (A_1 + \tilde{g}(w, v)) w(t) \rangle.$$

Так как  $\tilde{g}(0, 0) = 0$ , получаем неравенство

$$|\langle w(t), \tilde{g}(w, v) w(t) \rangle| \leq \frac{\varepsilon}{2} \|w(t)\|^2$$

при условии, что величина  $\|y_0\|$  достаточно мала. Следовательно,

$$\frac{d}{dt} \|w\| \geq \frac{\langle w, A_1 w \rangle}{\|w\|} - \frac{\varepsilon}{2} \|w\|.$$

С помощью процедуры, используемой при доказательстве теоремы 2.4, получаем неравенство

$$\frac{d}{dt} \|w\| \geq (\operatorname{Re} \lambda_1 - \varepsilon) \|w\|. \quad (2.6.25)$$

Окончательно находим

$$\|w(t)\| \geq e^{(\operatorname{Re} \lambda_1 - \varepsilon)t} \|w_0\|,$$

то есть неравенство (2.6.18) выполнено.

Теперь докажем, что если начальная точка не принадлежит  $W_{loc}^{ss}$ , то соответствующая траектория стремится к  $O$  по касательной к ведущему подпространству  $v = 0$ . Для этого рассмотрим величину  $z(t) = \|v(t)\|/\|w(t)\|$ , где  $w \neq 0$ , и покажем, что  $z(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow +\infty$ . Величина  $d\|w(t)\|/dt$  определяется неравенством (2.6.25). Аналогично, из системы (2.6.23) получаем

$$\frac{d}{dt} \|v\| \leq (\operatorname{Re} \lambda_{m+1} + \varepsilon) \|v\| + \|w\| \max \|g'_u\|, \quad (2.6.26)$$

где максимум берется по окрестности точки  $O$  диаметра  $\|y(t)\|$ . С учетом неравенства (2.6.25) находим, что

$$\frac{d}{dt} z = \frac{1}{\|w\|} \frac{d}{dt} \|v\| - z \frac{1}{\|w\|} \frac{d}{dt} \|w\| \leq \kappa(t) - \mu z, \quad (2.6.27)$$

где  $\mu = \operatorname{Re} \lambda_{m+1} - \operatorname{Re} \lambda_1 + 2\varepsilon > 0$ , а

$$\kappa(t) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad t \rightarrow +\infty. \quad (2.6.28)$$

Согласно (2.6.27),  $\frac{d}{dt} e^{\mu t} z(t) \leq e^{\mu t} \kappa(t)$  или

$$z(t) \leq z_0 e^{-\mu t} + \int_0^t e^{-\mu(t-s)} \kappa(s) ds.$$

Для доказательства того, что  $z(t) \rightarrow 0$ , необходимо показать, что

$$I(t) = \int_0^t e^{-\mu(t-s)} \kappa(s) ds \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad t \rightarrow \infty.$$

При произвольном значении  $T > 0$  можно записать

$$I(t) = \int_0^T e^{-\mu(t-s)} \kappa(s) ds + \int_T^t e^{-\mu(t-s)} \kappa(s) ds$$

откуда

$$\begin{aligned} I(t) &\leq e^{-\mu t} \left( \int_0^T e^{\mu s} ds \right) \max_{s \geq 0} \kappa(s) + \left( \int_0^t e^{-\mu(t-s)} ds \right) \max_{s \geq T} \kappa(s) \leq \\ &\leq e^{-\mu t} \frac{1}{\mu} e^{\mu T} \max_{s \geq 0} \kappa(s) + \frac{1}{\mu} \max_{s \geq T} \kappa(s). \end{aligned} \quad (2.6.29)$$

Согласно (2.6.28) второе слагаемое в (2.6.29) может быть бесконечно малым, если  $T$  достаточно велико. При выборе достаточно большого значения  $t$  первый член неравенства (2.6.29) также становится бесконечно малым. Следовательно,  $I(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow +\infty$ .

Таким образом, если  $w_0 \neq 0$ , то  $\|v(t)\|/\|w(t)\| \rightarrow 0$ , то есть любая траектория, не лежащая в  $W_{loc}^{ss}$ , при  $t \rightarrow +\infty$  входит в  $O$  по касательной к ведущему подпространству. В частности, согласно вышесказанному,  $W_{loc}^{ss}$  является *единственным*  $m$ -мерным гладким инвариантным многообразием, касающимся в точке  $O$  неведущего подпространства.

Чтобы доказать справедливость неравенства (2.6.19) для траекторий, принадлежащих  $W_{loc}^{ss}$ , заметим, что в ограничении системы (2.6.23)–(2.6.24) на неведущее многообразие, т. е. в системе

$$\dot{v} = A_2 v + g(\varphi(v), v), \quad (2.6.30)$$

точка  $O$  — устойчивое положение равновесия с характеристическими показателями  $(\lambda_{m+1}, \dots, \lambda_n)$ . Следовательно, согласно теореме 2.4, экспоненциальная оценка (2.6.19) выполняется для системы (2.6.30), что и требовалось доказать.

Заметим, что теорема о неведущем многообразии справедлива также для системы (2.6.30). Таким образом, большинство траекторий, принадлежащих многообразию  $W_{loc}^{ss}$ , стремятся к точке  $O$  со скоростью  $e^{\operatorname{Re} \lambda_{m+1} t}$ . Отдельные траектории, стремящиеся к  $O$  с большей скоростью, образуют  $\mathbb{C}^r$ -гладкое многообразие  $W_{loc}^{sss}$  касается в точке  $O$  собственного подпространства, соответствующего таким характеристическим показателям  $\lambda_i$  матрицы  $A$ , что  $\operatorname{Re} \lambda_i < \operatorname{Re} \lambda_{m+1}$ . Теорема о неведущем многообразии применима также для системы на многообразии  $W_{loc}^{sss}$  и т. д. В итоге получаем иерархию неведущих многообразий  $W^{ss}, W^{sss}, W^{ssss}, \dots$ , состоящих из траекторий, стремящихся к равновесию  $O$  с все увеличивающейся скоростью.

Здесь, как и в линейном случае, в зависимости от поведения систем по ведущим координатам имеют место два основных вида устойчивых положений равновесия: *устойчивый узел* и *устойчивый фокус*. Точка  $O$  называется *узлом*, если  $m = 1$ , то есть ведущий характеристический показатель  $\lambda_1$  является простым и вещественным:

$$0 > -\lambda = \lambda_1 > \operatorname{Re} \lambda_i \quad (i = 2, \dots, n). \quad (2.6.31)$$

Точка  $O$  называется *фокусом*, если  $m = 2$ , а ведущие характеристические

показатели образуют пару комплексно-сопряженных чисел:

$$0 > \operatorname{Re} \lambda_1 = \operatorname{Re} \lambda_2 > \operatorname{Re} \lambda_i \quad (i = 3, \dots, n). \quad (2.6.32)$$

Очевидно, что если точка  $O$  — узел или фокус, то для любой матрицы близкой к  $A$ , она остается узлом или фокусом, соответственно. Если не выполняется ни одно из условий ((2.6.31) и (2.6.32)), слабое возмущение матрицы  $A$  всегда приводит к выполнению, по крайней мере, одного из этих условий.

В том случае, когда положение равновесия — *узел*, неведущее многообразие имеет размерность  $(n - 1)$  и делит окрестность точки  $O$  на две части. Траектории вне множества  $W_{loc}^{ss}$  достигают точки  $O$  по касательной к оси  $w$  с двух противоположных направлений: со стороны положительной полуоси ( $w > 0$ ) для первой части и со стороны отрицательной полуоси ( $w < 0$ ) для второй. Уравнение (2.6.24) для ведущей координаты  $w$  имеет вид

$$\dot{w} = -\lambda w + o(w). \quad (2.6.33)$$

Очевидно, что траектории, принадлежащие каждой части, стремятся к точке  $O$  монотонно (см. рис. 2.6.1 и 2.6.2).

Когда положение равновесия — *фокус*, неведущее многообразие имеет размерность  $(n - 2)$  и не делит окрестность точки  $O$ . Если  $\lambda_{1,2} = -\rho \pm i\omega$ , то уравнение (2.6.24), описывающее ведущие координаты, можно записать как

$$\begin{aligned} \dot{w}_1 &= (-\rho + \dots)w_1 - (\omega + \dots)w_2, \\ \dot{w}_2 &= (-\rho + \dots)w_2 + (\omega + \dots)w_1, \end{aligned} \quad (2.6.34)$$

или в полярных координатах как

$$\begin{aligned} \dot{r} &= (-\rho + \dots)r, \\ \dot{\varphi} &= \omega + \dots. \end{aligned} \quad (2.6.35)$$

Далее через многоточия обозначаются члены высшего порядка.

Из системы (2.6.35) следует, что движение траекторий, стремящихся к точке  $O$ , носит колебательный характер. Траектории, не лежащие в многообразии  $W_{loc}^{ss}$ , имеют вид спиралей, стремящихся к  $O$  без определенной направленности, но по касательной к ведущей плоскости  $v = 0$ , как показано на рис. 2.6.3.

Для устойчивых положений равновесия нелинейных систем неведущее многообразие имеет почти то же значение, что неведущее инвариантное

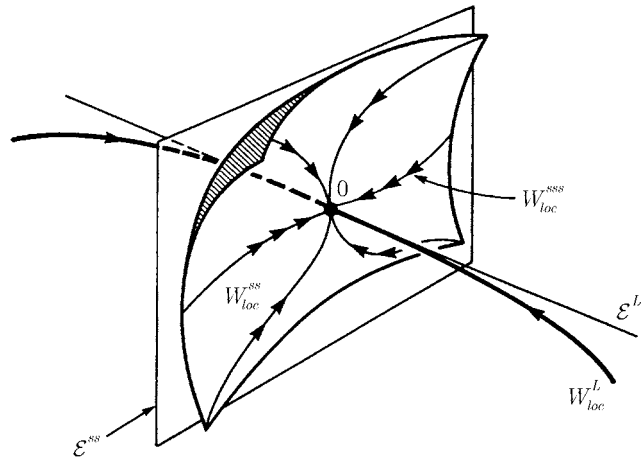


Рис. 2.6.1. Устойчивый узел. В данном случае существует определенная иерархия сильно устойчивых локальных многообразий. Каждая траектория монотонно стремится к узлу  $O$

подпространство для линейных систем. Напомним, что в случае линейных систем точка равновесия также имеет ведущее инвариантное подпространство, однако, в нелинейном случае у него нет аналога. Различие заключается в том, что, в целом, ведущее многообразие нелинейной системы может иметь только конечную гладкость.

Пример. Двумерная система

$$\begin{aligned} \dot{w} &= -w, \\ \dot{v} &= -2v + w^2, \end{aligned} \quad (2.6.36)$$

имеет устойчивый узел в начале координат  $O$ . Решение системы в общем виде можно представить как

$$w = w_0 e^{-t}, \quad v = v_0 e^{-2t} + w_0^2 t e^{-2t}. \quad (2.6.37)$$

Если взять две траектории: одну из области, где  $w > 0$ , а другую — где  $w < 0$ , то при их объединении с точкой  $O$  образуется инвариантное многообразие, касающееся в этой точке ведущего подпространства  $E^L$ , см. рис. 2.6.4. Такие многообразия можно считать ведущими, но каждое из них в

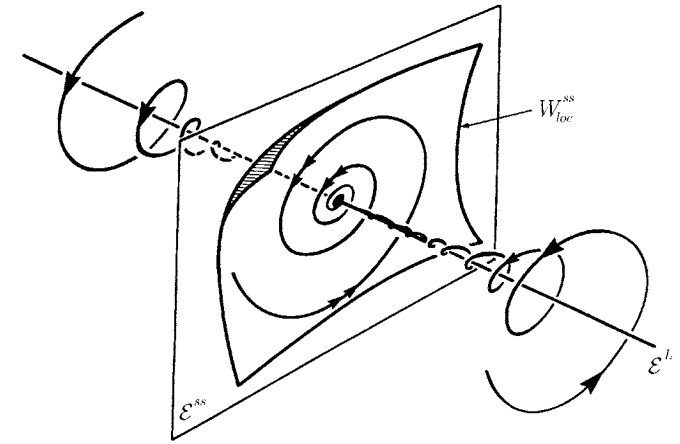


Рис. 2.6.2. В отличие от рис. 2.6.1, движение траекторий к узлу носит колебательный характер, то есть имеет место фокус

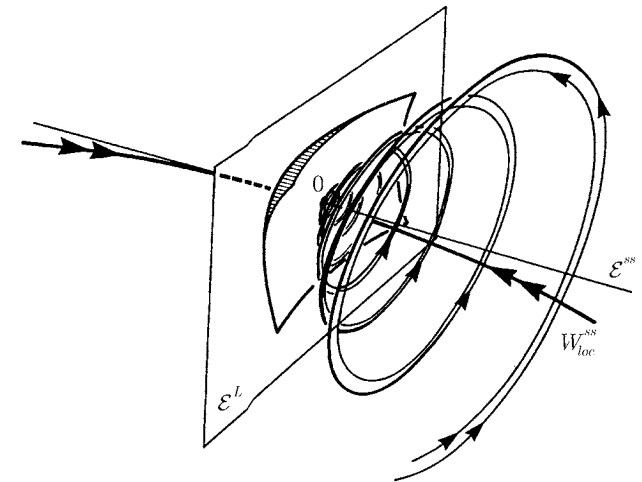


Рис. 2.6.3. Устойчивый фокус



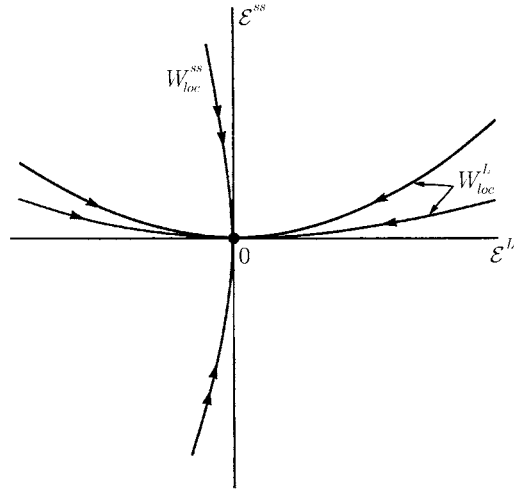


Рис. 2.6.4. Единственное неведущее локальное многообразие  $W_{loc}^{ss}$ . Ведущее локальное многообразие  $W_{loc}^L$  узла нельзя определить однозначно

точке  $O$  является лишь  $C^1$ -гладкими, так как, согласно уравнениям (2.6.37),

$$\frac{dv}{dw} = e^{-t} \left( \frac{2v_0}{w_0} - w_0 + 2w_0 t \right),$$

откуда

$$\frac{d^2v}{dw^2} = \frac{2v_0}{w_0^2} - 2 + 2t.$$

Следовательно,  $d^2v/dw^2 \rightarrow +\infty$  при  $t \rightarrow +\infty$ . В общем случае справедлива следующая теорема (доказательство приводится в главе 5).

**Теорема 2.6.** Система (2.6.16) имеет  $m$ -мерное инвариантное ведущее многообразие  $W_{loc}^L$ , касающееся подпространства  $v = 0$  в точке равновесия  $O$ . Его гладкость равна  $\min(r, r_L) \geq 1$ , где

$$r_L = \left\lfloor \frac{\operatorname{Re} \lambda_{m+1}}{\operatorname{Re} \lambda_1} \right\rfloor. \quad (2.6.38)$$

В данном случае через  $[x]$  обозначено наибольшее целое число строго меньшее  $x$ .

**Замечание 1.** Ведущее многообразие, вообще, не единственно (см. приведенный выше пример).

**Замечание 2.** Из формулы (2.6.38) следует, что при значении  $\operatorname{Re} \lambda_1$  стремящемся к нулю, гладкость ведущего многообразия увеличивается до  $\infty$ .

Случай, когда  $\operatorname{Re} \lambda_i > 0$  ( $i = 1, \dots, n$ ), сводится к рассмотренному выше путем обращения времени  $t \rightarrow -t$ . Следовательно, выполняется неравенство

$$\|y(t)\| \leq C e^{(\min \operatorname{Re} \lambda_i - \varepsilon)|t|} y_0 \quad \text{для } t \leq 0. \quad (2.6.39)$$

Значит, такое положение равновесия является экспоненциально вполне неустойчивым. Неведущее  $W_{loc}^{uu}$  и ведущее  $W_{loc}^L$  многообразия можно определить так же, как и в случае устойчивого положения равновесия (но при  $t \rightarrow -\infty$ ). В зависимости от поведения траекторий в ведущих координатах выделяют два основных вида положений равновесия:

- если ближайший к мнимой оси характеристический показатель является вещественным и простым (то есть кратности  $m = 1$ ), то траектории, не лежащие в многообразии  $W_{loc}^{uu}$ , при  $t \rightarrow +\infty$  покидают точку  $O$  в одном из двух противоположных направлений по касательной к ведущей оси. Такое положение равновесия называется *неустойчивым узлом*;
- если ближайшей к мнимой оси является пара комплексно-сопряженных характеристических показателей, то все траектории, не лежащие в многообразии  $W_{loc}^{uu}$ , при  $t \rightarrow +\infty$  удаляются от точки  $O$  по спирали; они не имеют определенной направленности, но располагаются по касательной к ведущей плоскости. Такое положение равновесия называется *неустойчивым фокусом*.

## 2.7. Состояния равновесия седлового типа. Инвариантные многообразия

Пусть  $k$  характеристических показателей грубого положения равновесия  $O$  лежат слева от мнимой оси, а  $(n - k)$  показателей — справа от нее, то есть  $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$ ,  $i = 1, \dots, k$ , и  $\operatorname{Re} \lambda_j > 0$ ,  $j = k + 1, \dots, n$ , где  $k \neq 0, n$ .

Из раздела 2.5 известно, что такое положение равновесия имеет устойчивое и неустойчивое инвариантные множества  $W_{loc}^s$  и  $W_{loc}^u$ , являющиеся локально гомеоморфными образами  $k$ -мерного и  $(n - k)$ -мерного дисков,

соответственно. Инвариантные множества  $W_{loc}^s$  и  $W_{loc}^u$  пересекаются только в одной точке — в положении равновесия  $O$ . Если выколотить точку  $O$ , то оба множества будут состоять из полутраекторий:  $W_{loc}^s$  — из положительных полутраекторий, а  $W_{loc}^u$  — из отрицательных.

Продолжая множества  $W_{loc}^s$  и  $W_{loc}^u$  вдоль траекторий за пределы окрестности седла, получаем *глобальное устойчивое инвариантное многообразие*  $W^s$  и *глобальное неустойчивое инвариантное многообразие*  $W^u$  положения равновесия  $O$ . В случае линейной системы они представляют собой  $k$ - и  $(n - k)$ -мерные инвариантные подпространства матрицы  $A$ . В нелинейном случае многообразия  $W^s$  и  $W^u$  могут быть вложены в пространство  $R^n$  очень сложным образом. Ниже покажем, насколько сильно относительное расположение обоих многообразий в фазовом пространстве влияет на глобальную динамику системы. Именно поэтому расчеты (аналитические, если это возможно, и численные) являются ключевым элементом качественного изучения конкретных систем.

Следует подчеркнуть, что результаты, которые можно получить из теоремы Гробмана–Хартмана, не позволяют определить многообразия  $W^s$  и  $W^u$ , либо оценить их гладкость. В то же время, локальные многообразия  $W_{loc}^s$  и  $W_{loc}^u$  — вполне определенные гладкие объекты. Существование в аналитических системах аналитических седловых инвариантных многообразий доказали Пуанкаре и Ляпунов. Последний использовал для этого так называемую условную устойчивость. Для гладких систем Перрон и Адамар получили аналогичные результаты.

При помощи линейной невырожденной замены переменных нелинейная система вблизи положения равновесия приводится к виду

$$\begin{aligned} \dot{u} &= A^- u + f(u, v), \\ \dot{v} &= A^+ v + g(u, v), \end{aligned} \quad (2.7.1)$$

где  $u \in \mathbb{R}^k$ ,  $v \in \mathbb{R}^{n-k}$ ,  $\text{spectr } A^- = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$ ,  $\text{spectr } A^+ = \{\lambda_{k+1}, \dots, \lambda_n\}$ , а  $f$  и  $g$  — некоторые  $\mathbb{C}^r$ -гладкие ( $r \geq 1$ ) функции, которые вместе с их первыми производными обращаются в нуль в начале координат.

**Теорема 2.7.** *Грубое седло  $O$  имеет  $\mathbb{C}^r$ -гладкие инвариантные многообразия  $W_{loc}^s$  и  $W_{loc}^u$  (см. рис. 2.7.1 и 2.7.2), задаваемые уравнениями*

$$W_{loc}^s : v = \psi(u) \quad (2.7.2)$$

$$W_{loc}^u : u = \varphi(v) \quad (2.7.3)$$

где

$$\psi(0) = 0, \quad \psi'(0) = 0 \quad (2.7.4)$$

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi'(0) = 0. \quad (2.7.5)$$

Мы докажем эту теорему в следующем разделе.

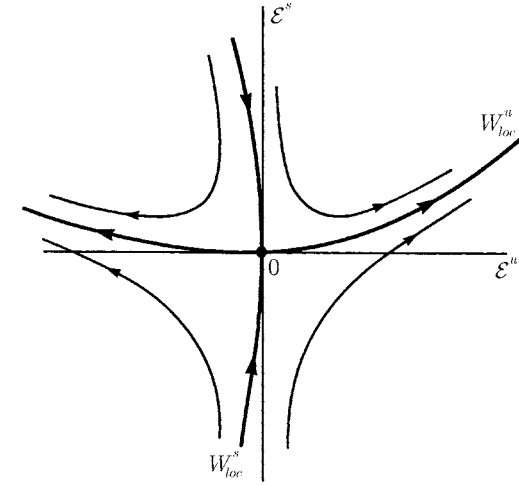


Рис. 2.7.1. Локальные устойчивое  $W_{loc}^s$  и неустойчивое  $W_{loc}^u$  многообразия седла на плоскости

Условие инвариантности многообразий  $W_{loc}^s$  и  $W_{loc}^u$  можно записать в виде

$$\dot{v} = \psi'(u)\dot{u} \quad \text{при } v = \psi(u),$$

$$\dot{u} = \varphi'(v)\dot{v} \quad \text{при } u = \varphi(v),$$

или как

$$A^+ \psi(u) + g(u, \psi) = \psi'(u)(A^- u + f(u, \psi)) \quad (2.7.6)$$

$$A^- \varphi(v) + f(\varphi, v) = \varphi'(v)(A^+ v + g(\varphi, v)). \quad (2.7.7)$$

Из зависимостей (2.7.6) и (2.7.7) получаем алгоритм вычисления инвариантного многообразия вблизи седла. Прежде всего раскладываем функции

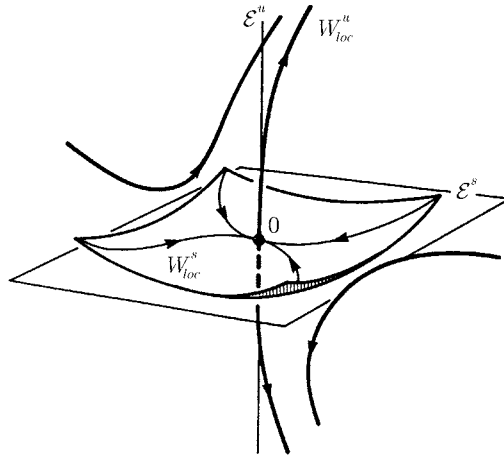


Рис. 2.7.2. Тот же случай, что показан на рис. 2.7.1, но в пространстве  $\mathbb{R}^3$

$\varphi$  и  $\psi$  в ряд Тейлора с символическими коэффициентами, подставляем их в формулы (2.7.6) и (2.7.7) и приводим подобные члены. С помощью полученных формул через коэффициенты Тейлора функций  $f$  и  $g$  можно последовательно определить любое количество членов в рядах функций  $\varphi$  и  $\psi$ .

Например, для двумерной аналитической системы

$$\begin{aligned} \dot{u} &= -\lambda u + \sum_{i+j \geq 2} \alpha_{ij} u^i v^j, \\ \dot{v} &= \gamma v + \sum_{i+j \geq 2} \beta_{ij} u^i v^j \end{aligned}$$

уравнение (2.7.6) имеет вид

$$\gamma \psi + \sum_{i+j \geq 2} \beta_{ij} u^i \psi^j = \psi'(u) (-\lambda u + \sum_{i+j \geq 2} \alpha_{ij} u^i \psi^j).$$

Подставляя выражение

$$\psi(u) = \psi_2 u^2 + \psi_3 u^3 + \dots$$

с неопределенными коэффициентами  $\psi_i$  в данное уравнение и приравнявая коэффициенты при  $u^2$ , получаем

$$\gamma \psi_2 + \beta_{20} = -2\lambda \psi_2,$$

отсюда находим

$$\psi_2 = -\beta_{20} / (2\lambda + \gamma).$$

Приравнявая коэффициенты при  $u^3$ , получаем выражение

$$\gamma \psi_3 + \beta_{30} + \beta_{11} \psi_2 = -3\lambda \psi_3 + 2\psi_2 \alpha_{20},$$

откуда

$$\psi_3 = -(\beta_{30} + \beta_{11} \psi_2 - 2\psi_2 \alpha_{20}) / (3\lambda + \gamma).$$

Повторяя эту процедуру, последовательно находим все коэффициенты разложения в ряд Тейлора функции  $\psi$ . Формула для вычисления  $m$ -го коэффициента имеет вид

$$(m\lambda + \gamma) \psi_m = \mathcal{F}_m(\beta_{ij}, \alpha_{ij}, \psi_2, \dots, \psi_{m-1}),$$

где  $\mathcal{F}_m$  — некоторое выражение, зависящее только от конечного числа коэффициентов  $\alpha, \beta$  и первых  $(m-1)$  коэффициентов разложения в ряд функции  $\psi$ . Можно доказать, что при увеличении  $m$  коэффициенты ряда  $\psi_m$  быстро уменьшаются, так что ряд сходится.

Следуя схеме, использованной ранее для неведущего многообразия, можно локально распрямить многообразия  $W^s$  и  $W^u$  вблизи точки  $O$  при помощи замены переменных

$$\begin{aligned} \xi &= u - \psi(v), \\ \eta &= v - \varphi(u). \end{aligned}$$

В новых координатах уравнения инвариантных многообразий принимают вид

$$W_{loc}^s: \eta = 0, \quad W_{loc}^u: \xi = 0.$$

Из инвариантности следует, что если  $\eta = 0$ , то  $\dot{\eta} = 0$ , и если  $\xi = 0$ , то  $\dot{\xi} = 0$ .

Систему можно представить в виде

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= (A^- + h_1(\xi, \eta)) \xi, \\ \dot{\eta} &= (A^+ + h_2(\xi, \eta)) \eta, \end{aligned} \tag{2.7.8}$$

где  $h_i \in \mathbb{C}^{r-1}$  и

$$h_i(0,0) = 0, \quad i = 1, 2. \quad (2.7.9)$$

Характеристические показатели с положительными действительными частями удобнее обозначить через  $\gamma_1, \dots, \gamma_{n-k}$ . Положим также, что характеристические показатели упорядочены следующим образом:

$$\operatorname{Re} \lambda_k \leq \dots \leq \operatorname{Re} \lambda_2 \leq \operatorname{Re} \lambda_1 < 0 < \operatorname{Re} \gamma_1 \leq \operatorname{Re} \gamma_2 \leq \dots \leq \operatorname{Re} \gamma_{n-k}.$$

Значение функций  $h_{1,2}$  вблизи седла является малым, следовательно, пока траектория остается в окрестности седла, в базисе Жордана выполняются неравенства

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|\xi(t)\| &\leq (\operatorname{Re} \lambda_1 + \varepsilon) \|\xi(t)\| \quad \text{при } t \geq 0, \\ \frac{d}{dt} \|\eta(t)\| &\leq (\operatorname{Re} \gamma_1 - \varepsilon) \|\eta(t)\| \quad \text{при } t \leq 0 \end{aligned}$$

(см. доказательство теоремы 2.4). После интегрирования получаем

$$\|\xi(t)\| \leq e^{(\operatorname{Re} \lambda_1 + \varepsilon)t} \|\xi_0\| \quad \text{при } t \geq 0, \quad (2.7.10)$$

$$\|\eta(t)\| \leq e^{(\operatorname{Re} \gamma_1 - \varepsilon)t} \|\eta_0\| \quad \text{при } t \leq 0. \quad (2.7.11)$$

Из данных неравенств следует, что траектория, не лежащая ни в  $W_{loc}^s$ , ни в  $W_{loc}^u$ , покидает любую малую окрестность седла при  $t \rightarrow \pm\infty$ . Кроме того, время, которое положительная полутраектория проводит вблизи седла, пропорционально  $\ln \|\xi_0\|$ , для отрицательной траектории оно пропорционально  $\ln \|\eta_0\|$ .

В ограничении на устойчивое многообразии  $W_{loc}^s : v = \psi(u)$  система (2.7.1) записывается как

$$\dot{u} = A^- u + h_1(u, \psi(u)). \quad (2.7.12)$$

Следовательно, точка  $O$  — устойчивое положение равновесия на многообразии  $W_{loc}^s$ . В общем случае оно является или узлом (при условии, что есть только одна ведущая координата), или фокусом (если есть две ведущие координаты, соответствующие паре комплексно-сопряженных характеристических показателей).

В ограничении на  $W_{loc}^u$  система (2.7.1) принимает вид

$$\dot{v} = A^+ v + h_2(\varphi(v), v). \quad (2.7.13)$$

Здесь точка  $O$  — вполне неустойчивое положение равновесия. В общем случае оно является или узлом, или фокусом.

Теперь, по аналогии с линейным случаем, можно выделить четыре основных вида седловых положений равновесия в зависимости от их поведения по ведущим координатам:

- *седло*: узлы на  $W_{loc}^s$  и  $W_{loc}^u$ ;
- *седло-фокус* (2,1): фокус на  $W_{loc}^s$  и узел на  $W_{loc}^u$ ;
- *седло-фокус* (1,2): узел на  $W_{loc}^s$  и фокус на  $W_{loc}^u$ ;
- *седло-фокус* (2,2): фокусы на  $W_{loc}^s$  и  $W_{loc}^u$ .

Теоремы 2.5 и 2.6 справедливы для систем (2.7.12) и (2.7.13). Следовательно, в  $W_{loc}^s$  существуют *неведущее* и *ведущее устойчивые инвариантные подмногообразия*  $W_{loc}^{ss}, W_{loc}^{sL}$ , а в  $W_{loc}^u$  — *неустойчивые инвариантные подмногообразия*  $W_{loc}^{uu}, W_{loc}^{uL}$ . В завершение раздела скажем о существовании еще трех гладких инвариантных многообразий седлового положения равновесия. Введем следующие обозначения:

$$r_{sL} = \left\lceil \frac{\widehat{\lambda}}{\operatorname{Re} \lambda_1} \right\rceil, \quad (2.7.14)$$

$$r_{uL} = \left\lceil \frac{\widehat{\gamma}}{\operatorname{Re} \gamma_1} \right\rceil, \quad (2.7.15)$$

где  $\widehat{\lambda}$  и  $\widehat{\gamma}$  — действительные части ближайших к мнимой оси неведущих устойчивого и неустойчивого показателей, соответственно; через  $\lceil x \rceil$ , как и прежде, обозначено наибольшее целое число, строго меньшее  $x$ .

**Теорема 2.8.** *В малой окрестности грубого положения равновесия седлового типа существуют следующие гладкие инвариантные многообразия:*

- $\mathbb{C}^{\min(r, r_{uL})}$ -гладкое расширенное устойчивое многообразие  $W_{loc}^{sE}$ , содержащее  $W_{loc}^s$  и касающееся в точке  $O$  плоскости, которая есть прямая сумма устойчивого и ведущего неустойчивого собственных пространств матрицы линеаризации (таким образом,  $W_{loc}^{sE}$  трансверсально  $W_{loc}^{uu}$ );

- $\mathbb{C}^{\min(r, r_s L)}$ -гладкое расширенное неустойчивое многообразие  $W_{loc}^{eE}$ , содержащее  $W_{loc}^u$  и касающееся в точке 0 плоскости, которая есть прямая сумма неустойчивого и ведущего устойчивого собственных пространств матрицы линеаризации (многообразие  $W_{loc}^{eE}$  трансверсально  $W_{loc}^{ss}$ );
- $\mathbb{C}^{\min(r, r_s L, r_u L)}$ -гладкое ведущее седловое многообразие  $W_{loc}^L = W_{loc}^{uE} \cap W_{loc}^{sE}$ .

Доказательство теоремы приводится в главе 5. Заметим только, что, в целом, многообразие  $W_{loc}^{sE}$  не является единственным, однако, любые два таких многообразия в каждой точке многообразия  $W_{loc}^s$  имеют общую касательную. Аналогично, любые два многообразия  $W_{loc}^{uE}$  касаются друг друга на всем  $W_{loc}^u$ .

## 2.8. Решение вблизи седла. Краевая задача

В данном разделе мы рассматриваем метод построения решения для нелинейной системы вблизи положения равновесия седлового типа. Этот метод мы будем использовать на протяжении всей книги, в частности, для доказательства существования и гладкости устойчивого и неустойчивого многообразий положения равновесия седлового типа.

Рассмотрим  $n$ -мерную систему

$$\begin{aligned} \dot{u} &= A^- u + f(u, v), \\ \dot{v} &= A^+ v + g(u, v), \end{aligned} \quad (2.8.1)$$

где  $u \in \mathbb{R}^k$ ,  $v \in \mathbb{R}^m$  ( $k + m = n$ ), а  $f$  и  $g$  —  $\mathbb{C}^r$ -функции ( $r \geq 1$ ), которые вместе с их первыми производными обращаются в нуль в начале координат. Предполагаем, что  $\text{spectr } A^- = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$  лежит строго слева от мнимой оси, а  $\text{spectr } A^+ = \{\gamma_1, \dots, \gamma_m\}$  — строго справа от нее.

При учете нелинейностей в ходе построении решения системы (2.8.1) вблизи седла  $O$  может возникнуть ряд трудностей. Во-первых, траектория системы может оставаться вблизи точки  $O$  очень долгое время: чем ближе начальная точка находится к устойчивому многообразию  $W_{loc}^s$ , тем больше этот временной интервал. Кроме того, если начальная точка принадлежит многообразию  $W_{loc}^s$  данный промежуток времени равен бесконечности. Таким образом, необходимы формулы, которые можно использовать в случае

бесконечно большого временного интервала. Очевидно, что основную трудность здесь представляет неустойчивость задачи с начальными условиями вблизи седла. Рассмотрим, например, решение

$$u(t) = e^{A^- t} u_0, \quad v(t) = e^{A^+ t} v_0$$

задачи с начальными условиями для линеаризованной системы. При введении в  $v_0$  малого возмущения  $\Delta v$  можно определить соответствующее приращение функции  $v(t)$ , описываемое неравенством

$$\|\Delta v(t)\| = \|e^{A^+ t} \Delta v\| \gg \|\Delta v\|.$$

Из этого неравенства вытекает, что произвольно малые возмущения исходных данных могут вызывать конечные изменения решений при условии, что время интегрирования достаточно велико. Такой вид неустойчивости встречается не только при моделировании на ЭВМ, но также при построении аналитических выражений с помощью итераций. Таким образом, если находить решения системы (2.8.1) методом последовательных приближений, начиная с решения линейной системы, то на  $m$ -м шаге появляются члены вида  $(e^{A^+ t} v_0)^m$  с произвольно большими показателями.

Конечно, аналогичная задача возникает также вблизи вполне неустойчивой точки равновесия. Однако в этом случае решение задачи с начальными условиями становится устойчивым при обращении переменной времени. Но для седла после замены  $t \rightarrow -t$  решение становится устойчивым относительно переменных  $v$ , но неустойчивым относительно  $u$ .

Возникшие трудности можно преодолеть, главным образом, путем интегрирования системы по переменным  $u$  по возрастающему времени и по переменным  $v$  по убывающему. Вместо решения задачи с начальными условиями, необходимо решить следующую *краевую задачу*:

при заданных значениях  $u_0$  и  $v_1$ , где  $\|u_0\| \leq \varepsilon$ ,  $\|v_1\| \leq \varepsilon$  и  $\tau > 0$  необходимо найти такое решение системы (2.8.1) на интервале  $t \in [0, \tau]$ , чтобы

$$u(0) = u_0, \quad v(\tau) = v_1. \quad (2.8.2)$$

Для линейной системы решение краевой задачи имеет вид

$$u(t) = e^{A^- t} u_0, \quad v(t) = e^{-A^+ (\tau-t)} v_1. \quad (2.8.3)$$

Так как и  $\|e^{A^- t}\|$ , и  $\|e^{A^+ (\tau-t)}\|$  ограничены при всех значениях  $t \in [0, \tau]$  (см. неравенство (2.3.17)), данное решение устойчиво относительно возмущений исходных величин  $(u_0, v_1, \tau)$ . Этот прием можно также использовать в

нелинейном случае. Как будет показано, решение краевой задачи для нелинейной системы можно получить при помощи метода последовательных приближений, начиная с решения (2.8.3) линейной задачи.

**Теорема 2.9.** Для достаточно малого  $\varepsilon > 0$  и любого  $\tau \geq 0$  при таких  $u_0$  и  $v_1$ , что  $\|u_0\| \leq \varepsilon$ , а  $\|v_1\| \leq \varepsilon$ , решение краевой задачи (2.8.2) существует, является единственным и непрерывно зависит от  $(u_0, v_1, \tau)$ .

Для двумерной системы существование такого решения геометрически очевидно, см. рис. 2.8.1. В малой окрестности точки  $O$  имеется бесконечное множество траекторий, берущих начало на прямой  $u = u_0$  и заканчивающихся на прямой  $v = v_1$ . Время перехода может изменяться от нуля до бесконечности.

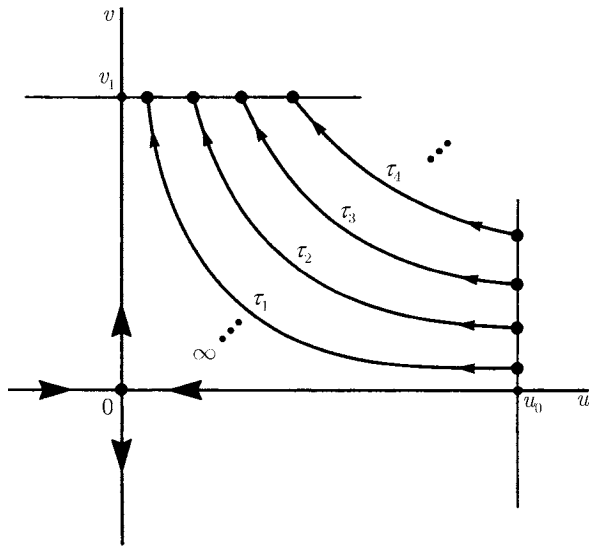


Рис. 2.8.1. Краевая задача вблизи седла. Время перехода  $\tau$  стремится к бесконечности, если начальная точка на прямой  $u = u_0$  стремится к устойчивому многообразию  $v = 0$

В общем случае, теорема 2.9 доказывается аналитически. Рассмотрим

систему интегральных уравнений

$$\begin{aligned} u(t) &= e^{A^-t} u_0 + \int_0^t e^{A^-(t-s)} f(u(s), v(s)) ds \\ v(t) &= e^{-A^+(\tau-t)} v_1 - \int_t^\tau e^{-A^+(s-t)} g(u(s), v(s)) ds \end{aligned} \quad (2.8.4)$$

относительно функций  $u(t)$  и  $v(t)$  на интервале  $t \in [0, \tau]$ . Дифференцируя правую часть формулы (2.8.4) по  $t$ , можно легко проверить, что любое непрерывное решение  $\{u(t), v(t)\}$  данной системы является решением системы (2.8.1). Кроме того, поскольку  $u(0) = u_0$ , а  $v(\tau) = v_1$ , решение системы (2.8.4) есть искомое решение краевой задачи (2.8.2).

Верно также и обратное утверждение. Пусть  $\{u(t), v(t)\}_{t \in [0, \tau]}$  — решение краевой задачи. Из системы (2.8.1) следует, что

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(e^{-A^-t} u(t)) &= e^{-A^-t} f(u(t), v(t)), \\ \frac{d}{dt}(e^{-A^+t} v(t)) &= e^{-A^+t} g(u(t), v(t)), \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} e^{-A^-t} u(t) &= u_0 + \int_0^t e^{-A^-s} f(u(s), v(s)) ds, \\ e^{-A^+t} v(t) + \int_t^\tau e^{-A^+s} g(u(s), v(s)) ds &= e^{-A^+\tau} v_1, \end{aligned}$$

и, таким образом, равенства (2.8.4) выполняются. Следовательно, решение краевой задачи эквивалентно решению системы интегральных уравнений (2.8.4).

Построим решение системы (2.8.4) при помощи метода последовательных приближений. Для первого приближения полагаем

$$u^{(1)}(t) = e^{A^-t} u_0, \quad v^{(1)}(t) = e^{-A^+(\tau-t)} v_1.$$

Для каждого последующего приближения используем формулу

$$\begin{aligned} u^{(n+1)}(t) &= e^{A^-t} u_0 + \int_0^t e^{A^-(t-s)} f(u^{(n)}(s), v^{(n)}(s)) ds, \\ v^{(n+1)}(t) &= e^{-A^+(\tau-t)} v_1 - \int_t^\tau e^{-A^+(s-t)} g(u^{(n)}(s), v^{(n)}(s)) ds. \end{aligned} \quad (2.8.5)$$

Покажем, что данная последовательность равномерно стремится к предельной функции  $\{u^*(t), v^*(t)\}$ . В первую очередь докажем, что для всех  $n$  и  $t \in [0, \tau]$  выполняются неравенства

$$\|u^{(n)}(t)\| \leq 2\varepsilon, \quad \|v^{(n)}(t)\| \leq 2\varepsilon \quad (2.8.6)$$

При  $n = 1$  неравенство (2.8.6) вытекает непосредственно из неравенств  $\|u_0\| \leq \varepsilon$  и  $\|v_1\| \leq \varepsilon$ , а также

$$\begin{aligned} \|e^{A^-t}\| &\leq e^{-\lambda t}, \\ \|e^{-A^+(\tau-t)}\| &\leq e^{-\gamma(\tau-t)}, \end{aligned} \quad (2.8.7)$$

где значения  $\lambda > 0$  и  $\gamma > 0$  таковы, что спектр матрицы  $A^-$  лежит в комплексной плоскости строго слева от прямой  $\operatorname{Re} z = -\lambda$ , а спектр матрицы  $A^+$  — строго справа от прямой  $\operatorname{Re} z = \gamma$ .

Чтобы доказать неравенства (2.8.6) для всех значений  $n$  используем метод математической индукции. Во-первых, заметим, что поскольку функции  $f$  и  $g$  вместе с их первыми производными обращаются в нуль в точке  $O$ , выполняются неравенства

$$\left\| \frac{\partial(f, g)}{\partial(u, v)} \right\| \leq \delta, \quad (2.8.8)$$

$$\|f, g\| \leq \delta \|u, v\|, \quad (2.8.9)$$

где через  $\|u, v\|$  обозначен  $\max\{\|u\|, \|v\|\}$ . В данных выражениях постоянная  $\delta$  при уменьшении размера окрестности точки  $O$  становится произвольно малой. Примем значение  $\varepsilon$  таким малым, чтобы для всех  $u$  и  $v$  из  $2\varepsilon$ -окрестности седла выполнялось неравенство

$$2\delta \max(\lambda^{-1}, \gamma^{-1}) \leq 1 \quad (2.8.10)$$

Из формул (2.8.5) и (2.8.9) получаем

$$\begin{aligned} \|u^{(n+1)}(t)\| &\leq \|u_0\| + \delta \int_0^t e^{-\lambda(t-s)} \|u^{(n)}(s), v^{(n)}(s)\| ds, \\ \|v^{(n+1)}(t)\| &\leq \|v_1\| + \delta \int_y^\tau e^{-\gamma(s-t)} \|u^{(n)}(s), v^{(n)}(s)\| ds, \end{aligned}$$

откуда

$$\|u^{(n+1)}(t), v^{(n+1)}(t)\| \leq \varepsilon + \delta \max(\lambda^{-1}, \gamma^{-1}) \max_{0 \leq s \leq \tau} \|u^{(n)}(s), v^{(n)}(s)\|.$$

Используя неравенство (2.8.10), получаем, что если

$$\|u^{(n)}(t), v^{(n)}(t)\| \leq 2\varepsilon,$$

то

$$\|u^{(n+1)}(t), v^{(n+1)}(t)\| \leq 2\varepsilon,$$

то есть неравенство (2.8.6) выполняются для всех  $n$ . Докажем, что

$$\begin{aligned} &\max_{0 \leq t \leq \tau} \|u^{(n+1)}(t) - u^{(n)}(t), v^{(n+1)}(t) - v^{(n)}(t)\| \\ &\leq \frac{1}{2} \max_{0 \leq s \leq \tau} \|u^{(n)}(s) - u^{(n-1)}(s), v^{(n)}(s) - v^{(n-1)}(s)\|. \end{aligned} \quad (2.8.11)$$

Действительно, согласно уравнениям (2.8.5)

$$\begin{aligned} &\|u^{(n+1)}(t) - u^{(n)}(t)\| \\ &\leq \int_0^t \|e^{A^-(t-s)}\| \|f(u^{(n)}(s), v^{(n)}(s)) - f(u^{(n-1)}(s), v^{(n-1)}(s))\| ds. \end{aligned}$$

Следовательно, учитывая неравенство

$$\begin{aligned} &\|f(u^{(n)}(s), v^{(n)}(s)) - f(u^{(n-1)}(s), v^{(n-1)}(s))\| \\ &\leq \max_{(u,v)} \left\| \frac{\partial(f, g)}{\partial(u, v)} \right\| \|u^{(n)}(s) - u^{(n-1)}(s), v^{(n)}(s) - v^{(n-1)}(s)\| \end{aligned}$$

из формул (2.8.7) и (2.8.8) получаем, что

$$\begin{aligned} & \|u^{(n+1)}(t) - u^{(n)}(t)\| \\ & \leq \delta \lambda^{-1} \max_{0 \leq s \leq \tau} \|u^{(n)}(s) - u^{(n-1)}(s), v^{(n)}(s) - v^{(n-1)}(s)\|. \end{aligned}$$

Аналогично,

$$\begin{aligned} & \|v^{(n+1)}(t) - v^{(n)}(t)\| \\ & \leq \delta \gamma^{-1} \max_{0 \leq s \leq \tau} \|u^{(n)}(s) - u^{(n-1)}(s), v^{(n)}(s) - v^{(n-1)}(s)\|. \end{aligned}$$

Так как  $u^{(n)}$  и  $v^{(n)}$  при всех значениях  $n$  не превосходят  $2\varepsilon$ , и величина  $\delta$ , входящая в два последних неравенства, удовлетворяет неравенству (2.8.10), то выполнено (2.8.11).

В силу (2.8.11) ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (u^{(n+1)}(t) - u^{(n)}(t), v^{(n+1)}(t) - v^{(n)}(t))$$

ограничивается сверху геометрической прогрессией с коэффициентом  $1/2$ . Таким образом, ряд равномерно сходится к некоторой непрерывной функции  $\{u^*(t), v^*(t)\}$ . По построению  $\{u^*(t), v^*(t)\}$  — предел последовательных приближений (2.8.5). Переходя в уравнениях (2.8.5) к пределу  $n \rightarrow \infty$ , находим, что  $\{u^*(t), v^*(t)\}$  удовлетворяет системе (2.8.4), то есть получается решение краевой задачи. Так как сходимость равномерна, то функция  $\{u^*(t), v^*(t)\}$  непрерывно зависит от начального значения  $(u_0, v_1, \tau)$ .

Чтобы доказать единственность решения, допустим, что уравнение (2.8.4) имеет второе решение  $\{u^{**}(t), v^{**}(t)\}_{t \in [0, \tau]}$ . Тогда, с помощью алгоритма, используемого для доказательства неравенства (2.8.11), можно показать, что неравенство

$$\begin{aligned} & \|u^{**}(t) - u^*(t), v^{**}(t) - v^*(t)\| \\ & \leq \frac{1}{2} \max_{0 \leq s \leq \tau} \|u^{**}(s) - u^*(s), v^{**}(s) - v^*(s)\| \end{aligned}$$

справедливо при всех значениях  $t \in [0, \tau]$ , то есть  $u^{**} \equiv u^*$ , а  $v^{**} \equiv v^*$ , что и требовалось доказать.

**Замечание.** Из доказательства следует, что решения краевой задачи существуют и являются непрерывными, даже если функции  $f$  и  $g$  в правой

части системы (2.8.1) явно зависят от времени. Для этого необходимо, чтобы при всех значениях  $t$  функции  $f$  и  $g$  обращались в нуль в точке  $u = 0, v = 0$ , а норма их производных относительно  $u$  и  $v$  была ограничена малой постоянной  $\delta$  (см. неравенства (2.8.8)–(2.8.10)) равномерно по  $t$ . Следует подчеркнуть, что гладкости функций  $f$  и  $g$  по  $t$  не требуется.

**Теорема 2.10.** *Решение краевой задачи  $\mathbb{C}^r$ -гладко зависит от  $(u_0, v_1, t, \tau)$ .*

**Доказательство.** Пусть  $\{u^*(t), v^*(t)\}_{t \in [0, \tau]}$  — решение краевой задачи с граничным условием  $(u_0, v_1, \tau)$ . Введем обозначение  $v_0 = v^*(0)$ . Траектория  $\{u^*, v^*\}$ , являясь решением задачи с начальными условиями,  $\mathbb{C}^r$ -гладко зависит от  $(u_0, v_0, t, \tau)$ . Следовательно, чтобы доказать теорему необходимо показать, что  $v_0$  гладко зависит от  $(u_0, v_1, t, \tau)$ . Так как функция  $v_1 = v^*(t = \tau)$  является гладкой относительно  $(u_0, v_0, t, \tau)$ , достаточно (по теореме о неявной функции) проверить, что производная  $\partial v_1 / \partial v_0 = \partial v^* / \partial v_0|_{t=\tau}$  невырождена.

Производные  $\partial u^* / \partial v_0$  и  $\partial v^* / \partial v_0$  можно найти, решая систему уравнений в вариациях

$$\begin{aligned} \dot{U} &= A^- U + f'_u(u^*(t), v^*(t)) U + f'_v(u^*(t), v^*(t)) V, \\ \dot{V} &= A^+ V + g'_u(u^*(t), v^*(t)) U + g'_v(u^*(t), v^*(t)) V, \end{aligned} \quad (2.8.12)$$

со следующими начальными условиями:

$$U(0) = 0, \quad V(0) = I_m, \quad (2.8.13)$$

где  $U \equiv \partial u^* / \partial v_0$ ,  $V \equiv \partial v^* / \partial v_0$ , а  $I_m$  — единичная матрица размерности  $m \times m$ . В связи с тем, что матрица производных  $\partial v_1 / \partial v_0 \equiv V(\tau)$  не является вырожденной, существует такая матрица  $Q$ , что

$$V(\tau) Q = I_m. \quad (2.8.14)$$

Кроме того, заметим, что если матрица  $Q$  существует, то

$$Q = \left( \frac{\partial v_1}{\partial v_0} \right)^{-1}. \quad (2.8.15)$$

Уравнения (2.8.12) линейны относительно переменных  $U$  и  $V$ , следовательно, при умножении справа на  $Q$  обеих частей уравнений (2.8.12) становится очевидным, что  $\tilde{U} \equiv UQ$  и  $\tilde{V} \equiv VQ$  также удовлетворяют уравнениям



(2.8.12). Притом, для того, чтобы они удовлетворяли равенствам (2.8.13) и (2.8.14) должны выполняться следующие условия:

$$\tilde{U}(0) \equiv 0, \quad \tilde{V}(\tau) \equiv I_m. \quad (2.8.16)$$

Таким образом, матрица производных  $\partial v_1/\partial v_0$  не является вырожденной тогда и только тогда, когда краевая задача для системы уравнений в вариациях имеет решение.

В завершение доказательства теоремы заметим, что существование и единственность решения краевой задачи (2.8.16) для системы уравнений в вариациях (2.8.12) следует из замечания к предыдущей теореме. Кроме того, производные правой части системы (2.8.12) по  $U$  и  $V$  равны (без учета матриц  $A^+$  и  $A^-$  с постоянными элементами)  $f'(u^*(t), v^*(t))$  и  $g'(u^*(t), v^*(t))$ , соответственно. Следовательно, их можно оценить при помощи той же константы  $\delta$ , что и производные по  $u$  и  $v$  нелинейной части, входящей в правую часть системы (2.8.1). Таким образом, краевая задача для системы уравнений в вариациях имеет решение при  $\|u_0, v_1\| \leq \varepsilon$ , где  $\varepsilon$  берется таким же, как в краевой задаче для исходной системы.

Из доказательства следует, что производная по  $v_1$  решения  $(u^*(t), v^*(t))$  краевой задачи для системы (2.8.1) имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial(u^*(t), v^*(t))}{\partial v_1} &= \frac{\partial(u^*(t), v^*(t))}{\partial v_0} \left( \frac{\partial v_1}{\partial v_0} \right)^{-1} \\ &= (U(t), V(t))V(\tau)^{-1} = (U(t), \tilde{V}(t)), \end{aligned}$$

где  $(U, V)$  — решение задачи с начальными условиями (2.8.12), (2.8.13), а  $(\tilde{U}, \tilde{V})$  — решение краевой задачи (2.8.12), (2.8.16).

Аналогично можно доказать, что производную по  $u_0$  можно найти как решение краевой задачи

$$U(0) = I_n, \quad V(\tau) = 0. \quad (2.8.17)$$

*Заключение. Производные по  $u_0$  и  $v_1$  решения краевой задачи для системы (2.8.1) находятся как решения соответствующих краевых задач, полученных путем формального дифференцирования уравнений и граничных условий.*

Подобным образом можно показать, что если система (2.8.1) гладко зависит от некоторого множества параметров  $\mu$ , то производная по  $\mu$  траектории  $\{u^*, v^*\}$  находится путем решения краевой задачи

$$U(0) = 0, \quad V(\tau) = 0 \quad (2.8.18)$$

для неоднородной системы уравнений в вариациях, полученных путем формального дифференцирования системы (2.8.1) по  $\mu$ , то есть

$$\begin{aligned} \dot{U} &= A^-U + f'_u(u^*(t), v^*(t), \mu) U \\ &\quad + f'_v(u^*(t), v^*(t), \mu) V + f'_\mu(u^*(t), v^*(t), \mu) \\ \dot{V} &= A^+V + g'_u(u^*(t), v^*(t), \mu) U \\ &\quad + g'_v(u^*(t), v^*(t), \mu) V + g'_\mu(u^*(t), v^*(t), \mu). \end{aligned} \quad (2.8.19)$$

Аналогично решению краевой задачи для однородных уравнений, решение задачи (2.8.18), (2.8.19) можно получить как предел последовательных приближений для системы интегральных уравнений

$$\begin{aligned} U(t) &= \int_0^t e^{A^-(t-s)} [f'_u(s)U(s) + f'_v(s)V(s) + f'_\mu(s)] ds \\ V(t) &= - \int_t^\tau e^{A^-(s-t)} [g'_u(s)U(s) + g'_v(s)V(s) + g'_\mu(s)] ds. \end{aligned} \quad (2.8.20)$$

Доказательство равномерной сходимости последовательных приближений аналогично доказательству теоремы 2.9. Ключевое неравенство (2.8.11), определяющее сходимость, выполняется при том же условии,

$$\left\| \frac{\partial(f, g)}{\partial(u, v)} \right\| \leq \delta,$$

что и в теореме 2.9, то есть единственное решение краевой задачи (2.8.18), (2.8.19) существует при том же значении  $\varepsilon$ , что и решение для исходной системы.

Производные более высокого порядка по переменным  $(u_0, v_1)$  также можно найти путем решения краевой задачи, рассматривая уравнения в вариациях для уравнений в вариациях первого порядка (2.8.12). В связи с тем, что  $(u_0, v_1)$  больше не являются граничными условиями для  $\partial(u^*, v^*)/\partial(u_0, v_1)$  (см. (2.8.16) и (2.8.17), а фигурируют в уравнениях (2.8.12) только как параметры (так как правая часть системы (2.8.12) зависит от  $\{u^*(t), v^*(t)\}$ , а  $\{u^*(t), v^*(t)\}$  зависит от  $(u_0, v_1)$ ), вторые произ-

водные и производные высшего порядка находятся аналогично решениям неоднородных краевых задач, подобных задачам (2.8.18) и (2.8.19).

Например, краевую задачу для  $\partial^2(u^*, v^*)/\partial(v_1)^2$  можно получить путем формального дифференцирования по  $v_1$  уравнений в вариациях (2.8.12) с граничными условиями (2.8.16), то есть

$$\begin{aligned}\dot{Z} &= A^- Z + f'_u Z + f'_v W \\ &+ f''_{uu} U^* U^* + f''_{uv} V^* U^* + f''_{vu} U^* V^* + f''_{vv} V^* V^*, \\ \dot{W} &= A^+ W + g'_u Z + g'_v W \\ &+ g''_{uu} U^* U^* + g''_{uv} V^* U^* + g''_{vu} U^* V^* + g''_{vv} V^* V^*, \\ Z(0) &= 0, \quad W(\tau) = 0,\end{aligned}$$

В этих выражениях были использованы следующие обозначения:

$$U^*(t) \equiv \partial u^*(t)/\partial v_1, \quad V^*(t) \equiv \partial v^*(t)/\partial v_1$$

и

$$Z \equiv \partial^2(u^*)/\partial(v_1)^2, \quad W \equiv \partial^2(v^*)/\partial(v_1)^2.$$

Покажем, каким образом данный метод можно использовать для доказательства существования и гладкости устойчивого и неустойчивого многообразий (теорема 2.7, приведенная в предыдущем разделе). Рассмотрим только случай устойчивого многообразия  $W^s$ , так как для неустойчивого многообразия применим тот же метод, но при обращении времени.

Заметим, что выводы о равномерной сходимости последовательных приближений (2.8.5) и, следовательно, последовательных приближений для краевых задач, составленных для уравнений в вариациях (2.8.12), а также для неоднородных уравнений в вариациях (2.8.19) и т. д., остаются верными при всех  $\tau \geq 0$ , включая  $\tau = +\infty$ . Таким образом, система

$$\begin{aligned}u(t) &= e^{A^- t} u_0 + \int_0^t e^{A^-(t-s)} f(u(s), v(s)) ds, \\ v(t) &= - \int_t^\infty e^{-A^+(s-t)} g(u(s), v(s)) ds,\end{aligned}\tag{2.8.21}$$

полученная из системы интегральных уравнений (2.8.4) подстановкой  $\tau = +\infty$ , для всех  $\|u_0\| \leq \varepsilon$  имеет единственное решение, лежащее в  $2\varepsilon$ -окрестности точки  $O$  при  $t \geq 0$ . Кроме того, данное решение  $C^r$ -гладко зависит от  $u_0$ .

При помощи прямого дифференцирования легко проверить, что решение системы (2.8.21) также является решением системы (2.8.1).

И наоборот, из доказательства теоремы 2.9 следует, что для любого решения  $\{u(t), v(t)\}$  системы (2.8.1), находящегося в малой окрестности точки  $O$  при всех  $t \geq 0$ , справедлива зависимость (2.8.4), которой удовлетворяют значения  $u_0 = u(0)$  и  $v_1 = v(\tau)$  при любых  $\tau \geq 0$ . Следовательно, переходя к пределу в (2.8.4), можно убедиться, что любое ограниченное решение системы (2.8.1) удовлетворяет системе интегральных уравнений (2.8.21).

Таким образом, для любого  $u_0$ , удовлетворяющего неравенству  $\|u_0\| \leq \varepsilon$ , существует единственное значение  $v_0$  такое, что траектория, выходящая из точки  $(u_0, v_0)$ , не покидает окрестность седла при  $t \rightarrow +\infty$ . Введем обозначение  $v_0 = \psi(u_0)$ . По определению, объединение всех точек  $(u_0, \psi(u_0))$  — инвариантное множество системы (2.8.1). Оно состоит из всех траекторий, остающихся в окрестности положения равновесия  $O$  при всех  $t \geq 0$ . В частности, данное множество содержит саму точку  $O$ , то есть  $\psi(0) = 0$ . Поскольку  $\psi \in C^r$ , это множество — гладкое инвариантное многообразие. На данном многообразии система имеет вид

$$\dot{u} = A^- u + f(u, \psi(u)).$$

В связи с тем, что в начале координат производные  $f'_u$  и  $f'_v$  обращаются в нуль, линеаризованное уравнение можно записать как

$$\dot{u} = A^- u.$$

Спектр матрицы  $A^-$  лежит слева от мнимой оси, следовательно, положение равновесия  $O$  на рассматриваемом инвариантном многообразии экспоненциально асимптотически устойчиво. Значит, все траектории в данном многообразии стремятся к точке  $O$  при  $t \rightarrow +\infty$ , то есть это гладкое инвариантное многообразие есть устойчивое инвариантное многообразие  $W^s$  положения равновесия  $O$ . Таким образом, было доказано существование и гладкость многообразия  $W^s$ , в связи с чем доказательство теоремы 2.7 можно считать полным.

В заключение заметим, что рассмотренный метод сведения задачи о существовании инвариантного многообразия к нахождению решения ин-

тегрального уравнения был предложен Ляпуновым и оказался особенно полезным для изучения неавтономных систем.

## 2.9. Задача гладкой линеаризации. Резонансы

Известно (см. теорему Гробмана–Хартмана, приведенную в разделе 2.5), что в окрестности грубого положения равновесия система

$$\dot{x} = Ax + f(x), \quad (2.9.1)$$

где

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 0,$$

топологически эквивалентна линеаризованной системе

$$\dot{y} = Ay. \quad (2.9.2)$$

Возникает закономерный вопрос: можно ли при помощи некоторой гладкой замены переменных

$$y = x + \varphi(x), \quad (2.9.3)$$

где  $\varphi(0) = 0$  и  $\varphi'(0) = 0$ , привести систему (2.9.1) к виду (2.9.2)? Этот вопрос впервые сформулировал Пуанкаре и рассмотрел его аналитически. Заметим, что при гладкой замене переменных сохраняются собственные значения  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  матрицы  $A$ , более того, при замене переменных, локально близкой к тождественной, сохраняется и сама матрица  $A$ . Следует учесть, что такая замена переменных является локальной, то есть предполагается, что гладкая эквивалентность имеет место только в некоторой малой окрестности положения равновесия  $O$ .

При приведении исходной нелинейной системы к линейному виду возникает ряд трудностей, главная из которых обусловлена наличием резонансов.

Множество  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$  собственных значений  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  матрицы  $A$  называется *резонансным*, если существует линейная зависимость

$$\lambda_k = (m, \lambda) = \sum_{j=1}^n m_j \lambda_j, \quad (2.9.4)$$

где  $m = (m_1, \dots, m_n)$  — строка неотрицательных целых чисел таких, что  $|m| = \sum_{j=1}^n m_j \geq 2$ . Саму зависимость называют *резонансом*, а  $|m|$  — *порядком резонанса*.

Пусть функция  $f(x)$  является  $\mathbb{C}^N$ -гладкой, тогда при разложении в ряд она принимает вид

$$f(x) = f_2(x) + \dots + f_N(x) + o_N(x) \quad (2.9.5)$$

где  $f_l(x)$  ( $l = 2, \dots, N$ ) — однородный полином степени  $l$ ; далее через  $o_N(\cdot)$  обозначены члены, которые вместе с их  $N$  первыми производными обращаются в нуль в начале координат.

Следующие леммы хорошо известны.

**Лемма 2.2.** Пусть  $f(x) \in \mathbb{C}^N$ , и резонансов порядка  $|m| \leq N$  нет. Тогда существует полиномиальная замена переменных

$$y = x + \varphi_2(x) + \dots + \varphi_N(x) \quad (2.9.6)$$

(где  $\varphi_l(x)$  ( $l = 2, \dots, N$ ) — однородный полином степени  $l$ ), с помощью которой система (2.9.1) приводится к виду

$$\dot{y} = Ay + o_N(y). \quad (2.9.7)$$

Доказательство. Подставляя выражение (2.9.6) в (2.9.1), получаем

$$\begin{aligned} \dot{y} &= \dot{x} + \sum_{l=2}^N \frac{\partial \varphi_l(x)}{\partial x} \dot{x} \\ &= Ax + f_2(x) + \dots + f_N(x) + o_N(x) \\ &\quad + \sum_{l=2}^N \frac{\partial \varphi_l(x)}{\partial x} [Ax + f_2(x) + \dots + f_N(x) + o_N(x)] \\ &= Ay - A\varphi_2(x) - \dots - A\varphi_N(x) + f_2(x) + \dots + f_N(x) \\ &\quad + \sum_{l=2}^N \frac{\partial \varphi_l(x)}{\partial x} [Ax + f_2(x) + \dots + f_N(x)] + \dots, \end{aligned} \quad (2.9.8)$$

где последнее слагаемое, обозначенное многоточием, содержит члены степени  $N + 1$  и выше. Оставшиеся члены (кроме  $Ay$ ) должны взаимно уничтожиться, поэтому следует положить, что  $\varphi_2(x)$  удовлетворяет уравнению

$$-A\varphi_2(x) + f_2(x) + \frac{\partial \varphi_2(x)}{\partial x} Ax = 0; \quad (2.9.9)$$

$\varphi_3(x)$  удовлетворяет уравнению

$$-A\varphi_3(x) + f_3(x) + \frac{\partial \varphi_3(x)}{\partial x} Ax + \frac{\partial \varphi_2(x)}{\partial x} f_2(x) = 0; \quad (2.9.10)$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

а  $\varphi_N(x)$  удовлетворяет уравнению

$$-A\varphi_N(x) + f_N(x) + \frac{\partial \varphi_N(x)}{\partial x} Ax + \sum_{p+q=N+1} \frac{\partial \varphi_p(x)}{\partial x} f_q(x) = 0. \quad (2.9.11)$$

Докажем лемму для случая диагональной матрицы  $A$

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Напомним, что  $\varphi_l(x)$  и  $f_l(x)$  — однородные вектор-полиномы, то есть

$$\begin{aligned} \varphi_l(x) &= (\varphi_{l1}(x), \dots, \varphi_{lk}(x), \dots, \varphi_{ln}(x)), \\ f_l(x) &= (f_{l1}(x), \dots, f_{lk}(x), \dots, f_{ln}(x)), \\ &k = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Представим полиномы  $\varphi_{lk}(x)$  и  $f_{lk}(x)$  как

$$\begin{aligned} \varphi_{lk}(x) &= \sum_{m_1 + \dots + m_n = l} c_{mk} x^m, \\ f_{lk}(x) &= \sum_{m_1 + \dots + m_n = l} d_{mk} x^m. \end{aligned}$$

Уравнения (2.9.9)–(2.9.11) можно записать в покомпонентном виде

$$-\lambda_k \varphi_{2k}(x) + \sum_{j=1}^n \lambda_j \frac{\partial \varphi_{2k}(x)}{\partial x_j} x_j + f_{2k}(x) = 0, \quad (2.9.12)$$

$$-\lambda_k \varphi_{3k}(x) + \sum_{j=1}^n \lambda_j \frac{\partial \varphi_{3k}(x)}{\partial x_j} x_j + f_{3k}(x) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial \varphi_{2k}(x)}{\partial x_j} f_{2j}(x) = 0, \quad (2.9.13)$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$-\lambda_k \varphi_{Nk}(x) + \sum_{j=1}^n \lambda_j \frac{\partial \varphi_{Nk}(x)}{\partial x_j} x_j + f_{Nk}(x) + \sum_{j=1}^n \sum_{p+q=N+1} \frac{\partial \varphi_{pk}(x)}{\partial x_j} f_{qj}(x) = 0, \quad (2.9.14)$$

где  $k = 1, 2, \dots, n$ .

Сначала решим уравнение (2.9.12). Приравнивая коэффициенты при подобных членах, получаем

$$[(m, \lambda) - \lambda_k] c_{mk} + d_{mk} = 0. \quad (2.9.15)$$

Очевидно это уравнение может быть разрешено, поскольку резонансов нет, и мы находим

$$c_{mk} = \frac{d_{mk}}{\lambda_k - (m, \lambda)}, \quad (2.9.16)$$

и, соответственно, находим выражение для  $\varphi_2(x)$ .

Подставляя  $\varphi_2(x)$  в формулу (2.9.13), получаем уравнение для неизвестных коэффициентов полинома  $\varphi_3(x)$ :

$$[(m, \lambda) - \lambda_k] c_{mk} + \tilde{d}_{mk} = 0 \quad (2.9.17)$$

В этом уравнении  $\tilde{d}_{mk} = d_{mk} + d'_{mk}$ , где  $d'_{mk}$  — это коэффициент при  $x^m$  во второй сумме уравнения (2.9.13). Аналогичным образом находим все полиномы  $\varphi_l$  ( $l = 2, \dots, N$ ), удовлетворяющие уравнениям (2.9.9)–(2.9.11).

Лемма верна и в случае, когда все собственные значения матрицы  $A$  вещественны и не равны между собой (поскольку в данном случае  $A$  приводится к диагональному виду при помощи линейной замены переменных).

Если имеются простые комплексные собственные значения, то матрица  $A$  приводится к блочно-диагональному виду:

$$A_{kk} = \lambda_k, \text{ если значение } \lambda_k \text{ вещественно}$$

$$A_{kk} = A_{k+1,k+1} = \operatorname{Re} \lambda_k, \quad A_{k,k+1} = -A_{k+1,k} = \operatorname{Im} \lambda_k, \text{ если } \lambda_k = \lambda_{k+1}^*,$$

где  $*$  означает комплексное сопряжение. Данная матрица приводится к диагональному виду при помощи *комплексного* преобразования координат

$$x'_k = x_k, \text{ если значение } \lambda_k \text{ вещественно}$$

$$x'_k = x_k + ix_{k+1}, \quad x'_{k+1} = x_k - ix_{k+1}, \text{ если } \lambda_k = \lambda_{k+1}^*.$$

Поскольку  $x'_{k+1} = x_k^*$ , новая функция  $f$  удовлетворяет равенству

$$f_{l,k+1}(x') = f_{lk}(x')^*$$

при тех значениях  $k$ , при которых собственное значение  $\lambda_k = \lambda_{k+1}^*$  комплексно. Тогда преобразование координат (2.9.12)–(2.9.14) удовлетворяет равенству

$$\varphi_{l,k+1}(x') = \varphi_{lk}(x')^*$$

при тех же значениях  $k$ . Очевидно, что в таком случае, преобразование координат

$$y_k = x_k + \sum_{l=2}^N \operatorname{Re} \varphi_{lk}(x')$$

$$y_{k+1} = x_{k+1} + \sum_{l=2}^N \operatorname{Im} \varphi_{lk}(x')$$

приводит систему к требуемому виду (2.9.7).

Если имеются кратные собственные значения, матрицу  $A$  можно записать в жордановой форме (вещественной или комплексной): собственные значения  $\lambda_k$  занимают главную диагональ, притом некоторые из наддиагональных элементов могут быть отличны от нуля:

$$A_{k,k+1} = \delta_k.$$

Таким образом, в уравнениях (2.9.12)–(2.9.14) могут появиться дополнительные члены

$$\delta_k \varphi_{l,k+1}(x) \text{ и } \delta_j \frac{\partial \varphi_{lk}}{\partial x_j} x_{j+1}.$$

Очевидно, что при этом не изменяется заключение леммы: зависимость (2.9.17), при помощи которой индуктивно определяются искомые коэффициенты  $c_{mk}$ , не изменяется, за исключением того, что  $d'_{mk}$  теперь выражается через более широкий диапазон коэффициентов  $c_{m'k'}$ . То есть  $d'_{mk}$  является функцией таких коэффициентов  $c_{m'k'}$ , что

$$(1) |m'| < |m|, \text{ или } (2) m' = m \text{ и } k' > k,$$

$$\text{или } (3) |m'| = |m| \text{ и } \sum_{j=1}^n j \cdot m'_j < \sum_{j=1}^n j \cdot m_j \quad (2.9.18)$$

(если собственные значения – простые, то имеет место лишь случай (1)). Таким образом, среди вектор-мономов  $x^m e_k$  (где  $e_k = \underbrace{(0, 0, \dots, 1, 0, \dots, 0)}_k$ ) можно ввести следующий *частичный порядок*:

$x^m e_k$  является величиной большего порядка, чем  $x^{m'} e_{k'}$ , если выполняется один из трех пунктов (2.9.18).

В таком случае, при помощи формулы (2.9.17) можно последовательно определить коэффициенты  $c_{mk}$  для мономов более высокого порядка, что и требовалось доказать.

Непосредственно из уравнения (2.9.15) следует, что в случае резонанса  $\lambda_k = (m, \lambda)$  нельзя исключить мономы  $d_{mk} x^m e_k$ . Таким образом, *достаточно гладкая линеаризация невозможна в резонансном случае*. Аналогично лемме 2.2 можно доказать следующий результат.

**Лемма 2.3.** Пусть  $f(x) \in \mathbb{C}^N$ . Тогда существует полиномиальная замена переменных, приводящая систему (2.9.1) к виду

$$\dot{y} = Ay + R(y) + o_N(y) \quad (2.9.19)$$

где

$$R(y) = \sum_{\substack{2 \leq |m| \leq N \\ (m, \lambda) = \lambda_k}} b_{mk} y^m e_k, \quad (2.9.20)$$

В данном выражении  $e_k$  –  $k$ -й базисный вектор, а коэффициент  $b_{mk}$  резонансного монома  $y^m e_k$  определяется через коэффициенты полиномов  $f_l(x)$ , где  $l \leq |m|$ .

Пусть  $f(x)$  — ряд Тейлора. При увеличении значения  $N$ , величина окрестности точки  $O$ , в которой допустима такая замена переменных, уменьшается. Кроме того, при  $N \rightarrow \infty$  окрестность может стягиваться к положению равновесия. Следовательно, обе приведенные ниже теоремы относятся только к формальному ряду.

**Теорема 2.11 (Пуанкаре).** *Если собственные значения матрицы  $A$  не являются резонансными, то при помощи формальной замены*

$$y = x + \varphi_2(x) + \dots + \varphi_l(x) + \dots \quad (2.9.21)$$

система (2.9.1) приводится к линейной форме (2.9.2).

**Теорема 2.12 (Дюлак).** *Формальная замена переменных приводит систему (2.9.1) к виду*

$$\dot{y} = Ay + R(y), \quad (2.9.22)$$

где  $R(y)$  — формальный ряд

$$R(y) = \sum_{(m,\lambda)=\lambda_k}^{\infty} b_{mk} y^m e_k. \quad (2.9.23)$$

Теперь проанализируем вопрос о сходимости этих рядов. Следуя Арнольду [10], введем несколько полезных понятий.

Рассмотрим комплексное  $n$ -мерное пространство  $\mathbb{C}^n$ . Множество

$$\lambda_k = (m, \lambda), \quad \sum_{j=1}^n m_j \geq 2, \quad m_j \geq 0,$$

где  $m_j$  — целые числа, называется *резонансной (гипер) плоскостью*. При фиксированных значениях  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ , изменяя  $k$  и  $m$ , получаем счетное множество таких плоскостей.

**Определение 2.4.** Совокупность  $(\lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\})$  принадлежит области Пуанкаре, если выпуклая оболочка, состоящая из  $n$  точек  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ , лежащих в комплексной плоскости, не содержит нуля. В противном случае, совокупность  $(\lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\})$  принадлежит области Зигеля.

Каждая точка области Пуанкаре удовлетворяет не более, чем конечному числу резонансов и лежит в окрестности, не пересекающей другие резонансные плоскости. Резонансные плоскости в области Зигеля, напротив, плотны.

**Теорема 2.13 (Пуанкаре).** *Если собственные значения матрицы  $A$  не являются резонансными и принадлежат области Пуанкаре, то систему (2.9.1) с аналитической правой частью можно привести к линейной форме при помощи аналитической замены переменных.*

Пуанкаре доказал эту теорему при помощи мажорантных рядов. Основным требованием в его формулировке является условие существования прямой, проходящей через начало координат в комплексной плоскости так, чтобы все  $n$  собственных значений  $(\lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\})$  лежали по одну сторону этой прямой.

При наличии резонансов в области Пуанкаре формальный ряд, разделяющий замену переменных в теореме 2.12, является сходящимся. Следовательно, получаем следующий результат.

**Теорема 2.14 (Дюлак).** *Если собственные значения матрицы  $A$  принадлежат области Пуанкаре, то при аналитической замене координат система (2.9.1) с аналитической правой частью принимает вид*

$$\dot{y} = Ay + R(y),$$

где  $R(y)$  — полином конечного порядка, составленный из резонансных мономов.

Вне области Пуанкаре ситуация намного сложнее. Зигель определил специальные условия, накладываемые на собственные значения для того, чтобы обеспечить сходимость линеаризирующего ряда и приведение системы (2.9.1) к линейной форме. Важно заметить, что собственные значения, удовлетворяющие этим условиям, составляют плотное множество положительной меры.

Пуанкаре и Дюлак рассмотрели комплексные аналитические системы. Нас же интересуют вещественные системы. В действительном случае область Пуанкаре определяется условиями  $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$  или  $\operatorname{Re} \lambda_i > 0$  ( $i = 1, \dots, n$ ), то есть когда положение равновесия либо устойчивое, либо вполне неустойчивое. Если собственные значения находятся на мнимой оси либо лежат и в левой, и в правой полуплоскостях, то система принадлежит области Зигеля. Пусть, например, двумерная система имеет седловое положение равновесия с собственными значениями  $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ . Если седловой индекс  $\nu = -\lambda_1 \lambda_2^{-1}$  рациональный ( $\nu = \frac{p}{q}$ ), то существует бесконечное

множество резонансов вида

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= (rq + 1)\lambda_1 + pr\lambda_2, \\ \lambda_2 &= qr\lambda_1 + (pr + 1)\lambda_2, \quad r = 1, 2, \dots\end{aligned}$$

Если положение равновесия седловое, то даже когда набор  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$  не резонансный, ноль является предельной точкой множества

$$\{(m, \lambda) - \lambda_k\}_{|m|=2}^\infty, \quad k = 1, \dots, n.$$

В этом случае, при определении коэффициентов преобразования координат по формуле (2.9.17) возникают проблемы, связанные с малыми знаменателями. Именно по этой причине линеаризирующие ряды могут расходиться даже при отсутствии резонансов (см. работу Бруно [18]).

Меньше затруднений возникает при рассмотрении не аналитической, а  $\mathbb{C}^\infty$ -гладкой системы. В этом случае справедливо следующее утверждение

**Лемма 2.4 (Борель (см. Хартман)).** Для любого формального степенного ряда  $R(y)$  существует  $\mathbb{C}^\infty$ -гладкая функция, формальный ряд Тейлора которой совпадает с  $R(y)$ .

На основании этого, интуитивно понятна следующая теорема.

**Теорема 2.15 (Стернберг).** Пусть система (2.9.1) является  $\mathbb{C}^\infty$ -гладкой и не имеет резонансов, тогда существует  $\mathbb{C}^\infty$ -гладкая замена переменных, приводящая данную систему к линейной форме.

Также существует аналог теоремы 2.12 Дюлака

**Теорема 2.16.** В случае  $\mathbb{C}^\infty$ -гладкой системы существует  $\mathbb{C}^\infty$ -гладкая замена переменных, приводящая систему (2.9.1) к виду

$$\dot{y} = Ay + R(y),$$

где  $R(y) \in \mathbb{C}^\infty$ , а формальный ряд Тейлора  $\mathbb{C}^\infty$ -гладкой функции  $R(y)$  совпадает с формальным рядом (2.9.23).

Таким образом, очевидно, что отдельную  $\mathbb{C}^\infty$ -гладкую систему в окрестности положения равновесия можно привести либо к форме Пуанкаре

$$\dot{y} = Ay,$$

либо к форме Дюлака

$$\dot{y} = Ay + R(y).$$

Обе формы называются *нормальными*. Из теорем 2.15 и 2.16 вытекает, что зависимость нормальных форм от набора  $\lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$  в области Зигеля имеет разрывный характер. В связи с этим возникает вопрос: можно ли привести систему дифференциальных уравнений к линейной форме при помощи *конечно*-гладкой замены переменных в окрестности грубого (седлового) положения равновесия? Данный вопрос сформулировал Стернберг [64, 65], который доказал существование числа  $K(k)$ , зависящего от спектра матрицы  $A$ , такого что любая  $\mathbb{C}^\infty$ -система

$$\dot{x} = Ax + o_K(x)$$

приводится к линейной форме при помощи  $\mathbb{C}^k$ -гладкого преобразования. Это же верно и в случае  $\mathbb{C}^N$ -гладких систем, при условии, что  $N \geq K$ . Впоследствии Чен [20] показал, что любая  $\mathbb{C}^N$ -гладкая ( $N \geq K(k; A)$ ) система вблизи грубого положения равновесия  $\mathbb{C}^k$ -эквивалентна системе

$$\dot{y} = Ay + \sum_{l=2}^{K(k; A)} f_l(y), \quad (2.9.24)$$

то есть эквивалентна полиномиальному векторному полю. Более того, можно предположить, что в данном случае  $f(x)$  — резонансный полином. Вопрос о точной оценке числа  $K$  остается до сих пор открытым.

Можно выполнить дальнейшее упрощение приведенной выше резонансно-полиномиальной нормальной формы (2.9.24) при помощи  $\mathbb{C}^k$ -гладкой замены переменных. На этом мы завершаем рассмотрение данных вопросов; более подробная информация содержится в работе Бронштейна и Копанского [16], в которой сообщается о последних достижениях в данной области и приводится соответствующий справочный материал. Заметим, что при изучении этой теории особое внимание следует уделять так называемым «слабым» резонансам. Обозначим через  $(\theta_1, \dots, \theta_p)$  различные величины показателей  $\operatorname{Re} \lambda_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ). Очевидно, что  $p \leq n$ . Величины  $(\theta_1, \dots, \theta_p)$  называют *показателями Ляпунова*, а зависимость

$$\theta_s = l_1\theta_1 + \dots + l_p\theta_p = (l, \theta), \quad \text{где} \quad \sum_{i=1}^p l_p \geq 2$$

*слабым резонансом*. Необходимо учесть, что понятие слабого резонанса не подразумевает анализа в комплексной плоскости и, следовательно, приведения линейной части к жордановой форме. В отличие от классического понятия резонансов, не позволяющего выполнить линейризацию при помощи полиномиальных преобразований, понятие слабого резонанса возникает в задаче, связанной с приведением систем, обладающих конечной гладкостью, к линейной форме при использовании более широких классов замены переменных.

С точки зрения нелинейной динамики наибольший интерес представляют седла, поскольку седло может иметь двояко-асимптотические траектории, принадлежащие как устойчивому, так и неустойчивому многообразию. Такие траектории называются *гомоклиническими петлями*. В случае, когда положение равновесия — седло-фокус, из одной гомоклинической петли при определенных условиях может возникнуть бесконечное множество периодических траекторий. На первом этапе исследования таких явлений система вблизи седла приводится к более простой форме. Очевидно, что идеальным будет являться случай, когда систему можно привести к линейной форме. Однако изучение глобальных бифуркаций требует рассмотрения не отдельной системы, а конечно-параметрических семейств систем. Приведение к линейной форме семейств систем вызывает трудности, связанные с тем, что резонансы в области Зигеля плотны. В то же время, для изучения гомоклинических бифуркаций большинство резонансов, за малым исключением, не играют существенной роли.

Детально исследуем пример системы на плоскости, изучением которой занимались Андронов и Леонтович. Рассмотрим однопараметрическое семейство систем

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \lambda_1(\mu)x + P(x, y, \mu), \\ \dot{y} &= \lambda_2(\mu)y + Q(x, y, \mu),\end{aligned}$$

где  $P$  и  $Q$  — некоторые  $\mathbb{C}^N$ -гладкие ( $N \geq 1$ ) функции, которые в начале координат обращаются в нуль вместе с их первыми производными по  $x$  и  $y$ , а  $\lambda_1(0) < 0 < \lambda_2(0)$ . Допустим, что при  $\mu = 0$  данная система имеет петлю сепаратрис, см. рис. 2.9.1. Также предположим, что седловой индекс  $\nu = -\lambda_1(\mu)/\lambda_2(\mu)$  при  $\mu = 0$  не равен 1, то есть так называемая седловая величина  $\sigma$  отлична от нуля:

$$\sigma(0) = \lambda_1(0) + \lambda_2(0) \neq 0.$$

Андронов и Леонтович показали, что при таких условиях из петли

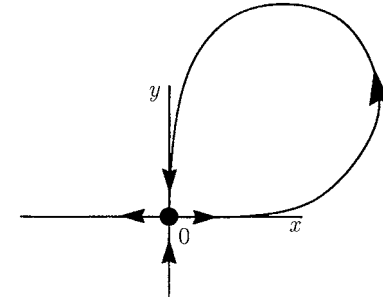


Рис. 2.9.1. Гомоклиническая петля к седлу на плоскости

сепаратрис может родиться не более одной периодической траектории. Выполнение условия

$$\sigma(0) = \lambda_1(0) + \lambda_2(0) = 0$$

приводит к существованию бесконечного множества резонансов вида

$$\begin{aligned}\lambda_1(0) &= (p+1)\lambda_1(0) + p\lambda_2(0), \\ \lambda_2(0) &= q\lambda_1(0) + (q+1)\lambda_2(0),\end{aligned}$$

где  $p$  и  $q$  — положительные целые числа.

Леонтович [40] изучила задачу о числе периодических траекторий, рождающихся из гомоклинической петли в конечно-параметрических семействах в случае  $\sigma(0) = 0$ . Основная трудность состояла здесь в построении для таких семейств нормальной формы Дюлака. При  $\mu = 0$  ее можно представить как

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \lambda_1(0)x + \sum_{p=1}^{\infty} a_p x^{p+1} y^p, \\ \dot{y} &= \lambda_2(0)y + \sum_{p=1}^{\infty} b_p x^p y^{p+1},\end{aligned}$$

или, исключив время  $t$ , как

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \left( 1 + \sum_{p=1}^{\infty} c_p (xy)^p \right).$$



При  $\mu \neq 0$  не имеет смысла использовать теорию нормальных форм, так как зависимость от параметра на плотном множестве имеет разрывный характер, поскольку седловой показатель  $\nu(\mu)$  может быть как рациональным, так и иррациональным. Тем не менее, Леонтович удалось преобразовать систему следующим образом:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \left[ 1 + \sum_{p=1}^{K-1} c_p(\mu)(xy)^p + (xy)^K \Phi(x, y, \mu) \right]. \quad (2.9.25)$$

Основной из используемых ею методов заключался в последовательном исключении *нерезонансных функций*, то есть функций, все члены которых при формальном разложении в ряд Тейлора не являются резонансными. Данный метод применим для  $\mathbb{C}^N$ -гладкого семейства, при условии, что  $N \geq 4K + 1$ . В таком случае функция  $\Phi(x, y, \mu)$  в уравнении (2.9.25) обладает  $\mathbb{C}^K$ -гладкостью.

В работах Овсянникова и Шильникова [48, 49]<sup>3</sup> был успешно разработан принцип исключения нерезонансных функций, входящих в правую часть уравнения, для многомерных систем с гомоклиническими петлями седел и седло-фокусов.

Рассмотрим семейство  $X(\mu)$  динамических систем, зависящих от параметров  $\mu$ . Допустим, что  $X(\mu) — \mathbb{C}^r$ -гладкое по совокупности всех переменных и параметров. Семейство  $X(\mu)$  можно представить в виде

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_1(\mu)x + f_1(x, y, u, v, \mu), \\ \dot{u} &= A_2(\mu)u + f_2(x, y, u, v, \mu), \\ \dot{y} &= B_1(\mu)y + g_1(x, y, u, v, \mu), \\ \dot{v} &= B_2(\mu)v + g_2(x, y, u, v, \mu), \end{aligned} \quad (2.9.26)$$

где собственные значения матрицы  $A(0)$

$$A(0) \equiv \begin{pmatrix} A_1(0) & 0 \\ 0 & A_2(0) \end{pmatrix}$$

<sup>3</sup>Тот же подход использовали в своей работе Гонченко и Шильников [27] для случая периодической траектории седлового типа; другие приложения данного метода приводятся в работе Афраимовича, Лермана и Уманского «Методы качественной теории дифференциальных уравнений» под редакцией Леонтович, Горьковский государственный университет, Горький, 1984.

лежат в комплексной плоскости слева от мнимой оси, а собственные значения матрицы  $B(0)$

$$B(0) \equiv \begin{pmatrix} B_1(0) & 0 \\ 0 & B_2(0) \end{pmatrix}$$

лежат справа от нее.

Допустим также, что действительные части собственных значений  $(\lambda_1, \dots, \lambda_{m_1})$  матрицы  $A_1(0)$  равны между собой, то есть

$$\operatorname{Re} \lambda_1 = \dots = \operatorname{Re} \lambda_{m_1} = \lambda < 0;$$

действительные части собственных значений  $(\gamma_1, \dots, \gamma_{n_1})$  матрицы  $B_1(0)$  также равны между собой, то есть

$$\operatorname{Re} \gamma_1 = \dots = \operatorname{Re} \gamma_{n_1} = \gamma > 0.$$

Положим, что действительные части собственных значений матрицы  $A_2(0)$  строго меньше  $\lambda$ , а собственные значения матрицы  $B_2(0)$  строго больше  $\gamma$ . В таком случае координаты  $x$  и  $y$  являются ведущими устойчивой и неустойчивой, соответственно, а координаты  $u$  и  $v$  — неведущими.

**Теорема 2.17 (Овсянников – Шильников).** *При всех малых  $\mu$  система (2.9.26) локально преобразуется в систему*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_1(\mu)x + f_{11}(x, y, v, \mu)x + f_{12}(x, u, y, v, \mu)u, \\ \dot{u} &= A_2(\mu)u + f_{21}(x, y, v, \mu)x + f_{22}(x, u, y, v, \mu)u, \\ \dot{y} &= B_1(\mu)y + g_{11}(x, u, y, \mu)y + g_{12}(x, u, y, v, \mu)v, \\ \dot{v} &= B_2(\mu)v + g_{21}(x, u, y, \mu)y + f_{22}(x, u, y, v, \mu)v, \end{aligned} \quad (2.9.27)$$

где

$$\begin{aligned} f_{ij}|_{(x,u,y,v)=0} &= 0 & g_{ij}|_{(x,u,y,v)=0} &= 0 \\ f_{1j}|_{(y,v)=0} &= 0 & g_{1j}|_{(x,u)=0} &= 0 \\ f_{i1}|_{x=0} &= 0 & g_{i1}|_{y=0} &= 0 \quad (i, j = 1, 2). \end{aligned} \quad (2.9.28)$$

Поскольку мы будем часто использовать эту теорему при изучении гомоклинических бифуркаций, ее полное доказательство приводится в приложении А. Гладкость преобразования координат и функций  $f_{ij}, g_{ij}$  определяется следующим образом: они обладают  $\mathbb{C}^{r-1}$ -гладкостью относительно

$(x, u, y, v)$ , а их первые производные по  $(x, u, y, v)$  обладают  $\mathbb{C}^{r-2}$ -гладкостью относительно  $(x, y, u, v, \mu)$ . При  $r = \infty$  преобразование является  $\mathbb{C}^\infty$ -гладким относительно  $(x, y, u, v)$  (или даже аналитическим в случае вещественной аналитической системы). Тем не менее, даже при  $r = \infty$  гладкость преобразования относительно параметров  $\mu$ , в целом, исключительно конечна: она неограниченно растет при  $\mu \rightarrow 0$  (где  $\|\mu\| \leq \mu_0$  — область рассматриваемых значений параметров).

Теперь рассмотрим случай, когда некоторые собственные значения матрицы  $A$  в системе (2.9.1) лежат на мнимой оси. Очевидно, что если имеется нулевое собственное значение  $\lambda_1 = 0$ , то существует бесконечное множество резонансов типа

$$\lambda_1 = m\lambda_1, \quad m \geq 2. \quad (2.9.29)$$

Если имеется пара чисто мнимых собственных значений  $\lambda_{1,2} = \pm i\omega, \omega \neq 0$ , также существует бесконечное множество резонансов типа:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= (s_1 + 1)\lambda_1 + s_1\lambda_2, \\ \lambda_2 &= s_2\lambda_1 + (s_2 + 1)\lambda_2, \end{aligned} \quad (2.9.30)$$

где  $s_1$  и  $s_2$  — некоторые положительные целые числа.

Таким образом, теория нормальных форм представляет особую ценность в связи с тем, что данными резонансами определяются условия устойчивости и, следовательно, типы бифуркаций положений равновесия в критических случаях.

Так как анализируемые положения равновесия — негрубые, в данном случае вполне естественным будет не ограничивать рассмотрение вопроса изучением конкретной системы, а включить ее в  $q$ -мерное конечно-параметрическое семейство

$$\dot{x} = Ax + f(x) + h(x, \mu), \quad (2.9.31)$$

где  $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_q)$ ; функции  $f(x)$  и  $h(x, \mu)$  достаточно гладкие, и

$$f(0) = f'(0) = 0, \quad h(x, 0) = 0.$$

Допустим, что все собственные значения  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  матрицы  $A$  лежат на мнимой оси. Такое предположение не обременительно, так как по теореме о центральном многообразии (см. главу 5), общую ситуацию можно свести

к этому случаю, т. е. к системе (2.9.31). Рассмотрим следующую  $(p+q)$ -мерную систему, записанную в треугольной форме:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + f(x) + h(x, \mu), \\ \dot{\mu} &= 0. \end{aligned} \quad (2.9.32)$$

Эта система имеет неподвижную точку  $O(0, 0)$ , матрица Якоби которой определяется как

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A & h'_\mu(0, 0) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрица  $\tilde{A}$  имеет собственные значения  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  и  $\gamma_1 = \dots = \gamma_q = 0$ . Система (2.9.32) имеет резонансы типа (2.9.29), (2.9.30) и еще следующие резонансы:

$$\lambda_k = \lambda_k + (l, \gamma), \quad (2.9.33)$$

$$\lambda_k = (m, \lambda) + (l, \gamma), \quad (2.9.34)$$

$$\gamma_j = (l, \gamma), \quad (2.9.35)$$

где  $(l, \gamma) = \sum_{j=1}^q l_j \geq 2$ . Систему (2.9.32) можно привести к нормальной форме при помощи замены переменных

$$\begin{aligned} y &= x + \varphi(x, \mu) \\ \mu &= \mu, \end{aligned} \quad (2.9.36)$$

в результате которой второе уравнение в (2.9.32) остается неизменным. Таким образом, нет необходимости рассматривать резонансы типа (2.9.35). По аналогии с леммой 2.3, систему (2.9.32) можно преобразовать следующим образом:

$$\dot{y} = Ay + R_0(\mu) + R_1(\mu)y + R_N(y, \mu) + o_N(y, \mu), \quad (2.9.37)$$

где  $R_1(\mu)$  — некоторый полином степени не выше  $(N-1)$ ,  $R_1(0) = 0$ , и

$$R_N(y, \mu) = \sum_{\substack{|m| \leq N \\ (m, \lambda) = \lambda_k}} b_{mk}(\mu) y^m e_k, \quad (2.9.38)$$

где  $b_{mk}(\mu)$  — некоторые полиномы, степень которых не превышает  $(N - |m|)$ .

Если матрица  $A$  невырождена, то  $R_0(\mu) \equiv 0$ . Иначе, если среди собственных значений  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  встречается  $\lambda_k = 0$ , то  $R_0(\mu)$  — полином степени  $N$  такой, что  $R_0(0) = 0$ . Появление в выражении (2.9.37) члена  $R_0(\mu)$  связано с существованием резонансов вида

$$0 = \lambda_k = (l, \gamma).$$

Семейство

$$\dot{y} = Ay + R_0(\mu) + R_1(\mu)y + \sum_{\substack{|m| \leq N \\ (m, \lambda) = \lambda_k}} b_{mk}(\mu)y^m e_k \quad (2.9.39)$$

называется *укороченной* нормальной формой. Во многих случаях можно рассматривать поведение траекторий в малой фиксированной окрестности положения равновесия и изучать структуру бифуркаций при малых значениях управляющих параметров, исследуя укороченные нормальные формы при соответствующих величинах  $N$  и  $q$ . Конечно, информацию, полученную из анализа укороченной системы, необходимо обосновать, прежде чем распространять ее на исходное семейство. Во второй части книги изучение основных локальных бифуркаций мы проводим согласно вышеприведенной схеме.

## ГЛАВА 3

### Грубые периодические траектории динамических систем

Рассмотрим автономную систему дифференциальных уравнений в пространстве  $\mathbb{R}^{n+1}$  ( $n \geq 1$ )

$$\dot{x} = X(x),$$

где  $x = (x_1, \dots, x_n, x_{n+1})$ ,  $X \in \mathbb{C}^r$  ( $r \geq 1$ ). Эта глава посвящена изучению *периодических траекторий*, то есть нестационарных периодических решений вида  $x = \varphi(t)$ , где для некоторого значения  $\tau \neq 0$

$$\varphi(t) \equiv \varphi(t + \tau).$$

Заметим, что  $\varphi(t) \in \mathbb{C}^{r+1}$ . В фазовом пространстве периодическое движение ассоциируется с гладкой замкнутой кривой, называемой *предельным циклом*, *периодической траекторией* или *периодической орбитой*. По определению, любая точка на периодической траектории возвращается в исходное положение через промежуток времени, равный  $\tau$ . То же самое повторяется через  $2\tau, 3\tau$  и т. д. Наименьший из таких интервалов называется *периодом*.

Периодические движения являются одним из наиболее важных объектов изучения нелинейной динамики. Это обусловлено, по крайней мере, двумя причинами. Во-первых, *устойчивая* периодическая траектория представляет собой математический образ такого физического явления, как автоколебания. Во-вторых, периодические траектории *седлового* типа являются ключевыми элементами странных аттракторов, с которыми связан динамический хаос.

В отличие от положений равновесия, исследование периодических движений в фазовом пространстве, особенно в фазовом пространстве систем большой размерности, можно назвать искусством. Так, например, количество положений равновесия в системе с полиномиальной правой частью

можно точно определить, тогда как оценка количества периодических траекторий даже для системы на плоскости является предметом знаменитой 16-й задачи Гильберта, которая до сих пор не решена. Единственным исключением являются, возможно, почти интегрируемые двумерные системы, для которых задача нахождения периодических траекторий сводится к задаче нахождения нулей некоторых специальных интегралов, которые в определенных случаях можно вычислить в явном виде.

В данной главе исследуется поведение траекторий вблизи грубой периодической траектории. Основная идея изучения состоит в построении отображения возвращения Пуанкаре.

### 3.1. Отображение Пуанкаре. Неподвижная точка. Мультипликаторы

Допустим, что система дифференциальных уравнений в пространстве  $\mathbb{R}^{n+1}$  ( $n \geq 1$ )

$$\dot{x} = X(x), \quad (3.1.1)$$

где  $x = (x_1, \dots, x_n, x_{n+1})$ ,  $X \in \mathbb{C}^r$  ( $r \geq 1$ ), имеет периодическую траекторию  $L$ .

Рассмотрим на траектории  $L$  точку  $M^*$  и перенесем в нее начало координат (см. рис. 3.1.1). Без потери общности можно положить, что в точке  $M^*$  последняя составляющая вектора скорости не равна нулю, то есть

$$X_{n+1}(0) \neq 0. \quad (3.1.2)$$

Это условие всегда можно получить путем переупорядочения координат, поскольку нигде на периодической траектории вектор скорости не равен нулю. Условие (3.1.2) позволяет выбрать на плоскости  $x_{n+1} = 0$  малую *секущую*  $S$  такую, что  $M^* \in S$ . По построению, все траектории системы (3.1.1) вблизи периодической траектории  $L$  пересекают эту секущую трансверсально.

Из теоремы о непрерывной зависимости от начальных условий вытекает, что траектория с начальной точкой  $M \in S$  достаточно близкой к  $M^*$ , возвращается в некоторую точку  $\bar{M}$  секущей  $S$  через промежуток времени  $t(M)$ , близкий к периоду периодической траектории  $L$ . Таким образом, по этим траекториям можно построить отображение  $T: M \mapsto \bar{M}$ , которое называется *отображением Пуанкаре*.

Пусть  $x = \varphi(t, x_0)$  — траектория, проходящую через точку  $M(x_0) \in S$  в момент времени  $t$ . Время возвращения  $t(x_0)$  из точки  $M$  в точку  $\bar{M}$  можно найти из уравнения

$$\varphi_{n+1}(t, x_0) = 0. \quad (3.1.3)$$

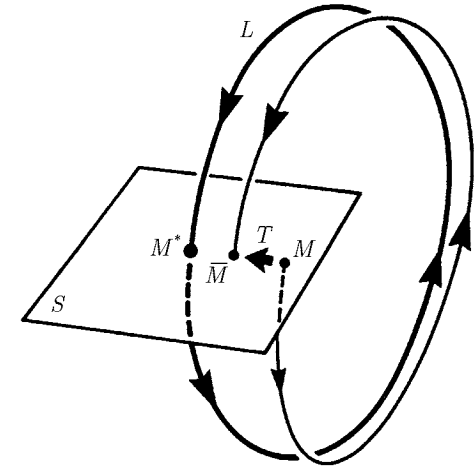


Рис. 3.1.1. Секущая  $S$  трансверсальна как периодической траектории  $L$ , так и траектории, близкой к  $L$

Поскольку периодическая траектория  $L$  проходит через начало координат, при  $x_0 = 0$  это уравнение имеет решение  $t = \tau$ , где  $\tau$  — период периодической траектории. В силу (3.1.2), из уравнения (3.1.3), по теореме о неявной функции, однозначно определяется время возвращения  $t(x_0)$ , и, кроме того, функция  $t(x_0)$  имеет ту же гладкость, что и исходная система.

Отображение  $T$  можно записать в следующем виде:

$$\bar{x}_k = \varphi_k(t(x), x)$$

или как

$$\bar{x} = f(x), \quad (3.1.4)$$

где  $x$  —  $n$ -мерный вектор координат на  $S$ ,  $f(x) \in \mathbb{C}^r$ .

Если из точки  $\bar{M}$ , лежащей на  $S$ , выпустить в момент времени  $t = 0$  траекторию в обратном направлении времени, то она должна вернуться в

точку  $M$  на секущей  $S$  через промежуток времени  $t(M)$ . Таким образом, отображение  $T^{-1}$  — обратное к отображению Пуанкаре — также определено на  $S$ . Так как гладкая зависимость времени возвращения от начальной точки имеет место и в обратном времени, то можно утверждать, что отображение  $T^{-1}$  также является  $\mathbb{C}^r$ -гладким. Следовательно, отображение Пуанкаре является  $\mathbb{C}^r$ -гладким диффеоморфизмом.

После дифференцирования выражения

$$x = f^{-1}(f(x))$$

получаем

$$[f^{-1}(f(x))]' \cdot f'(x) = I,$$

где  $I$  — единичная матрица. Таким образом, для малых  $x$

$$\det \left| \frac{df(x)}{dx} \right| \neq 0$$

Следовательно, траектория системы (3.1.1), проходящая через произвольную точку  $M$  на секущей  $S$ , пересекает  $S$  в точках  $(\dots, M_{-1}, M_0 \equiv M, M_1, \dots)$ . По построению, точки  $\{M_j\}$  представляют собой образы точки  $M$ , полученные под действием отображения Пуанкаре:  $M_j \equiv T^j M$ . Последовательность  $\{M_j\}$  называется *траекторией точки  $M$  относительно отображения  $T$* . Очевидно, что поведение траекторий исходной системы (3.1.1) вблизи периодической траектории  $L$  полностью определяется поведением траекторий отображения  $T$  вблизи *неподвижной точки  $M^* = L \cap S$*  (точку  $M^*$  называют неподвижной в связи с тем, что  $TM^* = M^*$ ). Так, например, при  $t \rightarrow +\infty$  траектория системы (3.1.1) стремится к периодической траектории  $L$  тогда и только тогда, когда при  $j \rightarrow +\infty$  соответствующая траектория отображения  $T$  стремится к неподвижной точке  $M^*$ .

В окрестности неподвижной точки в начале координат отображение  $T$  можно записать в виде

$$\bar{x} = Ax + g(x), \quad (3.1.5)$$

где

$$A \equiv \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=0}.$$

является невырожденной  $(n \times n)$ -мерной матрицей,  $g(0) = g'(0) = 0$ .

Прежде, чем перейти к рассмотрению нелинейного отображения (3.1.5) следует изучить поведение траекторий *линеаризованного отображения*

$$\bar{x} = Ax. \quad (3.1.6)$$

Ниже будет показано, что подобно характеристическим показателям положения равновесия, собственные значения матрицы  $A$  играют ключевую роль при определении динамики отображения Пуанкаре вблизи неподвижной точки. Эти собственные значения называют *мультипликаторами неподвижной точки или мультипликаторами соответствующей периодической траектории*.

Очевидно, что значения мультипликаторов не изменяются при гладких заменах координат. Действительно, при замене координат

$$x = By + \psi(y),$$

где  $\det B \neq 0$ ,  $\psi(0) = 0$ , а  $\psi'(0) = 0$ , которая не сдвигает начало координат, отображение (3.1.5) принимает вид

$$B\bar{y} + \psi(\bar{y}) = AB\bar{y} + A\psi(\bar{y}) + g(B\bar{y} + \psi(\bar{y}))$$

или

$$\bar{y} = B^{-1}AB\bar{y} + \dots,$$

где многоточиями обозначены нелинейные члены. Поскольку матрицы  $B^{-1}AB$  и  $A$  эквивалентны, они имеют одинаковые собственные значения.

Очевидно также и то, что мультипликаторы отображения Пуанкаре не зависят ни от выбора точки  $M^*$  на траектории  $L$ , ни от выбора секущей  $S$  к  $L$ . Так как время перехода одной секущей к другой гладко зависит от начальной точки, то само отображение одной секущей на другую по траекториям системы является  $\mathbb{C}^r$ -диффеоморфизмом и, следовательно, выбор другой секущей можно рассматривать просто как замену координат.

В следующем разделе исследуется поведение траекторий динамических систем вблизи *грубых периодических траекторий*, то есть траекторий, не имеющих мультипликаторов, равных 1 по абсолютной величине. Сначала рассматриваются грубые неподвижные точки отображения Пуанкаре. Заметим, что теория неподвижных точек частично, но не полностью, повторяет теорию положений равновесия. Поэтому данный вопрос будет исследоваться по схеме, приведенной в главе 2: после анализа линейного случая рассматривается нелинейный, а затем определяется соответствие между нелинейным и линейным отображениями.

### 3.2. Невырожденные одномерные и двумерные линейные отображения

Этот и следующие разделы посвящены изучению линейных отображений. Интерес представляет линеаризация отображения Пуанкаре вблизи периодической траектории, иными словами, линейное отображение с невырожденной матрицей Якоби

$$\bar{x} = Ax, \quad \det A \neq 0.$$

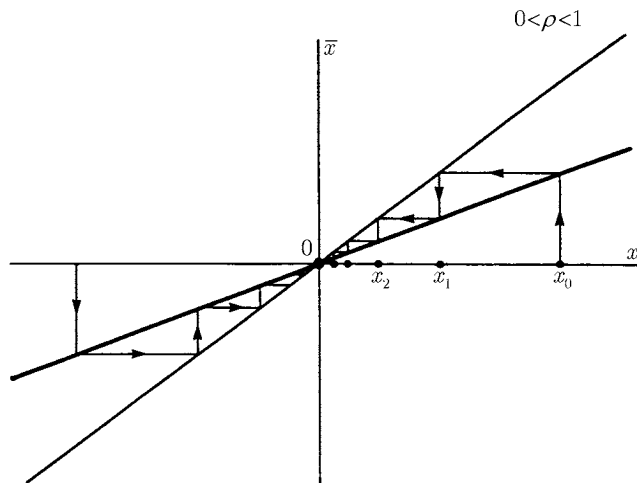


Рис. 3.2.1. Ступенчатая функция Ламерея. Начало координат является устойчивой неподвижной точкой: все точки в ее окрестности стремятся к точке  $O$

В первую очередь рассмотрим линейное одномерное отображение. Оно имеет вид

$$\bar{x} = \rho x, \quad (3.2.1)$$

где  $\rho \neq 0, x \in \mathbb{R}^1$ .

Очевидно, что неподвижная точка в начале координат  $O$  является устойчивой при  $|\rho| < 1$ . Итерации  $x_j$  точки  $x_0$  определяются формулой

$$x_j = \rho^j x_0,$$

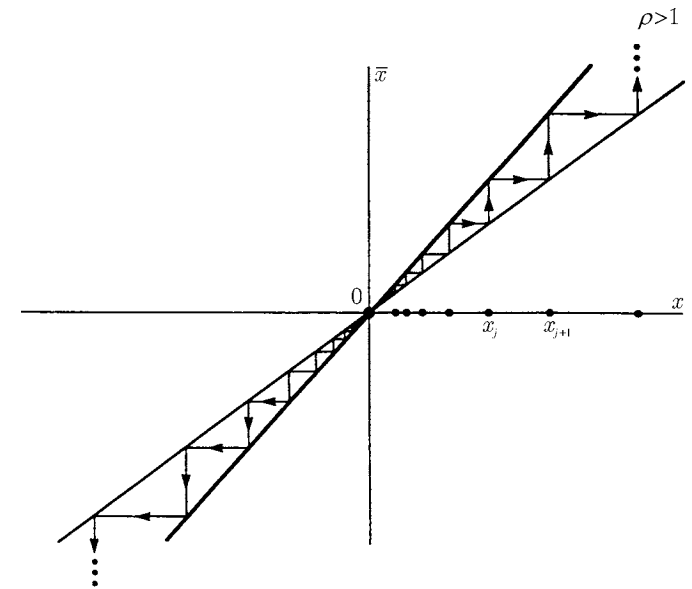


Рис. 3.2.2. Ступенчатая функция Ламерея. В данном случае начало координат является неустойчивой неподвижной точкой

где при  $|\rho| < 1$

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} x_j = 0.$$

С другой стороны, неподвижная точка неустойчива, если  $|\rho| > 1$ .

Поведение итераций точек одномерного отображения удобно интерпретировать с помощью *диаграммы Ламерея*, которую получают следующим образом. Для отображения

$$\bar{x} = f(x)$$

график функции  $f(x)$  и биссектриса<sup>1</sup>  $\bar{x} = x$  строятся в плоскости  $(x, \bar{x})$ . Траектории представляются в виде ломанных линий. Пусть  $\{x_j\}$  представляет собой траекторию; каждая точка с координатами  $(x_j, x_{j+1})$  лежит на графике функции  $f(x)$ , а каждая точка  $(x_j, x_j)$  лежит на биссектрисе  $\bar{x} = x$ . Каждая точка  $(x_j, x_j)$  по вертикали соединяется со следующей точкой

<sup>1</sup>Линия, проведенная под углом  $45^\circ$ .

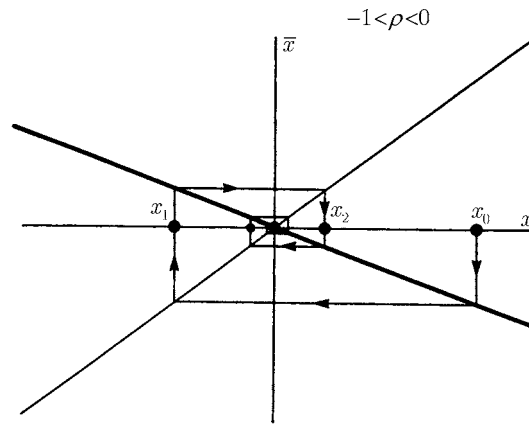


Рис. 3.2.3. Пример спирали Ламерея; траектория с начальной точкой  $x_0$ , имеет вид прямоугольной спирали, закрученной по часовой стрелке

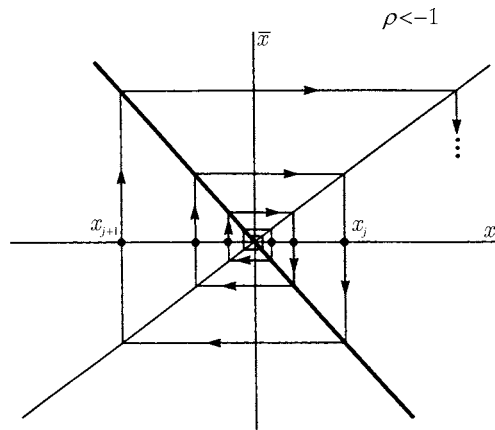


Рис. 3.2.4. Пример «неустойчивой» спирали Ламерея. Траектория  $\{x_j\}$  начинается вблизи неподвижной точки — начала координат

$(x_j, x_{j+1})$ , которая, в свою очередь, по горизонтали соединяется со следующей точкой  $(x_{j+1}, x_{j+1})$  и так далее. Эта процедура многократно по-

вторяется, как показано на четырех типичных диаграммах Ламерея (рис. 3.2.1–3.2.4).

Если функция  $f(x)$  монотонно возрастает, то полученный график называют *ступенчатой функцией Ламерея* (рис. 3.2.1 и 3.2.2). Если  $f(x)$  монотонно убывает, то график называется *спиралью Ламерея* (см. рис. 3.2.3 и 3.2.4).

В случае вырожденного отображения, когда  $\rho = 1$ , все точки являются неподвижными. Если  $\rho = -1$ , все точки, кроме начала координат  $O$ , являются *периодическими с периодом 2*, то есть неподвижные точки отображения  $T^2$  определяются выражением

$$\bar{\bar{x}} = x \quad (\bar{\bar{x}} = -(\bar{x}) \Leftarrow \bar{x} = -x).$$

Рассмотрим двумерное отображение Пуанкаре

$$\begin{pmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \quad (3.2.2)$$

Если оба собственных значения матрицы  $A$  действительны и не равны между собой, то существует невырожденная линейная замена координат, приводящая отображение Пуанкаре к виду

$$\bar{x} = \rho_1 x, \quad \bar{y} = \rho_2 y. \quad (3.2.3)$$

Итерации начальной точки  $(x_0, y_0)$  задаются при помощи уравнений

$$x_j = \rho_1^j x_0, \quad y_j = \rho_2^j y_0. \quad (3.2.4)$$

Рассмотрим следующие четыре случая:

(1)  $|\rho_i| < 1$  ( $i = 1, 2$ ). В этом случае неподвижная точка, расположенная в начале координат  $O$ , является экспоненциально устойчивой и называется *устойчивым узлом*. Если  $|\rho_1| > |\rho_2|$ , то при  $j \rightarrow +\infty$  все траектории, кроме лежащих на *неведущей (сильно устойчивой)* оси  $y$ , стремятся к точке  $O$  по касательной к *ведущей* оси  $x$ . Поведение траекторий в окрестности устойчивого узла показано на рис. 3.2.5 и 3.2.6.

(2)  $|\rho_i| > 1$  ( $i = 1, 2$ ). Если рассматривать обратное отображение  $T^{-1}$ , то данный случай сводится к приведенному выше. Неподвижная точка называется *неустойчивым узлом*.

(3)  $|\rho_1| < 1$ , а  $|\rho_2| > 1$ . Неподвижную точку с мультипликаторами такого типа называют *седлом*. Из (3.2.4) видно, что оси  $x$  и  $y$  являются

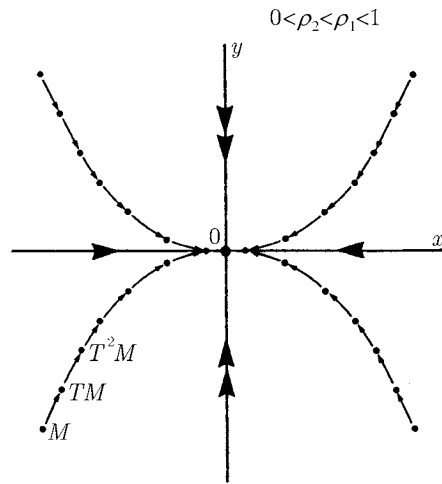


Рис. 3.2.5. Устойчивый узел (+) с положительными мультипликаторами  $0 < \rho_2 < \rho_1 < 1$ . Траектория  $\{T^j M\}$  точки  $M$  направлена в начале координат по касательной к ведущей оси  $x$

инвариантными относительно отображения (3.2.3). Точки, лежащие на оси  $x$ , стремятся к началу координат  $O$  при  $j \rightarrow +\infty$ , а точки на оси  $y$  — при  $j \rightarrow -\infty$ . В связи с этим оси  $x$  и  $y$  называют *устойчивым* и *неустойчивым подпространствами* седла  $O$ . Все остальные траектории проходят близко к седлу, но минуют его. Их положение зависит от знаков мультипликаторов; четыре возможных варианта представлены на рис. 3.2.7а–д.

(4) Комплексно-сопряженные мультипликаторы  $\rho_{1,2} = \rho e^{\pm i\omega}$ . В данном случае отображение Пуанкаре можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \rho(x \cos \omega - y \sin \omega), \\ \bar{y} &= \rho(y \cos \omega + x \sin \omega), \end{aligned}$$

или в полярных координатах  $(r, \varphi)$ :

$$\begin{aligned} \bar{r} &= \rho r, \\ \bar{\varphi} &= \varphi + \omega. \end{aligned} \tag{3.2.5}$$

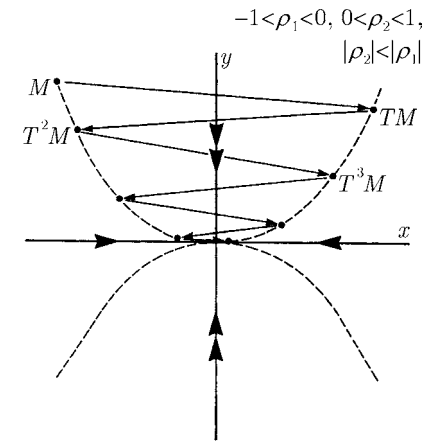


Рис. 3.2.6. Устойчивый узел (-) с отрицательным ведущим мультипликатором  $\rho_1$ . Следовательно, в данном случае координата  $x$  меняет знак после каждой итерации

Каждая  $j$ -я итерация точки  $(r_0, \varphi_0)$  задается при помощи уравнений

$$\begin{aligned} r_j &= \rho^j r_0, \\ \varphi_j &= \varphi_0 + \omega j. \end{aligned}$$

Если  $\rho < 1$ , точка  $O$  называется *устойчивым фокусом*. В данном случае все траектории лежат на логарифмической спирали, закрученной по направлению к началу координат, как показано на рис. 3.2.8.

Если  $\rho > 1$ , неподвижная точка  $O$  называется *неустойчивым фокусом*. В данном случае при  $j \rightarrow +\infty$  все траектории берут начало в некоторой окрестности точки  $O$ .

В случае вырожденного отображения, когда  $\rho = 1$ , из формулы (3.2.5) вытекает, что  $\bar{r} = r$ , то есть любая окружность с центром в начале координат  $O$  является инвариантной относительно отображения. В ограничении отображения на инвариантную окружность, оно принимает вид

$$\bar{\varphi} = \varphi + \omega \pmod{2\pi}.$$

Если величина  $\omega$  соизмерима с  $2\pi$ , то есть  $\omega = 2\pi M/N$ , где  $M$  и  $N$  — некоторые целые числа, то все точки являются периодическими с периодом



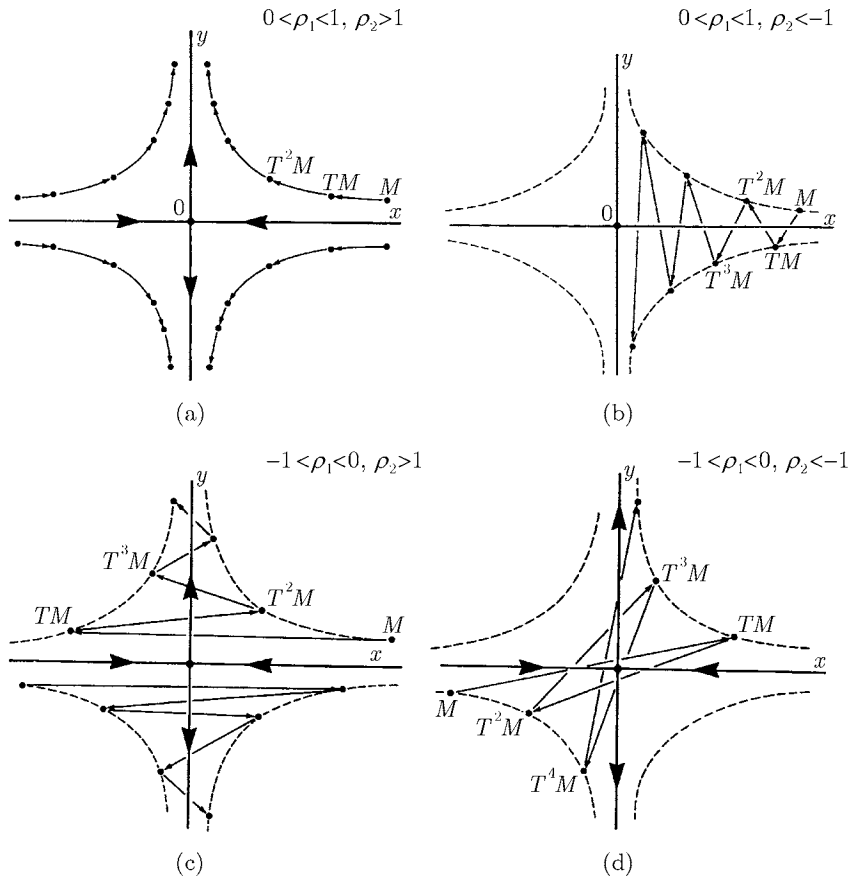


Рис. 3.2.7. (а). Седло (+, +). Ось  $y$  совпадает с неустойчивым направлением, ось  $x$  — с устойчивым. (б). Седло (+, -). Знак координаты  $y$  траектории  $\{T^k M\}$  меняется после каждой итерации. (с). Седло (-, +). В данном случае координата  $x$  траектории меняет знак с каждой последующей итерацией, поскольку соответствующий мультипликатор  $\rho_1$  является отрицательным. (д). Седло (-, -). Траектория начальной точки  $M$  покидает начало координат и направлена вдоль гипербол, расположенных в 1-м и 3-м квадрантах

$N$ :

$$\varphi_N = \varphi + N\omega = \varphi + 2\pi M = \varphi \pmod{2\pi}.$$

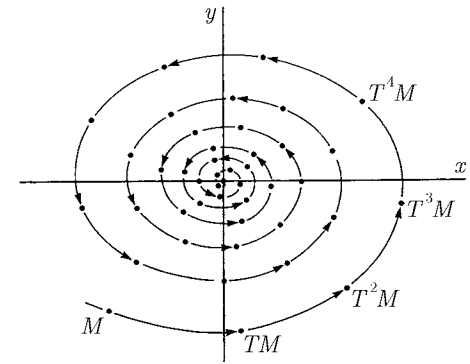


Рис. 3.2.8. Устойчивый фокус

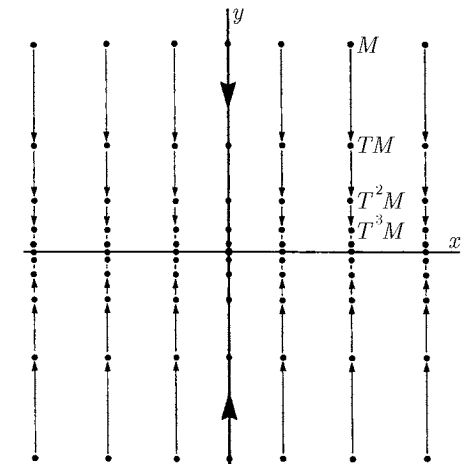


Рис. 3.2.9. Пример поведения траекторий, принадлежащих вырожденному отображению. Ось  $x$  полностью состоит из неподвижных точек

Таким образом, все точки — неподвижные для  $N$ -ой итерации отображения  $T$ . Это означает, что  $T^N$  является тождественным отображением. Если величина  $\omega$  не соизмерима с  $2\pi$ , то траектория любой точки  $\varphi_0$

апериодична. Более того, можно показать, что множество точек

$$\{\varphi_j\}_{j=-\infty}^{j=+\infty}$$

плотно заполняет любую окружность.

На рис. 3.2.9 приведен другой пример вырожденного отображения, когда  $\rho_1 = 1, |\rho_2| < 1$ . Здесь все точки, лежащие на оси  $x$  являются неподвижными, а любая прямая  $x = \text{const}$  — инвариантна. Траектории, лежащие на каждой такой прямой, стремятся к соответствующей неподвижной точке.

### 3.3. Неподвижные точки многомерных линейных отображений

Рассмотрим  $n$ -мерное отображение

$$\bar{x} = Ax, \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (3.3.1)$$

Аналогично случаю линейных систем дифференциальных уравнений, выбираем координаты таким образом, чтобы матрица  $A$  была представлена в вещественной жордановой форме

$$A = A^0 + \Delta A, \quad (3.3.2)$$

где  $A^0$  является блочно-диагональной матрицей

$$A^0 = \begin{pmatrix} A_1 & & & \mathbf{0} \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & A_n \end{pmatrix}. \quad (3.3.3)$$

Блок

$$A_i = (\rho), \quad (3.3.4)$$

соответствует каждому действительному собственному значению (мультипликатору)  $\rho$  матрицы  $A$ . Блок

$$A_i = \rho \begin{pmatrix} \cos \omega & -\sin \omega \\ \sin \omega & \cos \omega \end{pmatrix} \quad (3.3.5)$$

соответствует каждой паре комплексно сопряженных мультипликаторов  $\rho e^{\pm i\omega}$ . Матрица  $\Delta A$  отлична от нулевой только в том случае, когда матрица

$A$  имеет кратные собственные значения. В этом случае базис в пространстве  $\mathbb{R}^n$  можно выбрать таким, чтобы для бесконечно малой постоянной  $\varepsilon > 0$  (см. раздел 2.3) выполнялось неравенство

$$\|\Delta A\| \leq \varepsilon. \quad (3.3.6)$$

Очевидно, что

$$\|A^0\| \leq \rho',$$

где  $\rho'$  представляет собой максимум абсолютных величин всех собственных значений матрицы  $A$ . Следовательно,

$$\|A\| \leq \rho' + \varepsilon. \quad (3.3.7)$$

Траектория отображения (3.3.1) задается при помощи уравнения

$$x_j = A^j x_0. \quad (3.3.8)$$

Если все собственные значения матрицы  $A$  лежат строго внутри единичной окружности, то из неравенства (3.3.7) вытекает, что

$$\|x_j\| \leq \|A\|^j \|x_0\| \leq (\rho' + \varepsilon)^j \|x_0\| \quad \text{для } j \geq 0, \quad (3.3.9)$$

то есть при  $j \rightarrow +\infty$  все траектории экспоненциально стремятся к неподвижной точке, расположенной в начале координат.

При переходе к произвольному базису в правой части оценки (3.3.9) появляется некоторая постоянная, вообще говоря, большая 1 (см. формулы (2.3.17) и (2.3.18), приведенные в разделе 2.3).

Как и в случае устойчивого положения равновесия можно ввести понятие ведущего и неведущего мультипликаторов устойчивой неподвижной точки.

Расположим мультипликаторы в порядке убывания абсолютной величины, полагая, что первые  $m$  мультипликаторов равны по абсолютной величине, то есть

$$|\rho_1| = \dots = |\rho_m| = \rho', \quad |\rho_i| < \rho' < 1 \quad \text{при } i \geq m + 1.$$

Обозначаем через  $\mathcal{E}^L$   $m$ -мерное собственное подпространство матрицы  $A$ , соответствующее мультипликаторам  $(\rho_1, \dots, \rho_m)$ , и через  $\mathcal{E}^{ss}$   $(n - m)$ -мерное собственное подпространство, соответствующее мультипликаторам  $(\rho_{m+1}, \dots, \rho_n)$ . Подпространство  $\mathcal{E}^L$  называют *ведущим* инвариантным подпространством, а  $\mathcal{E}^{ss}$  — *неведущим* или *сильно устойчивым инвариантным подпространством*.

Каждый вектор  $x \in \mathbb{R}^n$  можно однозначно представить в виде

$$x = u + v,$$

где  $u \in \mathcal{E}^L$ , а  $v \in \mathcal{E}^{ss}$ . В системе координат  $(u, v)$  отображение (3.3.1) можно представить следующим образом:

$$\begin{aligned}\bar{u} &= A_L u, \\ \bar{v} &= A_{ss} v,\end{aligned}$$

где  $\text{spectr } A_L = \{\rho_1, \dots, \rho_m\}$ , а  $\text{spectr } A_{ss} = \{\rho_{m+1}, \dots, \rho_n\}$ . Траектория отображения определяется формулой

$$\begin{aligned}u_j &= A_L^j u_0, \\ v_j &= A_{ss}^j v_0.\end{aligned}\tag{3.3.10}$$

Аналогично неравенству (3.3.7) получаем

$$\begin{aligned}\|u_j\| &\geq (\rho' - \varepsilon)^j \|u_0\|, \\ \|v_j\| &\leq (|\rho_{m+1}| + \varepsilon)^j \|v_0\|,\end{aligned}\tag{3.3.11}$$

где при соответствующем выборе базисов для подпространств  $\mathcal{E}^L$  и  $\mathcal{E}^{ss}$  величина  $\varepsilon$  произвольно мала. Отсюда для некоторого значения постоянной  $\nu > 1$  получаем следующее неравенство:

$$\|v_j\| \cdot \|u_0\|^\nu \leq \|v_0\| \cdot \|u_j\|^\nu.\tag{3.3.12}$$

Таким образом, все траектории, для которых  $u_0 \neq 0$  (то есть траектории вне подпространства  $\mathcal{E}^{ss}$ ), при  $j \rightarrow +\infty$  стремятся к точке  $O$  по касательной к подпространству  $\mathcal{E}^L$ . Кроме того, любая такая траектория стремится к точке  $O$  со скоростью, не превышающей  $(\rho' - \varepsilon)^j$ , тогда как траектории подпространства  $\mathcal{E}^{ss}$  стремятся к  $O$  со скоростью, превышающей  $(|\rho_{m+1}| + \varepsilon)^j$ , где постоянная  $\varepsilon > 0$  может быть бесконечно мала.

Что касается поведения траекторий по ведущим координатам  $u$ , то можно выделить три основных типа устойчивых неподвижных точек:

- (1) В случае  $m = 1$ , то есть мультипликатор  $\rho_1$  действительный и  $\rho_i < \rho_1$  ( $i = 2, \dots, n$ ), ведущее подпространство представляет собой прямую. При  $\rho_1 > 0$  все траектории, лежащие вне подпространства  $\mathcal{E}^{ss}$ , стремятся к точке  $O$  в определенном направлении: либо с положительной

полуоси  $u$  ( $u > 0$ ), либо с отрицательной полуоси  $u$  ( $u < 0$ ), как показано на рис. 3.2.5. Такая неподвижная точка называется *устойчивым узлом* (+).

- (2) Если  $m = 1$ , а  $\rho_1 < 0$ , все траектории, кроме лежащих в подпространстве  $\mathcal{E}^{ss}$ , стремятся к точке  $O$  вдоль оси  $u$ , но с каждой последующей итерацией знак координаты  $u$  изменяется, как показано на рис. 3.2.6. Такую неподвижную точку называют *устойчивым узлом* (−).
- (3) Если  $m = 2$ , а  $\rho_{1,2} = \rho' e^{\pm i\omega}$ ,  $\omega \notin \{0, \pi\}$ , неподвижная точка называется *устойчивым фокусом*. Ведущее подпространство неподвижной точки является двумерным, а все траектории, не лежащие в подпространстве  $\mathcal{E}^{ss}$ , достигают точки  $O$  вдоль спиралей, направленных по касательной к плоскости  $u$ .

Случай *вполне неустойчивой неподвижной точки*, когда абсолютные величины всех ее мультипликаторов  $\rho_i$  больше 1, сводится к приведенному выше случаю путем рассмотрения ее обратного отображения (поскольку собственные значения матрицы  $A^{-1}$  равны  $\rho_i^{-1}$ ). Следовательно, выполняется неравенство

$$\|x_j\| \leq \|A^{-1}\|^j \|x_0\| \leq (\rho' - \varepsilon)^j \|x_0\| \quad \text{при } j \leq 0,\tag{3.3.13}$$

аналогичное неравенству (3.3.9), где  $\rho'$  представляет собой наименьшее абсолютное значение мультипликаторов  $\rho_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ). Все траектории экспоненциально стремятся к точке  $O$  при  $j \rightarrow -\infty$ .

Как и в случае устойчивых неподвижных точек, здесь можно определить ведущее и неведущее инвариантные подпространства и, в соответствии со знаком мультипликаторов, выделить три основных типа вполне неустойчивых неподвижных точек: *неустойчивый узел* (+), *неустойчивый узел* (−) и *неустойчивый фокус*.

Если некоторые мультипликаторы неподвижной точки лежат строго внутри единичной окружности  $|\rho_i| < 1$  ( $i = 1, \dots, k$ ), а все остальные — вне ее:  $|\rho_j| > 1$  ( $j = k + 1, \dots, n$ ), то неподвижная точка принадлежит к *седловому типу*. Путем линейной невырожденной замены координат отображение приводится к виду

$$\begin{aligned}\bar{u} &= A^- u, \\ \bar{v} &= A^+ v,\end{aligned}\tag{3.3.14}$$

где  $\text{spectr } A^- = \{\rho_1, \dots, \rho_k\}$ ,  $\text{spectr } A^+ = \{\rho_{k+1}, \dots, \rho_n\}$ ,  $u \in \mathbb{R}^k$ ,  $v \in \mathbb{R}^{n-k}$ . Для итераций координат  $u$  и  $v$  справедливы оценки, аналогичные (3.3.9) и (3.3.13) соответственно. Следовательно, траектории, лежащие в *устойчивом*  $\mathcal{E}^s$ :  $v = 0$  и *неустойчивом*  $\mathcal{E}^u$ :  $u = 0$  *инвариантных подпространствах*, экспоненциально стремятся к седловой точке  $O$  при  $j \rightarrow +\infty$  и  $j \rightarrow -\infty$ , соответственно. Остальные траектории покидают малую окрестность точки  $O$ .

Таким образом, в устойчивом подпространстве  $\mathcal{E}^s$  седло является устойчивой неподвижной точкой, а в неустойчивом подпространстве  $\mathcal{E}^u$  — вполне неустойчивой неподвижной точкой. Кроме того, в подпространствах  $\mathcal{E}^s$  и  $\mathcal{E}^u$  можно выделить *устойчивое и неустойчивое ведущее и неведущее многообразия*  $\mathcal{E}^{sL}$ ,  $\mathcal{E}^{uL}$ ,  $\mathcal{E}^{ss}$  и  $\mathcal{E}^{uu}$ . Прямую сумму  $\mathcal{E}^{sE} = \mathcal{E}^s \oplus \mathcal{E}^{uL}$  будем называть *расширенным устойчивым инвариантным подпространством*, а  $\mathcal{E}^{uE} = \mathcal{E}^u \oplus \mathcal{E}^{sL}$  — *расширенным неустойчивым инвариантным подпространством*. Инвариантное подпространство  $\mathcal{E}^L = \mathcal{E}^{uE} \cap \mathcal{E}^{sE}$  называется *ведущим седловым инвариантным подпространством*.

Если точка  $O$  представляет собой узел и в подпространстве  $\mathcal{E}^s$ , и в подпространстве  $\mathcal{E}^u$ , то ее называют *седлом*. Если  $O$  является фокусом, по крайней мере, в одном из подпространств  $\mathcal{E}^s$  или  $\mathcal{E}^u$ , то она называется *седло-фокусом*.

### 3.4. Топологическая классификация неподвижных точек

В главе 2 показано, что вблизи грубого положения равновесия система дифференциальных уравнений топологически эквивалентна ее линеаризации. Аналогичное утверждение справедливо и для грубых неподвижных точек. Это позволяет дать полную классификацию систем дифференциальных уравнений в окрестности грубой периодической траектории. В этом случае приемлемым аналогом топологической эквивалентности служит *топологическая сопряженность*.

**Определение 3.1.** Два диффеоморфизма  $T_1$  и  $T_2$ , определенные в некоторых областях  $D_1$  и  $D_2$  соответственно, топологически сопряжены в областях  $U_1 \subseteq D_1$  и  $U_2 \subseteq D_2$ , если существует гомеоморфизм  $\eta: U_1 \rightarrow U_2$ , который переводит траектории (полутраектории, отрезки траекторий) диффеоморфизма  $T_1$  в траектории (полутраектории, отрезки траекторий) диффеоморфизма  $T_2$ .

Это означает, что для произвольной точки  $x \in D_1$  имеет место следующее неравенство (см. рис. 3.4.1):

$$\eta(T_1(x)) = T_2(\eta(x)). \quad (3.4.1)$$

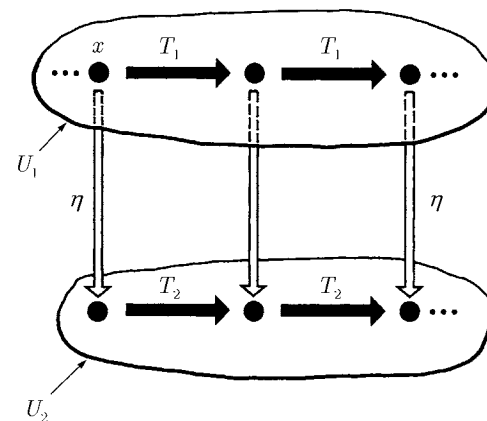


Рис. 3.4.1. Графическое представление гомеоморфизма  $\eta(T_1(x)) = T_2(\eta(x))$ , иллюстрирующее понятие топологической сопряженности между отображениями  $T_1$  и  $T_2$ , определенными в областях  $U_1$  и  $U_2$ , соответственно

**Теорема 3.1 (Гробман–Хартман).** Пусть  $O$  — грубая неподвижная точка некоторого диффеоморфизма  $T$ . Тогда существуют окрестности  $U_1$  и  $U_2$  точки  $O$ , в которых диффеоморфизм  $T$  и его линейная часть топологически сопряжены.

В случае негрубой неподвижной точки подобное утверждение неверно. Это легко показать, если матрица  $A$  линейного отображения

$$\bar{x} = Ax \quad (3.4.2)$$

имеет мультипликаторы, равные 1 по модулю. Здесь можно добавить в правую часть нелинейный член  $g(x)$  так, что новое отображение

$$\bar{x} = Ax + g(x) \quad (3.4.3)$$

не будет топологически сопряжено со своей линейной частью (3.4.2). Например, одномерное отображение

$$\bar{x} = x + x^2$$

имеет только одну неподвижную точку  $O$  (см. рис. 3.4.2), тогда как все точки являются неподвижными точками для соответствующего линеаризованного отображения

$$\bar{x} = x.$$

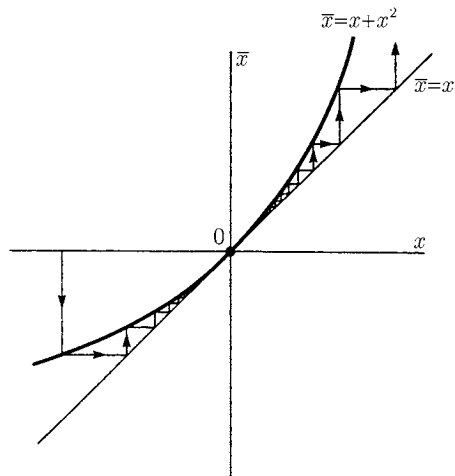


Рис. 3.4.2. Ступенчатая функция Ламерея. График функции  $f(x) = x + x^2$  касается биссектрисы в неподвижной точке типа седло-узел

Рассмотрим другой пример: отображение

$$\bar{x} = -x + x^3,$$

имеющее устойчивую неподвижную точку  $O$  (см. рис. 3.4.3), не сопряжено с линейным отображением

$$\bar{x} = x,$$

для которого все точки (кроме  $O$ ) периодические с периодом 2.

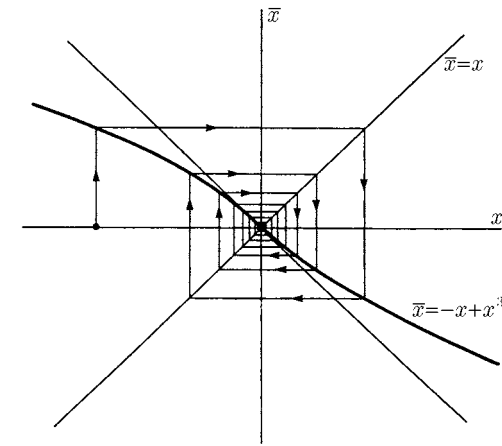


Рис. 3.4.3. Спираль Ламерея отображения  $\bar{x} = -x + x^3$ . Вне начала координат производные отображения меньше 1 по абсолютной величине; неподвижная точка является устойчивой

В качестве следующего примера рассмотрим линейное отображение, имеющее неподвижную точку с парой комплексно сопряженных мультипликаторов  $e^{\pm i\omega}$ :

$$\begin{aligned} \bar{x} &= x \cos \omega - y \sin \omega, \\ \bar{y} &= x \sin \omega + y \cos \omega. \end{aligned} \quad (3.4.4)$$

Все траектории лежат на инвариантных окружностях, расположенных симметрично относительно точки  $O(0, 0)$  (см. раздел 3.2). Это отображение не сопряжено с отображением

$$\begin{aligned} \bar{x} &= x \cos \omega - y \sin \omega - x(x^2 + y^2) \cos \omega, \\ \bar{y} &= x \sin \omega + y \cos \omega - y(x^2 + y^2) \cos \omega, \end{aligned} \quad (3.4.5)$$

траектории которого стремятся к точке  $O$  по спиральям (пример аналогичного положения равновесия приводится в разделе 2.5).

По теореме 3.1, в том случае, когда все мультипликаторы неподвижной точки  $O$  диффеоморфизма  $T$  меньше 1 по абсолютной величине, все положительные полутраектории стремятся к  $O$ . Если все мультипликаторы лежат вне единичной окружности, отрицательная полутраектория точки из

малой окрестности точки  $O$  стремится к неподвижной точке. При положительных итерациях отображения  $T$  все траектории (кроме самой точки) покидают окрестность неподвижной точки.

В случае седла, т. е. когда есть мультипликаторы как внутри, так и вне единичной окружности, неподвижная точка имеет (локально) *устойчивое инвариантное многообразие*  $W_{loc}^s$  и *неустойчивое инвариантное многообразие*  $W_{loc}^u$ , которые являются образами инвариантных подпространств  $\mathcal{E}^s$  и  $\mathcal{E}^u$  соответствующей линеаризованной системы относительно гомеоморфизма  $\eta$ , устанавливающего топологическую сопряженность. Следовательно, положительная полутраектория любой точки в многообразии  $W_{loc}^s$  лежит в нем полностью и стремится к седловой точке  $O$ . С другой стороны, отрицательная полутраектория произвольной точки в многообразии  $W_{loc}^u$  лежит полностью в  $W_{loc}^u$  и стремится к  $O$ . Размерность устойчивого (неустойчивого) многообразия равна числу мультипликаторов, лежащих внутри (вне) единичной окружности. Траектории точек, не лежащих в  $W_{loc}^s \cup W_{loc}^u$ , проходят мимо седла.

Очевидно, если один диффеоморфизм в окрестности седловой неподвижной точки сопряжен другому в окрестности другой неподвижной точки, то размерности устойчивых (неустойчивых) многообразий обеих этих седловых точек должны быть равны (для сохранения общности, полагаем, что  $W^u = \{\emptyset\}$  и  $\dim W^u = 0$  в случае устойчивой неподвижной точки; и  $W^s = \{\emptyset\}$ ,  $\dim W^s = 0$  в случае, когда точка вполне неустойчива). Однако, в отличие от случая грубых положений равновесия, *не только* одни лишь размерности устойчивого и неустойчивого многообразий являются инвариантами относительно локальной топологической сопряженности.

Чтобы найти другие инварианты, заметим, что теорема Гробмана–Хартмана допускает следующее обобщение:

*В некоторой окрестности начала координат линейное невырожденное отображение, не имеющее мультипликаторов на единичной окружности, топологически сопряжено с любым достаточно близким отображением.*

Из этого, в частности, вытекает то, что любые два близкие линейные отображения топологически сопряжены. Таким образом, для двух произвольных матриц  $A_0$  и  $A_1$ , отображения

$$\bar{x} = A_0 x \quad \text{и} \quad \bar{x} = A_1 x$$

будут топологически сопряжены, если можно построить такое семейство

матриц  $A(s)$ , непрерывно зависящее от параметра  $s \in [0, 1]$ , что  $A(0) = A_0$  и  $A(1) = A_1$ , при условии, что все матрицы  $A(s)$  являются невырожденными и не имеют собственных значений на единичной окружности.

Легко проверить, что такое семейство существует тогда и только тогда, когда обе матрицы  $A_0$  и  $A_1$  имеют одинаковое число мультипликаторов внутри единичной окружности и за ее пределами и одинаковые величины  $\delta_s$  и  $\delta_u$ , где  $\delta_s = \text{sign} \prod_{i=1}^k \rho_i$ , а  $\delta_u = \text{sign} \prod_{i=k+1}^n \rho_i$ , где мультипликаторы  $(\rho_1, \dots, \rho_k)$  лежат внутри единичной окружности, а  $(\rho_{k+1}, \dots, \rho_n)$  — вне. Величины  $\delta_s$  и  $\delta_u$  остаются неизменными, когда матрица  $A_0$  непрерывно изменяется до  $A_1$ , поскольку произведение мультипликаторов может менять знак только в том случае, когда какой-нибудь мультипликатор обращается в нуль, что возможно только в случае вырожденных отображений.

Таким образом, если какие-то неподвижные точки имеют один и тот же *топологический тип*, то есть имеют одинаковый набор из четырех чисел  $(k, \delta_s, n - k, \delta_u)$ , то они *топологически сопряжены*, то есть существует гомеоморфизм, устанавливающий топологическую сопряженность между диффеоморфизмами в окрестностях этих точек. В частности любой диффеоморфизм вблизи грубой неподвижной точки топологически сопряжен с отображением

$$\bar{x} = A^s x, \quad \bar{y} = A^u y, \quad (3.4.6)$$

где  $A^s$  и  $A^u$  являются соответственно  $(k \times k)$ - и  $(n - k) \times (n - k)$ -матрицами вида

$$A^s = \begin{pmatrix} 1/2 & & & \mathbf{0} \\ & 1/2 & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & \delta_s/2 \end{pmatrix}, \quad A^u = \begin{pmatrix} 2 & & & \mathbf{0} \\ & 2 & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & 2\delta_u \end{pmatrix}.$$

Следует подчеркнуть, что отображения вида (3.4.6), имеющее различные величины  $\delta_s$ , не могут быть топологически сопряжены вследствие того, что ограничение  $\bar{x} = A^s x$  отображения (3.4.6) на устойчивое инвариантное подпространство  $y = 0$  сохраняет их ориентацию в пространстве  $\mathbb{R}^k$ , если  $\delta_s = 1$ , но при  $\delta_s = -1$  ориентация изменяется. Данное утверждение справедливо также для  $\delta_u$ . Приходим к следующей теореме.

**Теорема 3.2.** *Две грубые неподвижные точки топологически сопряжены тогда и только тогда, когда они принадлежат одному топологическому типу.*

Таким образом, число топологических типов грубых неподвижных точек  $n$ -мерных отображений превышает число топологических типов грубых положений равновесия дифференциальных уравнений в  $\mathbb{R}^n$ . Так, двумерные диффеоморфизмы могут иметь два типа устойчивых, два типа вполне неустойчивых и четыре типа седловых неподвижных точек. Например, линейные отображения

$$\begin{cases} \bar{x} = x/2 \\ \bar{y} = y/2 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \bar{x} = x/2 \\ \bar{y} = -y/2 \end{cases}$$

имеют неподвижные точки типа узел, но первая точка является ориентируемой, тогда как вторая неориентируема.

(Ремарка: грубая неподвижная точка с парой комплексно сопряженных мультипликаторов имеет топологический тип ориентируемого узла.)

Заметим далее, что отображения

$$\begin{cases} \bar{x} = 2x \\ \bar{y} = 2y \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \bar{x} = 2x \\ \bar{y} = -2y \end{cases}$$

имеют в начале координат соответственно ориентируемый и неориентируемый неустойчивый топологический узел.

Отображения систем:

$$\begin{cases} \bar{x} = x/2 \\ \bar{y} = 2y \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \bar{x} = -x/2 \\ \bar{y} = -2y \end{cases}$$

дают примеры топологических седел  $(\delta_s = (+), \delta_u = (+))$  и  $(\delta_s = (-), \delta_u = (-))$ , а отображения

$$\begin{cases} \bar{x} = x/2 \\ \bar{y} = -2y \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \bar{x} = -x/2 \\ \bar{y} = 2y \end{cases}$$

дают примеры топологических седел  $(+, -)$  и  $(-, +)$ .

Очевидно, что в случае  $\delta_s > 0$  устойчивое инвариантное многообразие (здесь ось  $x$ ) седловой точки разделяется точкой  $O$  на две части, лучи  $x > 0$  и  $x < 0$ , каждый из которых инвариантен относительно отображения. В случае  $\delta_s < 0$ , эти лучи по отдельности уже не инвариантны в том смысле, что отображение переводит один луч в другой. Аналогично, индекс  $\delta_u$  характеризует структуру неустойчивого многообразия седловой точки  $O$ .

Нужно подчеркнуть, что отображение Пуанкаре всегда сохраняет ориентацию в  $\mathbb{R}^n$ , то есть произведение всех мультипликаторов периодической траектории положительно. Из этого вытекает, что индексы  $\delta_s$  и  $\delta_u$  неподвижной точки отображения Пуанкаре должны иметь один и тот же знак. Тем не менее, отображение Пуанкаре в ограничении на инвариантное (устойчивое или неустойчивое) многообразие *может не сохранять* ориентацию (например, если  $\delta_s$  и  $\delta_u$  отрицательны). Таким образом, изучение неподвижных точек неориентируемых отображений тоже имеет смысл.

В разделе 3.1 было показано, что значения мультипликаторов неподвижной точки отображения Пуанкаре (и, следовательно, ее топологический тип) не зависят от выбора секущей, то есть всегда можно корректно определить топологический тип  $(k, \delta_s, n - k, \delta_u)$  периодической траектории. Чтобы закончить с классификацией, приведем следующее простое утверждение.

**Лемма 3.1.** Пусть система  $X_1$  дифференциальных уравнений имеет периодическую траекторию  $L_1$ , а система  $X_2$  — периодическую траекторию  $L_2$ . Тогда, система  $X_1$  в некоторой окрестности траектории  $L_1$  топологически эквивалентна системе  $X_2$  в некоторой окрестности траектории  $L_2$ , если и только если соответствующие отображения Пуанкаре топологически сопряжены в окрестностях соответствующих неподвижных точек (независимо от выбора секущих).

Из этой леммы и теоремы 3.2 получаем следующую теорему.

**Теорема 3.3.** Две грубые периодические траектории локально топологически эквивалентны тогда и только тогда, когда они принадлежат к одному и тому же топологическому типу.

### 3.5. Свойства нелинейных отображений вблизи устойчивой неподвижной точки

В предыдущем разделе было формально представлено полное описание динамических систем вблизи грубой периодической траектории. Однако, такая топологическая классификация периодических траекторий и положений равновесия, является слишком грубой. Например, утверждение об эквивалентности узла и фокуса с практической точки зрения кажется довольно странными. Ниже будут рассмотрены более тонкие (и более важные) особенности грубых неподвижных точек.

Предположим, что отображение

$$\bar{x} = Ax + h(x), \quad (3.5.1)$$

где

$$h(0) = 0, \quad h'(0) = 0, \quad (3.5.2)$$

имеет устойчивую неподвижную точку в начале координат. Это означает, что абсолютная величина всех мультипликаторов  $\rho_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) матрицы  $A$  строго меньше 1. Легко показать, что все траектории, начинающиеся в малой окрестности начала координат, экспоненциально стремятся к точке  $O$ . Действительно, можно доказать, что в базисе Жордана для нормы матрицы  $A$  выполняется неравенство (3.3.9), то есть

$$\|A\| \leq \rho' + \varepsilon,$$

где  $\rho' = \max_{i=1, \dots, n} |\rho_i| < 1$ . Из соотношения

$$h(x) = h(0) + x \int_0^1 h'(sx) ds$$

получаем, что

$$\|h(x)\| \leq \|x\| \max_{\|y\| \leq \|x\|} \|h'(y)\|.$$

Отсюда

$$\|h(x)\| \leq \varepsilon \|x\|, \quad (3.5.3)$$

где  $\varepsilon > 0$  можно взять как угодно малым, когда  $x$  мало.

Следовательно, для отображения (3.5.1) получаем

$$\|\bar{x}\| \leq \|A\| \|x\| + \|h(x)\| \leq (\rho' + 2\varepsilon) \|x\|,$$

и, таким образом, для  $j$ -й итерации начальной точки  $x_0$  получаем следующее неравенство:

$$\|x_j\| \leq (\rho' + 2\varepsilon)^j \|x_0\| \quad (3.5.4)$$

где  $x_j \rightarrow 0$  при  $j \rightarrow +\infty$ , так как  $\rho' < 1$ , а  $\varepsilon$  мало.

Переупорядочим собственные значения матрицы  $A$  так, что

$$|\rho_1| = \dots = |\rho_m| = \rho', \quad |\rho_i| < \rho' \quad \text{для } i = m+1, \dots, n.$$

Матрицу  $A$  можно представить в виде

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix},$$

где  $\text{spectr} A_1 = \{\rho_1, \dots, \rho_m\}$ , а  $\text{spectr} A_2 = \{\rho_{m+1}, \dots, \rho_n\}$ . Тогда отображение (3.5.1) принимает вид

$$\begin{aligned} \bar{u} &= A_1 u + f(u, v), \\ \bar{v} &= A_2 v + g(u, v), \end{aligned} \quad (3.5.5)$$

где  $u = (u_1, \dots, u_m)$  и  $v = (v_1, \dots, v_{n-m})$  представляют собой проекции точки  $x$  на ведущее и неведущее подпространства матрицы  $A$ , функции  $f, g \in \mathbb{C}^r$ ;

$$f(0) = 0, \quad g(0) = 0, \quad g'(0) = 0, \quad h'(0) = 0. \quad (3.5.6)$$

В главе 5 доказывается следующая теорема

**Теорема 3.4 (О неведущем многообразии).** *В окрестности  $U$  точки  $O$  существует единственное  $(n-m)$ -мерное  $\mathbb{C}^r$ -гладкое неведущее (сильно устойчивое) инвариантное многообразие  $W_{loc}^{ss}$  вида*

$$v = \varphi(u),$$

где

$$\varphi(0) = \varphi'_v(0) = 0. \quad (3.5.7)$$

Из теоремы 3.4 вытекает следующая

**Теорема 3.5.** *Для любой точки  $x_0$ , не лежащей в  $W_{loc}^{ss}$ , ее траектория  $\{x_j\}_{j \geq 0}$  стремится к точке  $O$  по ведущему направлению  $v = 0$ , и*

$$\|x_j\| \geq C (\rho' e - \varepsilon)^j \text{dist}(x_0, W_{loc}^{ss}), \quad (3.5.8)$$

где  $C$  — некоторая положительная константа, а  $\varepsilon$  может быть произвольно мало при малом  $x_0$ .

Доказательство. Во-первых, распрямим многообразие  $W_{loc}^{ss}$ , сделав следующую замену переменных

$$w = u - \varphi(v). \quad (3.5.9)$$



В новых переменных, уравнение многообразия  $W_{loc}^{ss}$  имеет вид  $w = 0$ . Из инвариантности следует, что  $\bar{w} = 0$  при  $w = 0$ . Так как функция  $\varphi(v)$  не содержит линейных членов (см. формулу (3.5.7)), преобразование (3.5.9) не вносит изменений в линейную часть отображения. В результате, в новых координатах отображение (3.5.5) принимает вид

$$\bar{w} = (A_1 + \tilde{f}(w, v)) w \quad (3.5.10)$$

$$\bar{v} = A_2 v + g(w + \varphi(v), v), \quad (3.5.11)$$

где

$$\tilde{f}(0, 0) = 0. \quad (3.5.12)$$

В базисе Жордана (см. раздел 3.3) норма матрицы  $A_1$  определяется следующим образом:

$$\|A_1\| \geq \rho' - \varepsilon/2.$$

Из (3.5.10) и (3.5.12) получаем, что

$$\|\bar{w}\| \geq (\rho' - \varepsilon) \|w\|, \quad (3.5.13)$$

когда норма  $\|w, v\|$  достаточно мала. Как было показано, если  $\|w_0, v_0\|$  достаточно мало, то норма  $\|w_j, v_j\|$  также мала для всех  $j \geq 0$ . Следовательно, неравенство (3.5.13) выполняется для любой пары  $(w_j, w_{j+1} = \bar{w}_j)$ . Отсюда получаем оценку

$$\|w_j\| \geq (\rho' - \varepsilon)^j \|w_0\|$$

то есть неравенство (3.5.8) доказано.

Теперь покажем, что если начальная точка не принадлежит многообразию  $W_{loc}^{ss}$ , ее траектория стремится к точке  $O$  вдоль ведущего подпространства  $v = 0$ . При  $w \neq 0$  рассмотрим величину  $z = \|v\|/\|w\|$ . Мы хотим показать, что  $z_j \rightarrow 0$  на траекториях  $(w_j, v_j)_{j \geq 0}$  отображения (3.5.10)–(3.5.11).

Для  $\|\bar{w}\|$  имеем оценку (3.5.13). Аналогично из (3.5.11) получаем

$$\|\bar{v}\| \leq (|\rho_{m+1}| + \varepsilon) \|v\| + \|w\| \max \|f'_u\|,$$

где максимум берется по окрестности точки  $O$  диаметра  $\|w, v\|$ . Из неравенства (3.5.13) вытекает, что

$$\begin{aligned} z_{j+1} &\leq (|\rho_{m+1}| + \varepsilon) \|v_j\| / (\rho' - \varepsilon) \|w_j\| + \\ &+ \max \|f'_u\| / (\rho' - \varepsilon) \equiv \mu z_j + \kappa_j, \end{aligned} \quad (3.5.14)$$

где  $\mu = (|\rho_{m+1}| + \varepsilon) / (\rho' - \varepsilon) < 1$ , а

$$\kappa_j \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad j \rightarrow +\infty. \quad (3.5.15)$$

Из неравенства (3.5.14) получаем

$$\begin{aligned} \mu^{-(j+1)} z_{j+1} &\leq \mu^{-j} z_j + \mu^{-(j+1)} \kappa_j, \\ \mu^{-(j+1)} z_{j+1} &\leq z_0 + \sum_{i=0}^j \mu^{-(i+1)} \kappa_i, \\ z_j &\leq z_0 \mu^j + \sum_{i=0}^{j-1} \mu^{j-(i+1)} \kappa_i. \end{aligned}$$

Поскольку  $\mu < 1$ , первое слагаемое стремится к нулю при  $j \rightarrow \infty$ . Чтобы доказать, что  $z_j \rightarrow 0$ , нам нужно показать, что

$$I_j = \sum_{i=0}^{j-1} \mu^{j-(i+1)} \kappa_i \rightarrow 0.$$

Очевидно, что это так, если  $\kappa_j \rightarrow 0$ . Действительно, выберем некоторое натуральное  $J$  и разобьем сумму на две части:

$$I_j = \sum_{i=0}^{J-1} \mu^{j-(i+1)} \kappa_i + \sum_{i=J}^{j-1} \mu^{j-(i+1)} \kappa_i.$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} I_j &\leq \mu^{j-J} \sum_{i=0}^{J-1} \kappa_i + \left( \sum_{i=J}^{j-1} \mu^{j-(i+1)} \right) \max_{i \leq J} \kappa_i \\ &\leq \mu^{j-J} \sum_{i=0}^{J-1} \kappa_i + (1 - \mu)^{-1} \max_{i \geq J} \kappa_i. \end{aligned} \quad (3.5.16)$$

Согласно (3.5.15), при увеличении  $J$  второй член неравенства (3.5.16) становится произвольно малым. При выборе достаточно большого значения  $J$  первый член неравенства (3.5.16) может быть также произвольно малым, в связи с чем величина  $I_j$  становится произвольно малой, если положить, что  $j \rightarrow +\infty$  (а также  $J \rightarrow +\infty$ ,  $j - J \rightarrow +\infty$ ).

Таким образом, если  $w_0 \neq 0$ , то  $\|v_j\|/\|w_j\| \rightarrow 0$ , то есть любая траектория, не лежащая в  $W_{loc}^{ss}$ , стремится к ведущему многообразию при  $j \rightarrow +\infty$ . Теорема 3.5 доказана.

Отображение (3.5.10)–(3.5.11) в ограничении на неведущем многообразии  $w = 0$  имеет вид

$$\bar{v} = A_2 v + g(\varphi(v), v). \quad (3.5.17)$$

На этом многообразии точка  $O$  – устойчивая неподвижная с мультипликаторами  $(\rho_{m+1}, \dots, \rho_n)$ . Полученные выше результаты можно применить и к данному отображению. В частности, имеет место следующая экспоненциальная оценка, аналогичная неравенству (3.5.4):

$$\|v_j\| \leq C (|\rho_{m+1}| + \varepsilon)^j \|v_0\|, \quad (3.5.18)$$

то есть любая траектория из многообразия  $W_{loc}^{ss}$  стремится к точке  $O$  чрезвычайно быстро. Поскольку теоремы 3.4 и 3.5 справедливы и для отображения (3.5.17), почти все траектории в многообразии  $W_{loc}^{ss}$  стремятся к точке  $O$  с экспоненциальной скоростью, асимптотически равной  $|\rho_{m+1}|$ . Те траектории, которые стремятся к точке  $O$  быстрее, образуют  $\mathbb{C}^r$ -гладкое многообразие  $W_{loc}^{sss}$ , касающееся в точке  $O$  собственного подпространства матрицы  $A$ , соответствующего мультипликаторам, модули которых меньше  $|\rho_{m+1}|$ . Теорема о неведущем многообразии также применима для ограничения отображения на  $W_{loc}^{sss}$  и так далее. Снова получаем иерархию неведущих многообразий:  $W_{loc}^{ss}, W_{loc}^{sss}, W_{loc}^{ssss}, \dots$ , состоящих из траекторий со все увеличивающимися скоростями сходимости к неподвижной точке.

Как и в линейном случае, в зависимости от поведения отображения по ведущим координатам, можно выделить три основных типа устойчивых точек: *узел (+)*, *узел (-)* и *фокус*.

Точка  $O$  называется *узлом*, когда  $m = 1$ , то есть когда ведущий мультипликатор  $\rho_1$  простой и действительный:

$$1 > |\rho_1| > |\rho_i| \quad (i = 2, \dots, n). \quad (3.5.19)$$

Кроме того, точку называют *узлом (+)*, если  $0 < \rho_1 < 1$ , и *узлом (-)*, если  $-1 < \rho_1 < 0$ .

Точка  $O$  называется *фокусом*, когда  $m = 2$  и ведущие мультипликаторы комплексные:

$$1 > |\rho_1| = |\rho_2| > |\rho_i| \quad (i = 3, \dots, n). \quad (3.5.20)$$

В случае узла  $(n - 1)$ -мерное неведущее многообразие делит окрестность неподвижной точки  $O$  на две части, а именно:  $w > 0$  и  $w < 0$ . Здесь уравнение (3.5.10) для ведущей координаты  $w$  можно записать в виде

$$\bar{w} = \rho_1 w + o(w). \quad (3.5.21)$$

Очевидно, что при  $\rho_1 > 0$  каждая из двух частей является инвариантной для отображения. Траектории, не лежащие в  $W_{loc}^{ss}$ , монотонно стремятся к точке  $O$  строго в одном из двух направлений: либо из области  $w > 0$ , либо из области  $w < 0$ .

Когда  $\rho_1 < 0$ , части циклически переставляются отображением, то есть знак ведущей координаты меняется при каждой итерации.

В случае фокуса неведущее многообразие имеет размерность  $(n - 2)$  и уже не делит окрестность точки  $O$ . Введя обозначение  $\rho_{1,2} = \rho e^{\pm i\omega}$ , уравнение (3.5.10) для ведущих координат можно представить как

$$\begin{aligned} \bar{w}_1 &= \rho(\cos \omega + \dots) w_1 - \rho(\sin \omega + \dots) w_2, \\ \bar{w}_2 &= \rho(\sin \omega + \dots) w_1 + \rho(\cos \omega + \dots) w_2, \end{aligned} \quad (3.5.22)$$

или в полярных координатах

$$\bar{r} = (\rho + \dots) r \quad (3.5.23)$$

$$\bar{\varphi} = \varphi + \omega + \dots, \quad (3.5.24)$$

где многоточиями обозначены члены более высокого порядка. Из (3.5.23) и (3.5.24) вытекает, что все траектории, не принадлежащие многообразию  $W_{loc}^{ss}$ , должны стремиться к точке  $O$  по спирали (касаясь ведущей плоскости  $v = 0$ ).

Случай  $|\rho_i| > 1$  ( $i = 1, \dots, n$ ) приводится к описанному для обратного отображения. В этом случае координаты на траектории оцениваются как

$$\|x_j\| \leq \left( \min_{i=1, \dots, n} \rho_i - 2\varepsilon \right)^j \|x_0\| \quad \text{при} \quad j \leq 0. \quad (3.5.25)$$

Соответствующая неподвижная точка является экспоненциально вполне неустойчивой. Существование гладкого неведущего многообразия  $W_{loc}^{uu}$  можно установить таким же образом, как и многообразия  $W_{loc}^{ss}$  для устойчивой неподвижной точки, но в данном случае нужно полагать, что  $j \rightarrow -\infty$ .

В зависимости от поведения траекторий по ведущим координатам возможны неподвижные точки следующих типов: *узел* (+), *узел* (−) и *фокус*.

В завершение раздела приведем теорему о ведущем инвариантном многообразии (доказательство представлено в главе 5).

**Теорема 3.6 (О ведущем инвариантном многообразии).** *Устойчивая неподвижная точка  $O$  имеет  $m$ -мерное  $C^{\min(r, r_L)}$ -гладкое инвариантное многообразие  $W_{loc}^L$  (вообще говоря, неединственное), касающееся в точке  $O$  подпространства  $v = 0$ ; в данном случае*

$$r_L = \left[ \frac{\ln \rho_{m+1}}{\ln \rho_1} \right] \geq 1, \quad (3.5.26)$$

где через  $[x]$  обозначено наибольшее целое число, строго меньшее  $x$ , а через  $m$  — число ведущих мультипликаторов.

### 3.6. Неподвижные точки седлового типа. Инвариантные многообразия

Рассмотрим отображение  $T$ , имеющее грубую седловую неподвижную точку  $O$ , первые  $k$  мультипликаторов которой лежат внутри единичной окружности, а остальные  $(n - k)$  — вне ее, то есть  $|\rho_i| < 1$  ( $i = 1, \dots, k$ ),  $|\rho_j| > 1$  ( $j = k + 1, \dots, n$ ), где  $k \neq \{0, n\}$ . Для удобства, обозначим мультипликаторы, лежащие внутри единичной окружности, через  $(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ , а лежащие вне — через  $(\gamma_1, \dots, \gamma_{n-k})$ . Будем предполагать, что мультипликаторы упорядочены следующим образом:

$$|\lambda_k| \leq \dots \leq |\lambda_2| \leq |\lambda_1| < 1 < |\gamma_1| \leq |\gamma_2| \leq \dots \leq |\gamma_{n-k}|.$$

Линейной невырожденной заменой переменных вблизи точки  $O$  отображение  $T$  приводится к виду

$$\begin{aligned} \bar{u} &= A^- u + f(u, v), \\ \bar{v} &= A^+ v + g(u, v), \end{aligned} \quad (3.6.1)$$

где  $u \in \mathbb{R}^k$ ,  $v \in \mathbb{R}^{n-k}$ ,  $\text{spectr } A^- = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$ , а  $\text{spectr } A^+ = \{\gamma_1, \dots, \gamma_{n-k}\}$ ;  $f, g$  —  $C^r$ -гладкие ( $r \geq 1$ ) функции, которые вместе с первыми производными обращаются в нуль в начале координат.

Изучение отображения  $T$  вблизи неподвижной точки седлового типа аналогично изучению системы дифференциальных уравнений вблизи положения равновесия седлового типа. Его можно свести к задаче о существовании устойчивого и неустойчивого инвариантных многообразий точки  $O$ . Эта задача детально изучается ниже. Пуанкаре доказал существование аналитических инвариантных многообразий для аналитических отображений. Позднее, Адамар [31] рассмотрел гладкий случай и доказал существование инвариантных многообразий, удовлетворяющих условию Липшица.

**Теорема 3.7 (теорема Адамара).** *Седловая неподвижная точка  $O$  имеет два инвариантных многообразия: устойчивое  $W_{loc}^s: v = \psi^*(u)$  и неустойчивое  $W_{loc}^u: u = \varphi^*(v)$ , где функции  $\psi^*(u)$  и  $\varphi^*(v)$  удовлетворяют следующим условиям Липшица:*

$$\|\psi^*(u_2) - \psi^*(u_1)\| \leq N \|u_2 - u_1\|, \quad (3.6.2)$$

$$\|\varphi^*(v_2) - \varphi^*(v_1)\| \leq L \|v_2 - v_1\|, \quad (3.6.3)$$

где  $N > 0$  и  $L > 0$  — некоторые константы.

Доказательство. Докажем лишь существование многообразия  $W_{loc}^u$ , поскольку обратное отображение  $T^{-1}$  также можно представить в виде (3.6.1) с тем отличием, что переменные  $u$  и  $v$  меняются местами. Следовательно, доказав, что отображение  $T$  имеет инвариантное многообразие  $W_{loc}^u$  вида  $u = \varphi^*(v)$ , применяя те же рассуждения к отображению  $T^{-1}$ , можно доказать существование инвариантного многообразия вида  $v = \psi^*(u)$ , то есть заданного многообразия  $W_{loc}^s$ .

Выберем малое  $\delta > 0$  и окрестность  $D_1 \otimes D_2 \in \mathbb{R}^n$  точки  $O$ , где  $D_1$  и  $D_2$  — шары диаметром  $\delta$  в  $\mathbb{R}^k$  и  $\mathbb{R}^{n-k}$  соответственно. Выберем произвольную поверхность  $\mathscr{W}$  вида  $u = \varphi(v)$  такую, что

$$\|\varphi\| \leq \delta \quad (3.6.4)$$

$$\|\varphi'\| \leq L \quad (3.6.5)$$

для некоторого  $L > 0$ . Ниже покажем, что если величина  $\delta$  достаточно мала, то образ поверхности  $\mathscr{W}$  пересекается с окрестностью  $D_1 \otimes D_2$  по поверхности того же вида  $\bar{u} = \tilde{\varphi}(\bar{v})$ , где  $\tilde{\varphi}$  удовлетворяет условиям (3.6.4)–(3.6.5) при тех же значениях постоянной  $L$ . Следовательно, можно рассмотреть последовательность поверхностей  $\{\mathscr{W}_j: u = \varphi_j(v)\}_{j=0}^{j=\infty}$ , каждая из которых

представляет собой последовательный образ исходной поверхности  $\mathscr{W}$ , полученный под действием отображения  $T: \varphi_j = T^j \varphi$ . Далее покажем, что данная последовательность равномерно сходится к некоторой поверхности  $u = \varphi^*(v)$ , удовлетворяющей условию Липшица. Кроме того,  $\varphi^*$  не зависит от исходной функции  $\varphi$ . По построению функция  $\varphi^* = \tilde{\varphi}^*$ , то есть ее график является инвариантным относительно отображения  $T$ . Таким образом, поверхность  $u = \varphi^*(v)$  представляет собой искомое инвариантное многообразие  $W_{loc}^u: T(W_{loc}^u) \cap (D_1 \otimes D_2) = W_{loc}^u$ .

Шаг 1. Пусть  $\mathscr{W}$  является произвольной поверхностью вида  $u = \varphi(v)$ , удовлетворяющей условиям (3.6.4) и (3.6.5) при некотором значении  $L$ . Подставив  $u = \varphi(v)$  в (3.6.1), получаем следующее параметрическое представление образа поверхности  $\mathscr{W}$  относительно  $T$ , где  $v$  принимает произвольные значения из области  $D_2$ :

$$\bar{u} = A^- \varphi(v) + f(\varphi(v), v), \quad (3.6.6)$$

$$\bar{v} = A^+ v + g(\varphi(v), v). \quad (3.6.7)$$

Теперь покажем, что для любого значения  $\bar{v}$ , норма которого не превышает  $\delta$ , величина  $\bar{u}$  однозначно определяется формулами (3.6.6) и (3.6.7). Для этого записываем выражение (3.6.7) в виде

$$v = (A^+)^{-1}(\bar{v} - g(\varphi(v), v)). \quad (3.6.8)$$

Если  $\delta$  достаточно мало, то норма  $\|\partial(g, f)/\partial(u, v)\|$  также мала. Следовательно<sup>2</sup>, норма

$$\left\| \frac{dg(\varphi(v), v)}{dv} \right\| \leq \|g'_u\| \cdot \|\varphi'\| + \|g'_v\|$$

тоже мала и, по теореме о неявной функции, координату  $v$  можно однозначно найти из уравнения (3.6.8) через  $\bar{v}$ . Необходимо заметить, что  $\|v\|$  также не превышает  $\delta$ . Действительно, из (3.6.8) вытекает, что

$$\|v\| \leq \|(A^+)^{-1}\| (\|\bar{v}\| + \|g'_u\| \cdot \|\varphi(v)\| + \|g'_v\| \|v\|),$$

откуда

$$\|v\| \leq \|(A^+)^{-1}\| \frac{(\|\bar{v}\| + \|g'_u\| \cdot \|\varphi(v)\|)}{1 - \|(A^+)^{-1}\| \|g'_v\|}.$$

<sup>2</sup>В данном случае  $\|\cdot\|_0 = \sup \|\cdot\|$ .

Следовательно, если  $\|\bar{v}\| \leq \delta$ , то  $\|v\| \leq \delta$ , так как  $\|(A^+)^{-1}\| < 1$ ,  $\|\varphi(v)\|_0 \leq \delta$ , а  $\|g'_{(u,v)}\|_0$  мала.

Итак, из (3.6.8) находим  $v$  как некоторую функцию от  $\bar{v}$ . После этого, подставив полученное выражение в (3.6.6), находим, что каждому значению  $\bar{v}$  такому, что  $\|\bar{v}\| \leq \delta$ , соответствует ровно одно значение  $\bar{u}$  такое, что точка  $(\bar{u}, \bar{v})$  есть образ некоторой точки  $(u, v) \in \mathscr{W}$ . Обозначим это значение  $\bar{u}$  как  $\bar{u} = \tilde{\varphi}(\bar{v})$ .

Шаг 2. Покажем, что поверхность  $T\mathscr{W}: \bar{u} = \tilde{\varphi}(\bar{v})$  удовлетворяет условиям (3.6.4) и (3.6.5). Иными словами, покажем, что поверхность  $T\mathscr{W}$  целиком лежит в  $\delta$ -окрестности  $(D_1 \otimes D_2)$  точки  $O$ , а норма производной функции  $\tilde{\varphi}$  не превышает  $L$ . Из (3.6.4) и (3.6.6) вытекает, что

$$\begin{aligned} \|\bar{u}\| &\leq \|A^-\| \|\varphi(v)\| + \|f'_u\| \cdot \|\varphi(v)\| + \|f'_v\| \cdot \|u\| \\ &\leq (\|A^-\| + \|f'_u\| + \|f'_v\|) \delta. \end{aligned}$$

Таким образом, при  $\|A^-\| < 1$  и малой величине нормы  $\|f'_{(u,v)}\|_0$  получаем тождество

$$\|\tilde{\varphi}(\bar{v})\| \equiv \|\bar{u}\| \leq \delta,$$

то есть для  $\tilde{\varphi}$  условие (3.6.4) действительно выполняется.

Кроме того, из уравнений (3.6.6) и (3.6.7) находим

$$\frac{d\bar{u}}{dv} = A^- \varphi' + f'_u(\varphi(v), v) \varphi' + f'_v(\varphi(v), v),$$

$$\frac{d\bar{v}}{dv} = A^+ + g'_u(\varphi(v), v) \varphi' + g'_v(\varphi(v), v)$$

откуда

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}'(\bar{v}) \equiv \frac{d\bar{u}}{d\bar{v}} &= (A^- \varphi' + f'_u(\varphi(v), v) \varphi' + f'_v(\varphi(v), v)) \cdot \\ &\cdot [A^+ + g'_u(\varphi(v), v) \varphi' + g'_v(\varphi(v), v)]^{-1}. \end{aligned}$$

Окончательно получаем выражение

$$\tilde{\varphi}'(\bar{v}) = A^- \varphi'(v) (A^+)^{-1} + \dots,$$

где через многоточие обозначены члены порядка  $\|(f, g)'_{(u,v)}\|_0$ , стремящиеся к нулю при  $\delta \rightarrow 0$ . Очевидно, что поскольку  $\|A^-\| < 1$  и  $\|(A^+)^{-1}\| < 1$ , получаем  $\|\tilde{\varphi}'\|_0 \leq L$ , при условии, что  $\|\varphi'\|_0 \leq L$ , а  $\delta$  достаточно мало.

Шаг 3. Выше показано, что под действием отображения  $T$  любая поверхность  $\mathscr{W}$ , удовлетворяющая условиям (3.6.4) и (3.6.5), отображается на поверхность, удовлетворяющую тем же условиям. Следовательно, все итерации поверхности  $\mathscr{W}$  относительно  $T$  определены. Докажем теперь, что последовательность  $\mathscr{W}_j: u = \varphi_j(v)$  этих итераций равномерно сходится к некоторой поверхности  $\mathscr{W}^* : u = \varphi^*(v)$ . Поскольку  $\mathscr{W}_{j+1} = T(\mathscr{W}_j) \cap (D_1 \otimes D_2)$ , то по непрерывности,  $\mathscr{W}^* = T(\mathscr{W}^*) \cap (D_1 \otimes D_2)$ , то есть данная поверхность является инвариантной для отображения  $T$ .

Чтобы доказать это, покажем, что существует такое значение  $K < 1$ , что

$$\sup_{\bar{v} \in D_2} \|\varphi_{j+2}(\bar{v}) - \varphi_{j+1}(\bar{v})\| \leq K \sup_{v \in D_2} \|\varphi_{j+1}(v) - \varphi_j(v)\|. \quad (3.6.9)$$

Возьмем произвольное  $\bar{v} \in D_2$  и рассмотрим пару точек  $\bar{M}_1(\varphi_{j+1}(\bar{v}), \bar{v})$  и  $\bar{M}_2(\varphi_{j+2}(\bar{v}), \bar{v})$ . По построению каждая точка  $\bar{M}_i$  имеет на поверхности  $u = \varphi_{j+i-1}(v)$  прообраз  $M_i$ . Положим, что  $M_1(u_1 = \varphi_j(v_1), v_1)$ , а  $M_2(u_2 = \varphi_{j+1}(v_2), v_2)$ . Так как  $\bar{M}_1 = TM_1$  и  $\bar{M}_2 = TM_2$ , из уравнений (3.6.1) получаем следующие выражения:

$$\begin{aligned} \bar{u}_1 &= A^- u_1 + f(u_1, v_1), & \bar{u}_2 &= A^- u_2 + f(u_2, v_2), \\ \bar{v} &= A^+ v_1 + g(u_1, v_1), & \bar{v} &= A^+ v_2 + g(u_2, v_2). \end{aligned}$$

Таким образом, находим, что

$$\|\bar{u}_2 - \bar{u}_1\| \leq (\|A^-\| + \|f'_u\|_\circ) \|u_2 - u_1\| + \|f'_v\|_\circ \|v_2 - v_1\|, \quad (3.6.10)$$

и

$$\|v_2 - v_1\| \leq \|(A^+)^{-1}\| (\|g'_u\|_\circ \|u_2 - u_1\| + \|g'_v\|_\circ \|v_2 - v_1\|)$$

откуда получаем

$$\|v_2 - v_1\| \leq \frac{\|(A^+)^{-1}\| \|g'_u\|_\circ \|u_2 - u_1\|}{1 - \|(A^+)^{-1}\| \|g'_v\|_\circ}. \quad (3.6.11)$$

Для  $\|u_2 - u_1\| = \|\varphi_{j+1}(v_2) - \varphi_j(v_1)\|$  имеем следующую оценку:

$$\|\varphi_{j+1}(v_2) - \varphi_j(v_1)\| \leq \|\varphi_{j+1}(v_2) - \varphi_{j+1}(v_1)\| + \|\varphi_{j+1}(v_1) - \varphi_j(v_1)\|.$$

Первый член суммы оценивается как

$$\|\varphi_{j+1}(v_2) - \varphi_{j+1}(v_1)\| \leq \|\varphi'_{j+1}\|_\circ \|v_2 - v_1\| \leq L \|v_2 - v_1\|,$$

а второй — как

$$\|\varphi_{j+1}(v_1) - \varphi_j(v_1)\| \leq \rho,$$

где  $\rho = \sup_{v \in D_2} \|\varphi_{j+1}(v) - \varphi_j(v)\|$ . Таким образом, находим, что

$$\|u_2 - u_1\| \leq \rho + L \|v_2 - v_1\|. \quad (3.6.12)$$

В силу (3.6.11)

$$\|v_2 - v_1\| \leq \frac{\rho \|(A^+)^{-1}\| \|g'_u\|_\circ}{1 - \|(A^+)^{-1}\| (\|g'_v\|_\circ + L \|g'_u\|_\circ)}$$

После подстановки этого неравенства и неравенства (3.6.10) в формулу (3.6.12) получаем

$$\|\bar{u}_2 - \bar{u}_1\| \leq \rho (\|A^-\| + \dots)$$

где через многоточие обозначены члены порядка  $\|(f, g)'_{(u,v)}\|_\circ$ . Поскольку  $\|A^-\| < 1$ , находим выражение

$$\|\bar{u}_2 - \bar{u}_1\| = \|\varphi_{j+2}(\bar{v}) - \varphi_{j+1}(\bar{v})\| \leq K \sup \|\varphi_{j+1}(v) - \varphi_j(v)\|$$

где величина  $K < 1$  не зависит от  $\bar{v}$  (при условии, что  $\|\bar{v}\| \leq \delta$ ). Если в левой части неравенства взять супремум по всем  $\bar{v}$ , то получаем искомое неравенство (3.6.9).

Из неравенства (3.6.9) находим

$$\|\varphi_{j+2}(v) - \varphi_{j+1}(v)\| \leq K^j \sup \|\varphi_2(v) - \varphi_1(v)\|,$$

то есть ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty} (\varphi_{j+1}(v) - \varphi_j(v))$$

ограничивается сверху геометрической прогрессией с коэффициентом  $K < 1$  и, следовательно, является равномерно сходящимся. В связи с тем, что частичные суммы данного ряда имеют вид  $(\varphi_{j+1}(v) - \varphi_1(v))$ , из его равномерной сходимости вытекает равномерная сходимость последовательности  $\{\varphi_j\}$  к указанной предельной функции  $\varphi^*$ .

Шаг 4. Обозначим график  $u = \varphi^*(v)$  функции  $\varphi^*$  через  $W_{loc}^u$ . По построению, данный график инвариантен относительно отображения  $T$ . Заметим, что если  $\varphi^*(v)$  является равномерным пределом последовательности

непрерывных функций, он также непрерывен. В целом, гладкость функции  $\varphi^*$  не вытекает из вышеизложенных доводов (предел ряда гладких функций может являться негладким). Тем не менее, заметим, что производные всех функций  $\varphi_j$  ограничены одной и той же константой  $L$ :

$$\|\varphi'_j(v)\| \leq L.$$

Из неравенства

$$\|\varphi_j(v_1) - \varphi_j(v_2)\| \leq \|\varphi'_j\|_0 \|v_1 - v_2\|$$

вытекает, что все функции  $\varphi_j$  при любых значениях  $(v_1, v_2)$  из области  $D_2$  удовлетворяют условию Липшица

$$\|\varphi_j(v_1) - \varphi_j(v_2)\| \leq L \|v_1 - v_2\|.$$

В пределе при  $j \rightarrow \infty$  получаем неравенство

$$\|\varphi^*(v_1) - \varphi^*(v_2)\| \leq L \|v_1 - v_2\|.$$

Таким образом, установлено существование инвариантного многообразия  $W_{loc}^u$ , удовлетворяющего условию Липшица. Следует заметить, что можно рассмотреть исходную поверхность  $\mathscr{W}$ , проходящую через точку  $O$ . В таком случае очевидно, что все итерации поверхности  $\mathscr{W}$  также включают точку  $O$ , следовательно, предельная поверхность  $W_{loc}^u$  также содержит точку  $O$ .

Прежде, чем доказывать гладкость инвариантных многообразий, изучим поведение отображения в ограничении на многообразия  $W_{loc}^u$  и  $W_{loc}^s$ . Ограничение отображения на  $W_{loc}^s$  имеет вид

$$\bar{u} = A^- u + f(u, \psi^*(u)). \quad (3.6.13)$$

Из неравенства (3.6.2) вытекает, что

$$\|\bar{u}\| \leq \|A^-\| \|u\| + \|f'_u\| \|u\| + N \|f'_v\| \|u\| \leq (\|A^-\| + \|f'_u\| + N \|f'_v\|) \|u\|.$$

Таким образом, поскольку  $\|A^-\| < 1$  и норма  $\|f'_u\|$  мала, итерации любой точки на многообразии  $W_{loc}^s$  под действием отображения  $T$  экспоненциально стремятся к точке  $O$ .

По симметрии, аналогичный результат можно получить для отображения (3.6.1) в ограничении на  $W_{loc}^u$ :

$$\bar{v} = A^+ v + g(\varphi^*(v), v), \quad (3.6.14)$$

именно, у любой точки  $\bar{v}$  на  $W_{loc}^u$  есть единственный образ  $v = T^{-1}\bar{v}$ , итерации которого относительно отображения  $T^{-1}$  равномерно и экспоненциально стремятся к точке  $O$ .

**Теорема 3.8.** *Инвариантные многообразия  $W_{loc}^s$  и  $W_{loc}^u$  являются  $\mathbb{C}^r$ -гладкими, и в точке  $O$  они касаются соответственно устойчивого,  $v = 0$ , и неустойчивого,  $u = 0$ , собственных подпространств, то есть*

$$\varphi_v^{*'}(0) = 0, \quad \psi_u^{*'}(0) = 0.$$

Доказательство. Как и выше, мы доказываем теорему только для многообразия  $W_{loc}^u$ . Искомая гладкость многообразия  $W_{loc}^s$  следует тогда из симметрии задачи. Инвариантность  $W_{loc}^u$  означает, что если некоторая точка  $M(u, v)$  принадлежит  $W_{loc}^u$ , то есть  $u = \varphi^*(v)$ , а ее образ  $\bar{M}(\bar{u}, \bar{v})$  не выходит за пределы  $\delta$ -окрестности точки  $O$ , то точка  $\bar{M}$  также принадлежит  $W_{loc}^u$ , то есть ее координаты удовлетворяют уравнению  $\bar{u} = \varphi^*(\bar{v})$ .

Из формулы (3.6.1) получаем

$$A^- \varphi^*(v) + f(\varphi^*(v), v) = \varphi^*(A^+ v + g(\varphi^*(v), v)). \quad (3.6.15)$$

Путем формального дифференцирования данного тождества находим, что если функция  $\varphi^*$  дифференцируема, ее производная  $\eta^* \equiv d\varphi^*/dv$  удовлетворяет тождеству

$$\begin{aligned} A^- \eta^*(v) + f'_u(\varphi^*(v), v) \eta^*(v) + f'_v(\varphi^*(v), v) \\ = \eta^*(\bar{v}) [I + (g'_u(\varphi^*(v), v) \eta^*(v) + g'_v(\varphi^*(v), v))(A^+)^{-1}] A^+, \end{aligned} \quad (3.6.16)$$

где  $I$  — единичная  $(n-k) \times (n-k)$ -матрица, а  $\bar{v}$  задается формулой (3.6.14).

Ниже мы показываем, что существует непрерывная функция  $\eta^*(v)$ , удовлетворяющая (3.6.16), такая что  $\eta^*(0) = 0$  и  $\eta^*(v)$  является производной функции  $\varphi^*(v)$ ; тем самым, устанавливается  $\mathbb{C}^1$ -гладкость многообразия  $W_{loc}^u$ . Далее, по индукции доказывается, что многообразии  $W_{loc}^u$  является  $\mathbb{C}^r$ -гладким.

Шаг 1. Из формулы (3.6.16) вытекает, что график  $\eta = \eta^*(v)$  производной функции, определяющей инвариантное многообразия, также является

инвариантным многообразием отображения  $T^* : (v, \eta) \mapsto (\bar{v}, \bar{\eta})$ , где  $\bar{v}$  задается формулой (3.6.14), а для  $\bar{\eta}$  имеет место следующее уравнение:

$$\begin{aligned} \bar{\eta} = & [A^- \eta (A^+)^{-1} + (f'_u(\varphi^*(v), v) \eta + f'_v(\varphi^*(v), v)) (A^+)^{-1}] \\ & \times [I + (g'_u(\varphi^*(v), v) \eta + g'_v(\varphi^*(v), v)) (A^+)^{-1}]^{-1}. \end{aligned} \quad (3.6.17)$$

Отображение  $T^*$  схематически можно представить в виде

$$\begin{aligned} \bar{\eta} &= A^- \eta (A^+)^{-1} + F(v, \eta), \\ \bar{v} &= A^+ v + G(v), \end{aligned} \quad (3.6.18)$$

где  $F$  и  $G$  — некоторые непрерывные функции, и

$$F(0, 0) = 0, \quad G(0) = 0. \quad (3.6.19)$$

Кроме того,  $F$  гладко зависит от  $\eta$ , и

$$F'_\eta(0, 0) = 0. \quad (3.6.20)$$

Функция  $G$  удовлетворяет условию Липшица, и при уменьшении  $\delta$ -окрестности точки  $O$  величина константы  $\varepsilon$  становится бесконечно малой:

$$\begin{aligned} \|G(v_2) - G(v_1)\| &\equiv \|g(\varphi^*(v_2), v_2) - g(\varphi^*(v_1), v_1)\| \\ &\leq \|g'_u\|_\circ \|\varphi^*(v_2) - \varphi^*(v_1)\| + \|g'_v\|_\circ \|v_2 - v_1\| \\ &\leq (\|g'_u\|_\circ L + \|g'_v\|_\circ) \|v_2 - v_1\| \leq \varepsilon \|v_2 - v_1\| \end{aligned} \quad (3.6.21)$$

(см. формулы (3.6.14), (3.6.3)).

Точка  $(v = 0, \eta = 0)$  является неподвижной точкой отображения (3.6.18). Существование инвариантного многообразия  $\eta = \eta^*(v)$  отображения  $T^*$ , проходящего через данную точку, можно легко доказать повторяя рассуждения, используемые при доказательстве существования инвариантного многообразия отображения (3.6.1). Действительно, принимая во внимание то, что  $\|A^-\| < 1$ , а  $\|(A^+)^{-1}\| < 1$ , с учетом (3.6.19)–(3.6.21), можно непосредственно проверить, что образ относительно отображения  $T^*$  произвольной непрерывной поверхности вида  $\eta = \eta_1(v)$  такой, что  $\|\eta_1(v)\| \leq L$ , является поверхностью того же вида. Следовательно, можно рассмотреть последовательность поверхностей  $\{\eta = \eta_j(v)\}$ , полученных из исходной

путем последовательных итераций отображения  $T^*$ . Можно доказать, что данная последовательность удовлетворяет неравенству вида (3.6.9), из которого вытекает, что она сходится к непрерывной поверхности  $\eta = \eta^*(v)$ , для которой имеет место неравенство

$$\|\eta^*(v)\| \leq L. \quad (3.6.22)$$

По построению, данная поверхность является инвариантной относительно отображения  $T^*$ , то есть удовлетворяет тождеству (3.6.16)<sup>3</sup>.

Шаг 2. Только что было установлено существование непрерывного ограниченного решения  $\eta^*$  функционального уравнения (3.6.18), которое является формальной производной функции  $\varphi^*$ . Покажем, что  $\eta^*$  действительно является производной функции  $\varphi^*$ . Рассмотрим величину

$$z(v) = \overline{\lim}_{\|\Delta v\| \rightarrow 0} \frac{\|\varphi^*(v + \Delta v) - \varphi^*(v) - \eta^*(v) \|\Delta v\|}{\|\Delta v\|}. \quad (3.6.23)$$

По определению производной,  $\eta^* \equiv d\varphi^*/dv$  тогда и только тогда, когда  $z(v) \equiv 0$ . Докажем это тождество. Для начала заметим, что  $z$  ограничено. Согласно неравенствам (3.6.3) и (3.6.22)

$$\|\varphi^*(v + \Delta v) - \varphi^*(v) - \eta^*(v) \Delta v\| \leq 2L \|\Delta v\|. \quad (3.6.24)$$

Найдем зависимость между  $z(v)$  и  $z(\bar{v})$ , где  $\bar{v}$  определяется в соответствии с формулой (3.6.14). Из уравнения (3.6.14) получаем следующее выражение:

$$\begin{aligned} \Delta \bar{v} &= (A^+ + g'_v(\varphi^*(v), v) + g'_u(\varphi^*(v), v) \eta^*(v)) \Delta v \\ &\quad + g'_u(\varphi^*(v), v) (\Delta \varphi - \eta^*(v) \Delta v) + o(\Delta v), \end{aligned} \quad (3.6.25)$$

где  $\Delta \varphi \equiv \varphi^*(v + \Delta v) - \varphi^*(v)$ .

Из формул (3.6.25) и (3.6.16) находим

$$\begin{aligned} \eta^*(\bar{v}) \Delta \bar{v} &= (A^- + f'_u(\varphi^*(v), v)) \eta^*(v) \Delta v + f'_v(\varphi^*(v), v) \Delta v \\ &\quad + \eta^*(\bar{v}) g'_u(\varphi^*(v), v) (\Delta \varphi - \eta^*(v) \Delta v) + o(\Delta v). \end{aligned} \quad (3.6.26)$$

<sup>3</sup>В данном случае, в отличие от отображения (3.6.1), доказательство неравенства (3.6.9), определяющего сходимость последовательных приближений, больше не требует того, чтобы функции  $\eta_j$  были гладкими и имели ограниченные производные. Это связано с тем, что отображение  $T^*$  является треугольным, а второе уравнение системы (3.6.18) не зависит от переменной  $\eta$ .

Из (3.6.15) получаем выражение

$$\varphi^*(\bar{v} + \Delta\bar{v}) - \varphi^*(\bar{v}) = (A^- + f'_u(\varphi^*(v), v))\Delta\varphi + f'_v(\varphi^*(v), v)\Delta v + o(\Delta v).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \Delta\bar{\varphi} - \eta^*(\bar{v})\Delta\bar{v} \\ = (A^- + f'_u(\varphi^*(v), v) - \eta^*(\bar{v})f'_u(\varphi^*(v), v))(\Delta\varphi - \eta^*(v)\Delta v) + o(\Delta v) \end{aligned}$$

откуда

$$\|\Delta\bar{\varphi} - \eta^*(\bar{v})\Delta\bar{v}\| \leq (\|A^-\| + \dots)\|\Delta\varphi - \eta^*(v)\Delta v\| + o(\Delta v), \quad (3.6.27)$$

где через многоточие обозначены члены порядка  $\|(f, g)'_{(u, v)}\|$ .

Из формул (3.6.24) и (3.6.25) получаем следующую оценку для  $\|\Delta v\|$ :

$$\|\Delta v\| \leq (\|(A^+)^{-1}\| + \dots)\|\Delta\bar{v}\|.$$

В соответствие с полученным результатом и неравенством (3.6.27), исходя из определения функции  $z$ , находим, что

$$z(\bar{v}) \leq (\|A^-\| \|(A^+)^{-1}\| + \dots)z(v). \quad (3.6.28)$$

Известно, что любая точка  $\bar{v}$ , норма которой не выходит за пределы  $\delta$ , имеет такой прообраз  $v$ , что  $\|v\| \leq \delta$ . Следовательно, бесконечная последовательность  $\{v_j\}$  для любой точки  $v_0$  определяется таким образом, чтобы  $v_j = \bar{v}_{j+1}$ . Согласно неравенству (3.6.28)

$$z(v_0) \leq (\|A^-\| \|(A^+)^{-1}\| + \dots)^j z(v_j).$$

Функция  $z(v_j)$  является ограниченной, а  $\|A^-\| < 1$ ,  $\|(A^+)^{-1}\| < 1$ , следовательно,  $z(v_0) = 0$ . Поскольку величина  $v_0$  была выбрана произвольно,  $z(v) \equiv 0$ , то есть, функция  $\varphi^*$  является гладкой.

Заметим, что утверждение о существовании инвариантного многообразия  $\{\eta = \eta^*(v)\}$  отображения (3.6.18) справедливо, вообще говоря, только при достаточно малых  $v$ :  $\|v\| \leq \delta_1$ ,  $\delta_1 > 0$ . Не был учтен тот факт, что  $\delta_1$  может стать меньше  $\delta$  — диаметра окрестности начала координат, в которой задана функция  $\varphi^*$ . Тем не менее, можно показать, что функция  $\varphi^*$  является гладкой при всех значениях  $v$  из  $\delta$ -окрестности. Для этого, заметим, что поскольку в  $\delta$ -окрестности начала координат отрицательные итерации произвольной точки  $\bar{v}$  на  $W_{loc}^u$  равномерно сходятся к точке  $O$ , образ

$\delta_1$ -окрестности начала координат на  $W_{loc}^u$  после ряда положительных итераций отображения  $T$  перекроет исходную  $\delta$ -окрестность. Следовательно, поскольку отображение  $T$  гладкое, а многообразие  $W_{loc}^u$  в  $\delta_1$ -окрестности точки  $O$  тоже гладкое, то  $W_{loc}^u$  будет гладким и в исходной  $\delta$ -окрестности.

Шаг 3. Мы установили, что отображение  $T$  имеет гладкое инвариантное многообразие вида  $u = \varphi^*(v)$ . Кроме того, график производной  $\eta^* = d\varphi^*/dv$  сам является инвариантным многообразием отображения  $T^*$ , задаваемого формулами (3.6.17) и (3.6.18). Если гладкость правой части отображения  $T$  выше единицы, то правая часть отображения  $T^*$  принадлежит  $\mathbb{C}^1$  (так как она выражается через функции  $\varphi^*$  и  $g$ ). Поскольку неподвижная точка ( $v = 0$ ,  $\eta = 0$ ) отображения  $T^*$  седловая, все рассуждения, используемые в случае отображения  $T$ , можно применить и для  $T^*$ . Отсюда можно заключить, что инвариантное многообразие  $\eta = \eta^*(v)$  отображения  $T^*$  является гладким и, следовательно, функция  $\varphi^*$  принадлежит классу  $\mathbb{C}^{2,4}$ .

Таким образом, если гладкость правой части отображения  $T$  выше, чем  $\mathbb{C}^2$ , правая часть отображения  $T^*$  будет уже  $\mathbb{C}^2$ -гладкой функцией. Поэтому, рассуждая как выше, получаем, что функция  $\eta^*$  является  $\mathbb{C}^2$ -гладкой, а функция  $\varphi^*$  соответственно  $\mathbb{C}^3$ -гладкой, и т. д. и т. п. По индукции приходим к выводу о существовании  $\mathbb{C}^r$ -гладкого инвариантного многообразия  $W_{loc}^u$ , что и требовалось доказать.

Как и в случае положений равновесия, инвариантные многообразия  $W_{loc}^s$  и  $W_{loc}^u$  можно локально распрямить с помощью замены координат

$$\xi = u - \varphi^*(v),$$

$$\eta = v - \psi^*(u).$$

В новых координатах инвариантные многообразия принимают вид:

$$W_{loc}^s: \eta = 0, \quad \text{и} \quad W_{loc}^u: \xi = 0.$$

Инвариантность многообразий предполагает, что  $\bar{\eta} = 0$  при  $\eta = 0$  и  $\bar{\xi} = 0$

<sup>4</sup>Единственное отличие состоит в том, что линейная часть отображения  $T^*$  не является блочно-диагональной, поэтому, вообще говоря,  $\frac{d\eta^*}{dv}(0) \neq 0$ .



при  $\xi = 0$ . Исходная система в координатах  $\xi$  и  $\eta$  принимает вид

$$\begin{aligned}\bar{\eta} &= (A^- + h_1(\xi, \eta))\xi, \\ \bar{\xi} &= (A^+ + h_2(\xi, \eta))\eta,\end{aligned}\quad (3.6.29)$$

где  $h_i \in C^{r-1}$ , а

$$h_i(0, 0) = 0, \quad i = 1, 2. \quad (3.6.30)$$

В малой окрестности седла нормы функции  $h_{1,2}$  малы, и, пока траектория остается в окрестности седла, в базисе Жордана справедливы неравенства

$$\|\bar{\xi}\| \leq (|\lambda_1| + \varepsilon)\|\xi\|$$

и

$$\|\bar{\eta}\| \geq (|\gamma_1| - \varepsilon)\|\eta\|.$$

Отсюда получаем

$$\|\xi_j\| \leq (|\lambda_1| + \varepsilon)^j \|\xi_0\| \quad \text{для } j \geq 0 \quad (3.6.31)$$

$$\|\eta_j\| \leq (|\gamma_1| - \varepsilon)^{|j|} \|\eta_0\| \quad \text{для } j \leq 0 \quad (3.6.32)$$

(см. доказательства аналогичных формул (3.5.4) и (3.5.25) в предыдущем разделе). Таким образом, траектория, не лежащая ни в  $W_{loc}^s$ , ни в  $W_{loc}^u$ , покидает окрестность седла при  $j \rightarrow \pm\infty$ . Более того, чтобы положительная полутраектория покинула окрестность седла, ей необходимо порядка  $\ln \|\eta_0\|$  итераций, для отрицательной полутраектории число таких итераций будет порядка  $\ln \|\xi_0\|$ .

Отображение (3.6.1) в ограничении на устойчивом многообразии  $W_{loc}^s$ :  $v = \psi^*(u)$  записывается как

$$\bar{u} = A^- u + f(u, \psi^*(u)). \quad (3.6.33)$$

На  $W_{loc}^s$  точка  $O$  является устойчивой и неподвижной. В общем случае, эта точка является либо узлом (при условии, что есть только одна ведущая координата), либо фокусом (если есть две ведущие координаты, отвечающие паре комплексно сопряженных мультипликаторов).

Отображение (3.6.1) на многообразии  $W_{loc}^u$  записывается как

$$\bar{v} = A^+ v + g(\varphi^*(v), v). \quad (3.6.34)$$

Здесь  $O$  — вполне неустойчивая неподвижная точка, и в общем случае она является либо узлом, либо фокусом.

В зависимости от поведения траекторий по ведущим координатам можно выделить девять основных типов седловых неподвижных точек:

- (1) *седло* (+, +): узел (+) на обоих многообразиях  $W_{loc}^s$  и  $W_{loc}^u$ ;
- (2) *седло* (−, −): узел (−) на обоих многообразиях  $W_{loc}^s$  и  $W_{loc}^u$ ;
- (3) *седло* (+, −): узел (+) на  $W_{loc}^s$  и узел (−) на  $W_{loc}^u$ ;
- (4) *седло* (−, +): узел (−) на  $W_{loc}^s$  и узел (+) на  $W_{loc}^u$ ;
- (5) *седло-фокус* (2, 1+): фокус на  $W_{loc}^s$  и узел (+) на  $W_{loc}^u$ ;
- (6) *седло-фокус* (2, 1−): фокус на  $W_{loc}^s$  и узел (−) на  $W_{loc}^u$ ;
- (7) *седло-фокус* (1+, 2): узел (+) на  $W_{loc}^s$  и фокус на  $W_{loc}^u$ ;
- (8) *седло-фокус* (1−, 2): узел (−) на  $W_{loc}^s$  и фокус на  $W_{loc}^u$ ;
- (9) *седло-фокус* (2,2): фокус на обоих многообразиях  $W_{loc}^s$  и  $W_{loc}^u$ .

Теоремы 3.4 и 3.5 справедливы для систем (3.6.33) и (3.6.34). Следовательно, в многообразиях  $W_{loc}^s$  и  $W_{loc}^u$  существует *неведущее устойчивое инвариантное подмногообразие*  $W_{loc}^{ss}$ , *ведущее устойчивое инвариантное подмногообразие*  $W_{loc}^{sL}$ , *неведущее неустойчивое инвариантное подмногообразие*  $W_{loc}^{uu}$ , и *ведущее неустойчивое инвариантное подмногообразие*  $W_{loc}^{uL}$ . Далее рассмотрим еще три гладких многообразия неподвижной точки седлового типа. Введем обозначения:

$$r_{sL} = \left\lceil \frac{\ln \hat{\lambda}}{\ln |\lambda_1|} \right\rceil, \quad (3.6.35)$$

$$r_{uL} = \left\lceil \frac{\ln \hat{\gamma}}{\ln |\gamma_1|} \right\rceil, \quad (3.6.36)$$

где через  $\hat{\lambda}$  и  $\hat{\gamma}$  обозначены соответственно модули неведущих устойчивого и неустойчивого мультипликаторов, т. е. ближайших к единичной окружности; через  $[x]$  обозначено наибольшее целое число, строго меньшее  $x$ .

**Теорема 3.9.** В окрестности грубой седловой неподвижной точки  $\mathbb{C}^r$ -гладкого отображения существуют следующие инвариантные многообразия:

- (1.)  $\mathbb{C}^{\min(r, r_{uL})}$ -гладкое расширенное устойчивое многообразие  $W_{loc}^{sE}$ , которое содержит  $W_{loc}^s$ , касается в точке  $O$  расширенного устойчивого собственного подпространства линеаризованной системы и трансверсально к  $W_{loc}^{uu}$ .
- (2.)  $\mathbb{C}^{\min(r, r_{sL})}$ -гладкое расширенное неустойчивое многообразие  $W_{loc}^{uE}$ , которое содержит  $W_{loc}^u$ , касается в точке  $O$  расширенного неустойчивого собственного подпространства линеаризованной системы и трансверсально к  $W_{loc}^{ss}$ .
- (3.)  $\mathbb{C}^{\min(r, r_{sL}, r_{uL})}$ -гладкое ведущее седловое многообразие  $W_{loc}^L = W_{loc}^{uE} \cap W_{loc}^{sE}$ .

См. доказательство в главе 5. Заметим, что, вообще говоря, многообразие  $W_{loc}^{sE}$  не единственное, но любые два такие многообразия касаются друг друга на  $W_{loc}^s$ . Аналогично, любые два многообразия  $W_{loc}^{uE}$  касаются друг друга на  $W_{loc}^u$ .

### 3.7. Краевая задача в окрестности седловой неподвижной точки

Рассмотрим отображение  $T$  класса  $\mathbb{C}^r$  ( $r \geq 1$ )

$$\begin{aligned} \bar{u} &= A^- u + f(u, v), \\ \bar{v} &= A^+ v + g(u, v), \end{aligned} \quad (3.7.1)$$

где  $u \in \mathbb{R}^{m_1}$ ,  $v \in \mathbb{R}^{m_2}$ . Пусть  $O(0, 0)$  — седловая неподвижная точка отображения  $T$ , то есть  $\text{spectr} A^- = \{\lambda_1, \dots, \lambda_{m_1}\}$  находится строго внутри, а  $\text{spectr} A^+ = \{\gamma_1, \dots, \gamma_{m_2}\}$  — строго вне единичной окружности, и функции  $f$  и  $g$  вместе с первыми производными обращаются в нуль в начале координат.

Аналогично случаю седлового положения равновесия, рассмотренному в разделе 2.8, экспоненциальная неустойчивость вблизи седловой неподвижной точки также характерна для траекторий отображения (3.7.1). Поэтому, в данном случае, разумнее решать не задачу с начальными условиями, а *краевую задачу*, которую можно сформулировать следующим образом:

Для любых  $u^0, v^1$  и любого  $k > 0$  найти такую траекторию

$$\{(u_0, v_0), (u_1, v_1), \dots, (u_k, v_k)\}$$

отображения (3.7.1) в окрестности точки  $O(0, 0)$ , что

$$u_0 \equiv u^0, \quad v_k \equiv v^1, \quad (3.7.2)$$

где предполагается, что  $\|u^0\| \leq \varepsilon$  и  $\|v^1\| \leq \varepsilon$  для достаточно малого  $\varepsilon > 0$ .

Траектория  $\{(u_j, v_j)\}_{j=0}^k$  отображения (3.7.1) задается выражениями

$$\begin{aligned} u_{j+1} &= A^- u_j + f(u_j, v_j), \\ v_{j+1} &= A^+ v_j + g(u_j, v_j). \end{aligned} \quad (3.7.3)$$

В линейном случае решение краевой задачи тривиально:

$$u_j = (A^-)^j u^0, \quad v_j = (A^+)^{-(k-j)} v^1, \quad (3.7.4)$$

Поскольку  $\|(A^-)^j\|$  и  $\|(A^+)^{-(k-j)}\|$  ограничены при всех  $0 \leq j \leq k$ , решение линейной задачи устойчиво относительно возмущений начальных условий  $u^0$  и  $v^1$ . Справедливость этого утверждения для нелинейного случая устанавливается следующей теоремой.

**Теорема 3.10.** При достаточно малом  $\varepsilon > 0$  и  $u^0, v^1$  таких, что  $\|u^0\| \leq \varepsilon$  и  $\|v^1\| \leq \varepsilon$ , для любого положительного целого  $k$  решение краевой задачи (3.7.2) для отображения (3.7.1) существует. Это решение единственно и непрерывно зависит от  $(u^0, v^1)$ .

Доказательство. Будем искать решение

$$\{(u_0, v_0), (u_1, v_1), \dots, (u_k, v_k)\}$$

краевой задачи (3.7.2) и (3.7.3) как некоторое решение следующей системы уравнений (см. в разделе 2.8 аналогичные интегральные уравнения для краевой задачи вблизи седлового положения равновесия)

$$\begin{aligned} u_j &= (A^-)^j u^0 + \sum_{s=0}^{j-1} (A^-)^{j-s-1} f(u_s, v_s), \\ v_j &= (A^+)^{-(k-j)} v^1 - \sum_{s=j}^{k-1} (A^+)^{-(s+1-j)} g(u_s, v_s) \end{aligned} \quad (3.7.5)$$

относительно переменных  $\{(u_j, v_j)\}$  ( $j = 0, 1, \dots, k$ ). Заметим, что эта система выводится непосредственно из (3.7.3); именно отсюда для  $u_j$  получаются соотношения

$$\begin{aligned} u_j &= A^- u_{j-1} + f(u_{j-1}, v_{j-1}) \\ &= (A^-)^2 u_{j-2} + A^- f(u_{j-2}, v_{j-2}) + f(u_{j-1}, v_{j-1}) \\ \dots &= (A^-)^j u_0 + (A^-)^{j-1} f(u_0, v_0) + \dots + f(u_{j-1}, v_{j-1}) \end{aligned}$$

и для  $v_j$  — соотношения

$$\begin{aligned} v_j &= (A^+)^{-1} v_{j+1} - (A^+)^{-1} g(u_j, v_j) \\ &= (A^+)^{-2} v_{j+2} - (A^+)^{-2} g(u_{j+1}, v_{j+1}) - (A^+)^{-1} g(u_j, v_j) \\ \dots &= (A^+)^{j-k} v_k - (A^+)^{j-k} g(u_{k-1}, v_{k-1}) - \dots - (A^+)^{-1} g(u_j, v_j). \end{aligned}$$

Очевидно, что  $u_0 \equiv u^0$  и  $v_k \equiv v^1$  для любого решения (3.7.4). Тогда последовательность  $\{(u_0, v_0), (u_1, v_1), \dots, (u_k, v_k)\}$  является решением краевой задачи, если и только если она удовлетворяет системе (3.7.5).

Будем строить решение системы (3.7.5) методом последовательных приближений. В качестве первого приближения берем решение (3.7.4) линейной краевой задачи. Последующие приближения вычисляются по формуле

$$\begin{aligned} u_j^{(n+1)} &= (A^-)^j u^0 + \sum_{s=0}^{j-1} (A^-)^{j-s-1} f(u_s^{(n)}, v_s^{(n)}), \\ v_j^{(n+1)} &= (A^+)^{j-k} v^1 - \sum_{s=j}^{k-1} (A^+)^{j-s-1} g(u_s^{(n)}, v_s^{(n)}), \end{aligned} \quad (3.7.6)$$

$(j = 0, 1, \dots, k).$

Покажем теперь, что полученная последовательность равномерно сходится к некоторому предельному вектору

$$z_0^* = \{(u_i^*, v_i^*)\}_{i=0}^{i=k}.$$

Сначала докажем, что

$$\|u_j^{(n)}\| \leq 2\varepsilon, \quad \|v_j^{(n)}\| \leq 2\varepsilon \quad (3.7.7)$$

для всех  $n$  и  $0 \leq j \leq k$ .

При  $n = 1$  справедливость указанных неравенств вытекает непосредственно из того, что  $\|u^0\| \leq \varepsilon$ ,  $\|v^1\| \leq \varepsilon$ , и

$$\|(A^-)^j\| \leq \lambda^j, \quad \|(A^+)^{j-k}\| \leq \gamma^{j-k}, \quad (3.7.8)$$

где  $0 < \lambda < 1$  и  $\gamma > 1$  — такие числа, что  $\text{spectr} A^-$  лежит строго внутри окружности диаметром  $\lambda$ , а  $\text{spectr} A^+$  — вне окружности диаметром  $\gamma$ .

Неравенства (3.7.7) для всех  $n$  доказываются по индукции. Поскольку обе функции  $f$  и  $g$  вместе с их первыми производными обращаются в нуль в точке  $O$ , имеют место неравенства<sup>5</sup>

$$\left\| \frac{\partial(f, g)}{\partial(u, v)} \right\| \leq \delta, \quad \|f, g\| \leq \delta \|u, v\| \quad (3.7.9)$$

где  $\delta$  может быть сделано произвольно малым путем уменьшения окрестности точки  $O$ . Выберем достаточно малое  $\varepsilon$  так, что для любых  $u$  и  $v$  из  $2\varepsilon$ -окрестности седла выполняется неравенство

$$2\delta \max \left( \frac{1}{1-\lambda}, \frac{1}{1-\gamma^{-1}} \right) \leq 1 \quad (3.7.10)$$

Из (3.7.6), (3.7.8) и (3.7.9) получаем

$$\begin{aligned} \|u_j^{(n+1)}\| &\leq \lambda^j \|u^0\| + \delta \sum_{s=0}^{j-1} \lambda^{j-s-1} \|u_s^{(n)}, v_s^{(n)}\| \\ \|v_j^{(n+1)}\| &\leq \gamma^{j-k} \|v^1\| + \delta \sum_{s=j}^{k-1} \gamma^{j-s-1} \|u_s^{(n)}, v_s^{(n)}\| \end{aligned}$$

откуда вытекает, что

$$\|u_j^{(n+1)}, v_j^{(n+1)}\| \leq \varepsilon + \delta \max \left( \frac{1}{1-\lambda}, \frac{1}{1-\gamma^{-1}} \right) \max_{0 \leq s \leq j} \|u_s^{(n)}, v_s^{(n)}\|.$$

В силу (3.7.10) находим, что если  $\|u_s^{(n)}, v_s^{(n)}\| \leq 2\varepsilon$ , то  $\|u_j^{(n+1)}, v_j^{(n+1)}\| \leq 2\varepsilon$ , поэтому, неравенства (3.7.7) выполняются при всех значениях  $n$ .

<sup>5</sup>Далее  $\max\{\|u\|, \|v\|\}$  будет обозначено через  $\|u, v\|$ .

Теперь докажем, что

$$\begin{aligned} & \max_{0 \leq j \leq k} \|u_j^{(n+1)} - u_j^{(n)}, v_j^{(n+1)} - v_j^{(n)}\| \\ & \leq \frac{1}{2} \max_{0 \leq s \leq k} \|u_s^{(n)} - u_s^{(n-1)}, v_s^{(n)} - v_s^{(n-1)}\|. \end{aligned} \quad (3.7.11)$$

Так как точки  $(u_j^{(n)}, v_j^{(n)})$  при всех  $n$  лежат в  $2\varepsilon$ -окрестности седла, то для  $f(u_j^{(n)}, v_j^{(n)})$  и  $g(u_j^{(n)}, v_j^{(n)})$  неравенства (3.7.9) выполнены. Теперь, из (3.7.6) и (3.7.10) получаем

$$\begin{aligned} & \|u_j^{(n+1)} - u_j^{(n)}\| \\ & \leq \sum_{s=0}^{j-1} \lambda^{j-s-1} \|f(u_s^{(n)}, v_s^{(n)}) - f(u_s^{(n-1)}, v_s^{(n-1)})\| \\ & \leq \frac{\delta}{1-\lambda} \max_{0 \leq s \leq j} \|u_s^{(n)} - u_s^{(n-1)}, v_s^{(n)} - v_s^{(n-1)}\| \\ & \leq \frac{1}{2} \max_{0 \leq s \leq j} \|u_s^{(n)} - u_s^{(n-1)}, v_s^{(n)} - v_s^{(n-1)}\|. \end{aligned}$$

Аналогичная оценка справедлива для  $\|v_j^{(n+1)} - v_j^{(n)}\|$ .

Из неравенства (3.7.11) вытекает, что нормы разностей  $\|u_j^{(n+1)} - u_j^{(n)}\|$  и  $\|v_j^{(n+1)} - v_j^{(n)}\|$  уменьшаются в геометрической прогрессии. Таким образом, ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (u_j^{(n+1)} - u_j^{(n)}, v_j^{(n+1)} - v_j^{(n)}) \quad (3.7.12)$$

сходится равномерно по  $j$ , а также по  $u^0, v^1$  и  $k$ , в виду очевидной зависимости

$$(u_j^{(p)}, v_j^{(p)}) = (u_j^{(1)}, v_j^{(1)}) + \sum_{n=1}^{p-1} (u_j^{(n+1)} - u_j^{(n)}, v_j^{(n+1)} - v_j^{(n)}).$$

Последовательность  $(u_j^{(n)}, v_j^{(n)})$  при  $n \rightarrow \infty$  сходится к некоторому вектору  $\{(u_j^*, v_j^*)\}_{i=0}^k$ , представляющему собой решение системы (3.7.5) и краевой

задачи. Поскольку сходимость последовательных приближений является равномерной, решение  $(u_j^*, v_j^*)$  непрерывно зависит от начальных условий  $u^0$  и  $v^1$ .

Чтобы доказать единственность решения, предположим, что система (3.7.5) имеет еще одно решение  $\{(u_j^{**}, v_j^{**})\}_{i=0}^k$ . Тогда, аналогично доказательству неравенства (3.7.11), можно показать, что при всех значениях  $j \in \{0, \dots, k\}$

$$\|u_j^{**} - u_j^*, v_j^{**} - v_j^*\| \leq \frac{1}{2} \max_{0 \leq s \leq k} \|u_s^{**} - u_s^*, v_s^{**} - v_s^*\|.$$

Следовательно, справедливы равенства  $u_j^{**} \equiv u_j^*$ , что и требовалось доказать.

По аналогии с доказательством гладкости решений краевой задачи вблизи положения равновесия седлового типа, приведенном в разделе 2.8, можно показать, что решение краевой задачи (3.7.2) и (3.7.3) вблизи седловой неподвижной точки  $\mathbb{C}^r$ -гладко зависит от краевых условий  $(u^0, v^1)$ . Производные по  $u^0$  и  $v^1$  находятся как (единственные) решения краевых задач, полученных путем формального дифференцирования соотношений (3.7.2) и (3.7.3). Следовательно, производные  $\partial u_j^*/\partial u^0$  и  $\partial v_j^*/\partial u^0$  являются решениями следующей системы:

$$\begin{aligned} U_{j+1} &= A^- U_j + f'_u(u_j^*, v_j^*) U_j + f'_v(u_j^*, v_j^*) V_j, \\ V_{j+1} &= A^+ V_j + g'_u(u_j^*, v_j^*) U_j + g'_v(u_j^*, v_j^*) V_j, \end{aligned} \quad (3.7.13)$$

$$(j = 0, \dots, k),$$

с граничными условиями

$$U_0 = I_{m_1}, \quad V_k = 0, \quad (3.7.14)$$

где  $U_j \equiv \partial u_j^*/\partial u^0$  и  $V_j \equiv \partial v_j^*/\partial u^0$ .

Аналогично тому, как краевая задача (3.7.2), (3.7.3) была решена с помощью системы (3.7.5), найдем решение краевой задачи (3.7.13), (3.7.14)

с помощью системы

$$\begin{aligned} U_j &= (A^-)^j + \sum_{s=0}^{j-1} (A^-)^{j-s-1} (f'_u(u_s^*, v_s^*)U_s + f'_v(u_s^*, v_s^*)V_s) \\ V_j &= - \sum_{s=j}^{k-1} (A^+)^{j-s-1} (g'_u(u_s^*, v_s^*)U_s + g'_v(u_s^*, v_s^*)V_s). \end{aligned} \quad (3.7.15)$$

Сходимость последовательных приближений доказывается так же, как в теореме 3.10, то есть можно показать, что нормы  $\|U_j^{(n+1)} - U_j^{(n)}\|$  и  $\|V_j^{(n+1)} - V_j^{(n)}\|$  убывают в геометрической прогрессии.

Производные  $\partial u_j^*/\partial v_1$  и  $\partial v_j^*/\partial v_1$  также находятся как решения системы (3.7.13), но с другими граничными условиями:

$$V_k = I_{m_2}, \quad \text{и} \quad U_0 = 0. \quad (3.7.16)$$

Метод краевой задачи позволяет установить весьма важный геометрический результат, касающийся свойств седлового отображения, так называемую  $\lambda$ -лемму. Для удобства, сделаем предварительно  $\mathbb{C}^r$ -гладкую замену координат, которая распрямляет устойчивое и неустойчивое многообразия в некоторой  $\varepsilon$ -окрестности  $D_\varepsilon$  седловой неподвижной точки (см. раздел 3.6). В новых координатах, функции  $f$  и  $g$  из (3.7.1) вместе с первыми производными обращаются в нуль в начале координат. Кроме того, всюду в  $D_\varepsilon$

$$f(0, v) \equiv 0, \quad g(u, 0) \equiv 0. \quad (3.7.17)$$

Таким образом, уравнения многообразий  $W_{loc}^s$  и  $W_{loc}^u$  принимают соответственно вид  $v = 0$  и  $u = 0$ .

В окрестности  $D_\varepsilon$  рассмотрим произвольную  $m_2$ -мерную  $\mathbb{C}^r$ -гладкую поверхность  $H_0 : u = h_0(v)$ , которая трансверсально пересекает  $W_{loc}^s$  в некоторой точке  $M$ .

Исследуем последовательность точек  $\{M, T(M), \dots, T^k(M), \dots\}$ , накапливающих к  $O$  при  $k \rightarrow +\infty$ . Через соответствующие точки этой последовательности проходят  $m_2$ -мерные поверхности  $T^k(H_0)$ . Обозначим через  $H_k$  связную компоненту поверхности  $T^k(H_0) \cap D_\varepsilon$ , содержащую точку  $T^k(M)$ .

**Лемма 3.2 ( $\lambda$ -лемма).** *Для всех достаточно больших  $k$  поверхности  $H_k$  представимы в виде  $u = h_k(v)$ , где функции  $h_k$  стремятся к нулю при*

$k \rightarrow +\infty$  равномерно вместе со всеми их производными (см. рис. 3.7.1)<sup>6</sup> в  $\mathbb{C}^r$ -топологии.

Доказательство. Трансверсальность поверхностей  $H_0$  и  $W_{loc}^s : v = 0$  в точке  $M(h_0(0), 0)$  означает, что норма  $\|h'_0(0)\|$  ограничена. Поэтому норма  $\|h'_0(v)\|$  также ограничена при всех достаточно малых  $v$ . Рассмотрим поверхность  $H_k$  и возьмем на ней произвольную точку  $(u_k, v_k)$ . По построению, на  $H_0$  всегда существует такая точка  $(u_0, v_0)$ , что  $T^k(u_0, v_0) = (u_k, v_k)$ .

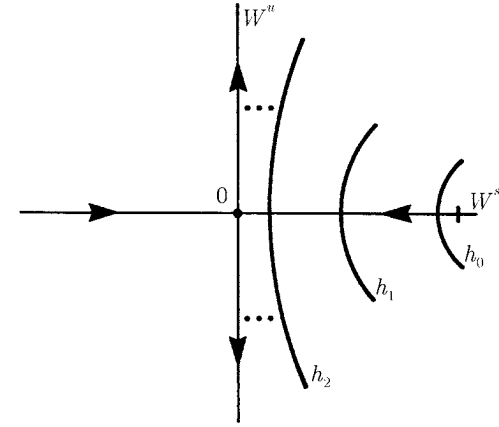


Рис. 3.7.1. Геометрическая интерпретация  $\lambda$ -леммы. С каждой последующей итерацией график поверхности  $u = h_k(v)$  все больше выравнивается, стремясь к неустойчивому многообразию  $W^u$  вдоль устойчивого многообразия  $W^s$

По теореме 3.10 отображение  $T^k : (u_0, v_k) \mapsto (u_k, v_0)$  для любого положительного  $k$  можно записать в неявном виде:

$$u_k = \xi_k(u_0, v_k), \quad v_0 = \eta_k(u_0, v_k), \quad (3.7.18)$$

где  $\xi_k$  и  $\eta_k$  — некоторые  $\mathbb{C}^r$ -гладкие функции. Ниже мы покажем, что при  $k \rightarrow +\infty$  нормы функций  $\xi_k, \eta_k$  а также нормы их производных до порядка  $r$  (включительно) равномерно стремятся к нулю.

<sup>6</sup>Другими словами, последовательность  $H_k$  сходится к  $W_{loc}^u$ .

Подставим  $u_0 = h_0(v_0)$  в (3.7.18), тогда получим, что точки  $(u_k, v_k) \in H_k$  и  $(u_0, v_0) \in H_0$  связаны соотношениями:

$$u_k = \xi_k(h_0(v_0), v_k), \quad v_0 = \eta_k(h_0(v_0), v_k). \quad (3.7.19)$$

Мы уже отмечали, что при  $k \rightarrow +\infty$  функция  $\eta_k$  вместе с производными до порядка  $r$  стремится к нулю, тогда как норма  $\|h'_0\|$  при малых  $v_0$  остается ограниченной. Следовательно, по теореме о неявной функции, для достаточно больших  $k$  и любых  $v_k$ , норма которых не превосходит  $\varepsilon$ , второе уравнение системы (3.7.19) можно однозначно разрешить относительно  $v_0 : v_0 = \varphi_k(v_k)$ , где функция  $\varphi_k$  вместе со всеми производными до порядка  $r$  равномерно стремится к нулю при  $k \rightarrow +\infty$ .

Теперь уравнение поверхности  $H_k$  можно представить в явной форме  $u_k = \xi_k(h_0(\varphi_k(v_k), v_k))$ , следовательно, лемма справедлива, поскольку нормы функций  $\xi_k$  и  $\varphi_k$  равномерно стремятся к 0 при  $k \rightarrow +\infty$ .

Таким образом, доказательство  $\lambda$ -леммы сводится к проверке того, что нормы  $\|\xi_k\|$  и  $\|\eta_k\|$  стремятся к 0 вместе с нормами их производных. Докажем это.

**Лемма 3.3.** *В системе координат, в которой устойчивое и неустойчивое многообразия распрямлены, нормы функций  $\|\xi_k\|$  и  $\|\eta_k\|$  равномерно стремятся к нулю при  $k \rightarrow \infty$ .*

*Доказательство.* Рассмотрим систему (3.7.5), которая дает решение краевой задачи для отображения  $T$ . Имеем,  $u_k \equiv \xi_k(u_0, v_k)$  и  $v_0 \equiv \eta_k(u_0, v_k)$ . Покажем, что решения системы (3.7.5) удовлетворяют неравенствам

$$\|u_j\| \leq K \bar{\lambda}^j, \quad \|v_j\| \leq K \bar{\gamma}^{j-k} \quad (3.7.20)$$

с некоторыми  $K$  и  $\bar{\lambda} < 1$ ,  $\bar{\gamma} > 1$ . Из доказательства теоремы 3.10 можно увидеть, что решение системы (3.7.5) находится как предел последовательных приближений  $(u_j^{(n)}, v_j^{(n)})$ , которые вычисляются по формуле (3.7.6). Поэтому достаточно проверить, что неравенства (3.7.20) выполняются на всех этапах последовательных приближений при неизменных значениях  $k, \bar{\lambda}, \bar{\gamma}$ .

Для первого приближения

$$(u_j^{(1)} = (A^-)^j u^0, \quad v_j^{(1)} = (A^+)^{-(k-j)} v^1)$$

справедливость неравенств (3.7.20) вытекает из (3.7.8) при условии, что мы выбираем  $K > \varepsilon$  и  $\bar{\lambda} > \lambda$ ,  $\bar{\gamma} < \gamma$ . Теперь покажем, что если неравенства

(3.7.20) верны для  $n$ -го приближения, то они также верны и для  $(n+1)$ -го. Сначала заметим, что из (3.7.17) и (3.7.9) вытекает, что для функций  $f$  и  $g$  справедливы оценки:

$$\|f(u, v)\| \leq \|f(0, v)\| + \left( \sup_{\|u, v\| \leq \varepsilon} \|f'_u\| \right) \|u\| \equiv \delta \|u\| \quad (3.7.21)$$

и

$$\|g(u, v)\| \leq \|g(u, 0)\| + \left( \sup_{\|u, v\| \leq \varepsilon} \|g'_v\| \right) \|v\| \equiv \delta \|v\|. \quad (3.7.22)$$

Теперь из (3.7.7), (3.7.9) и (3.7.21), (3.7.22) получаем

$$\|u_j^{(n+1)}\| \leq \lambda^j \varepsilon + \delta \sum_{s=0}^{j-1} \lambda^{j-s-1} \|u_s^{(n)}\|,$$

$$\|v_j^{(n+1)}\| \leq \gamma^{j-k} \varepsilon + \delta \sum_{s=j}^{k-1} \gamma^{j-s-1} \|v_s^{(n)}\|.$$

Таким образом, если  $(u_s^{(n)}, v_s^{(n)})$  удовлетворяет неравенствам (3.7.20), то для  $u_j^{(n+1)}, v_j^{(n+1)}$  имеем

$$\|u_j^{(n+1)}\| \leq \lambda^j \varepsilon + \delta \sum_{s=0}^{j-1} \lambda^{j-s-1} K \bar{\lambda}^s \leq \bar{\lambda}^j \left( \varepsilon + \frac{\delta K}{\bar{\lambda} - \lambda} \right),$$

$$\|v_j^{(n+1)}\| \leq \gamma^{j-k} \varepsilon + \delta \sum_{s=j}^{k-1} \gamma^{j-s-1} K \bar{\gamma}^{s-k} \leq \bar{\gamma}^{j-k} \left( \varepsilon + \frac{\delta K}{\bar{\gamma} - \gamma} \right).$$

Неравенства (3.7.20) справедливы для  $(u_j^{(n+1)}, v_j^{(n+1)})$  при условии, что

$$K > \left( \varepsilon + \delta K \max \left( \frac{1}{\bar{\lambda} - \lambda}, \frac{1}{\bar{\gamma} - \gamma} \right) \right).$$

Поскольку при достаточно малом  $\varepsilon$  величина  $\delta$  может быть произвольно мала, искомая константа  $K$  существует. Таким образом, можно выбрать такие  $K, \bar{\lambda}$  и  $\bar{\gamma}$ , что неравенства (3.7.20) выполняются для всех приближений, а следовательно, и для решений самой краевой задачи.

Для функций  $\xi_k$  и  $\eta_k$  имеют место неравенства

$$\|\xi_k\| \leq K\bar{\lambda}^k, \quad \|\eta_k\| \leq K\bar{\gamma}^{-k},$$

то есть нормы данных функций равномерно и экспоненциально стремятся к нулю при  $k \rightarrow +\infty$ , что и требовалось доказать.

**Лемма 3.4.** *Нормы производных  $\partial(\xi_k, \eta_k)/\partial(u_0, v_k)$  равномерно стремятся к нулю при  $k \rightarrow \infty$ .*

*Доказательство.* Рассмотрим производные  $\partial\xi_k/\partial u_0$  и  $\partial\eta_k/\partial u_0$ . Они находятся из решений краевой задачи (3.7.13), (3.7.14):  $\partial\xi_k/\partial u_0 \equiv U_k$ ,  $\partial\eta_k/\partial u_0 \equiv V_0$ . Прежде, чем показывать, что и  $U_k(u_0, v_k)$ , и  $V_0(u_0, v_k)$  стремятся к нулю при  $k \rightarrow +\infty$ , докажем, что все  $U_j$  и  $V_j$  ограничены константой, не зависящей ни от  $k$ , ни от  $j$ .

Функции  $U_j$  and  $V_j$  находятся из системы (3.7.15) как предел последовательных приближений

$$\begin{aligned} U_j^{(n+1)} &= (A^-)^j + \sum_{s=0}^{j-1} (A^-)^{j-s-1} (f'_u(u_s^*, v_s^*)U_s^{(n)} + f'_v(u_s^*, v_s^*)V_s^{(n)}), \\ V_j^{(n+1)} &= - \sum_{s=j}^{k-1} (A^+)^{j-s-1} (g'_u(u_s^*, v_s^*)U_s^{(n)} + g'_v(u_s^*, v_s^*)V_s^{(n)}), \end{aligned} \quad (3.7.23)$$

где  $u_s^*$  и  $v_s^*$  являются решениями краевой задачи (3.7.2) и (3.7.3). Мы докажем, что  $U_j$  и  $V_j$  равномерно ограничены, когда покажем, что все последовательные приближения  $U_j^{(n)}$ ,  $V_j^{(n)}$  ограничены некоторой константой, независимой от  $k$ ,  $j$  и  $n$ . Чтобы проверить это, предположим, что для всех  $j$

$$\|U_j^{(n)}, V_j^{(n)}\| \leq 2. \quad (3.7.24)$$

Из (3.7.23), (3.7.9) и (3.7.10) вытекает, что

$$\begin{aligned} \|U_j^{(n+1)}\| &\leq \lambda^j + \sum_{s=0}^{j-1} \lambda^{j-s-1} (\|f'_u(u_s, v_s)\| \|U_s^{(n)}\| + \|f'_v(u_s, v_s)\| \|V_s^{(n)}\|) \\ &\leq 1 + 2\delta \sum_{s=0}^{j-1} \lambda^{j-s-1} \leq 1 + 2\delta/(1-\lambda) \leq 2, \\ \|V_j^{(n+1)}\| &\leq \sum_{s=j}^{k-1} \gamma^{j-s-1} (\|g'_u(u_s, v_s)\| \|U_s^{(n)}\| + \|g'_v(u_s, v_s)\| \|V_s^{(n)}\|) \\ &\leq 2\delta \sum_{s=j}^{k-1} \gamma^{j-s-1} \leq 2\delta/(\gamma-1) \leq 1, \end{aligned}$$

что доказывает верность предположения.

Теперь покажем, что  $U_k$  стремится к нулю при  $k \rightarrow +\infty$ . Поскольку  $U_j$  удовлетворяет системе (3.7.15), получаем

$$\|U_j\| \leq \lambda^j + \sum_{s=0}^{j-1} \lambda^{j-s-1} (\delta \|U_s\| + \|f'_{1v}(u_s^*, v_s^*)\| \|V_s\|). \quad (3.7.25)$$

Так как  $f(0, v) \equiv 0$ , то и  $f'_v(0, v) \equiv 0$ , и, следовательно,  $f'_v(u, v) \rightarrow 0$  при  $u \rightarrow 0$ . Таким образом, в силу (3.7.20),  $f(u_s, v_s) \rightarrow 0$  при  $s \rightarrow +\infty$ . Теперь, так как  $V_s$  ограничено для всех  $s$ , из (3.7.25) получаем

$$\|U_j\| \leq \lambda^j + \sum_{s=0}^{j-1} \lambda^{j-s-1} (\delta \|U_s\| + \rho_s), \quad (3.7.26)$$

где  $\rho_s$  — некоторая последовательность положительных чисел, которые стремятся к нулю при  $s \rightarrow +\infty$ . Рассмотрим последовательность  $Z_j$ , определяемую при помощи рекуррентной формулы

$$Z_j = \lambda^j + \sum_{s=0}^{j-1} \lambda^{j-s-1} (\delta Z_s + \rho_s). \quad (3.7.27)$$

По индукции, из неравенства (3.7.26) вытекает, что  $\|U_k\| \leq Z_k$ . Поэтому, чтобы доказать, что  $\partial\xi_k/\partial u_0 \equiv U_k \rightarrow 0$ , достаточно показать, что  $Z_k \rightarrow 0$ .

Чтобы доказать это, заметим сначала, что согласно (3.7.27)

$$Z_{j+1} - \lambda Z_j = \delta Z_j + \rho_j \quad (3.7.28)$$

откуда

$$Z_{j+1} = (\lambda + \delta)Z_j + \rho_j. \quad (3.7.29)$$

Поскольку  $\delta$  может быть выбрано достаточно малым, то  $\lambda + \delta < 1$ . Теперь сходимость последовательности  $Z_j$  к нулю доказывается также, как это было сделано в случае последовательности (3.5.14) (учитывая, что  $\rho_j \rightarrow 0$ ).

Таким образом,  $U_k = \frac{\partial \xi_k}{\partial u_0}$  стремится к нулю при  $k \rightarrow +\infty$ . Подобным образом можно доказать, что остальные производные:  $\partial \xi_k / \partial v_k$ ,  $\partial \eta_k / \partial u_0$ , and  $\partial \eta_k / \partial v_k$  стремятся к нулю при  $k \rightarrow +\infty$ .

**Лемма 3.5.** *Нормы первых  $r$  производных функций  $\xi_k$  и  $\eta_k$  равномерно стремятся к нулю при  $k \rightarrow \infty$ .*

Доказательство. Введем обозначения

$$U_{j(p,q)}^i \equiv \frac{\partial^i u_j}{\partial u_0^p \partial v_k^q}, \quad V_{j(p,q)}^i \equiv \frac{\partial^i v_j}{\partial u_0^p \partial v_k^q},$$

где  $p + q = i \leq r$ . Значения функций  $U_j^i$  и  $V_j^i$  можно найти методом последовательных приближений как решения системы, полученной из уравнений (3.7.5) путем дифференцирования  $p$  раз по  $u_0$  и  $q$  раз по  $v_k$ :

$$\begin{aligned} U_j^i &= \sum_{s=0}^{j-1} (A^-)^{j-s-1} (f'_u(u_s, v_s) U_s^i + f'_v(u_s, v_s) V_s^i + \\ &+ P_i(u_s, v_s, \dots, U_s^{i-1}, V_s^{i-1})), \end{aligned} \quad (3.7.30)$$

$$\begin{aligned} V_j^i &= - \sum_{s=j}^{k-1} (A^+)^{j-s-1} (g'_u(u_s, v_s) U_s^i + g'_v(u_s, v_s) V_s^i + \\ &+ Q_i(u_s, v_s, \dots, U_s^{i-1}, V_s^{i-1})), \end{aligned}$$

где  $P_i$  и  $Q_i$  — некоторые полиномы от переменных  $(U_s^1, V_s^1, \dots, U_s^{i-1}, V_s^{i-1})$  и производных от функций  $f$  и  $g$ , вычисленных при  $u = u_s$  и  $v = v_s$ .

Например, для производных

$$\left( U_{j(2,0)}^2, V_{j(2,0)}^2 \right) \equiv \left( \frac{\partial^2 u_j}{\partial u_0^2}, \frac{\partial^2 v_j}{\partial u_0^2} \right)$$

имеем

$$\begin{aligned} U_{j(2,0)}^2 &= \sum_{s=0}^{j-1} (A^-)^{j-s-1} (f''_u(u_s, v_s) U_{s(2,0)} + f''_v(u_s, v_s) V_{s(2,0)} + \\ &+ f''_{uu}(u_s, v_s) (U_{s(1,0)})^2 + 2f''_{uv}(u_s, v_s) U_{s(1,0)} V_{s(1,0)} + \\ &+ f''_{vv}(u_s, v_s) (V_{s(1,0)})^2) \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} V_{j(2,0)}^2 &= - \sum_{s=j}^{k-1} (A^+)^{j-s-1} (g'_u(u_s, v_s) U_{s(2,0)} + g'_v(u_s, v_s) V_{s(2,0)} + \\ &+ g''_{uu}(u_s, v_s) (U_{s(1,0)})^2 + 2g''_{uv}(u_s, v_s) U_{s(1,0)} V_{s(1,0)} + \\ &+ g''_{vv}(u_s, v_s) (V_{s(1,0)})^2). \end{aligned}$$

При помощи метода, используемого для первых производных, можно показать, что производные  $U_j^i$  и  $V_j^i$  любого высшего порядка  $i$  ограничены некоторой константой, не зависящей ни от  $j$ , ни от  $k$  (но, возможно, зависящей от порядка  $i$  производной).

Для проверки того, что норма  $\|U_k^i\| \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow +\infty$ , покажем, что нормы  $\|U_j^i\|$  ограничены некоторой последовательностью, не зависящей от  $k$  и стремящейся к нулю при  $j \rightarrow \infty$ . Это утверждение было уже доказано для  $i = 1$ . Покажем по индукции, что оно верно для всех  $i$ .

Предположим, что  $\|U_j^i\| \rightarrow 0$  при  $j \rightarrow \infty$  для всех  $i$  меньших некоторого  $i_0$ . Рассмотрим уравнение (3.7.30) для  $U_j^{i_0}$ . Те члены в  $P_{i_0}$ , которые содержат хотя бы один множитель из функций  $U_s^i$  ( $i < i_0$ ) по предположению индукции стремятся к нулю при  $s \rightarrow +\infty$ . Остальные члены представляют собой произведения некоторых величин  $V_s^i$  на некоторые производные функции  $f(u_s, v_s)$  по переменной  $v_s$ . Поскольку все величины  $V_s^i$  являются равномерно ограниченными, а производные функции  $f(u_s, v_s)$  по  $v_s$  равномерно стремятся к нулю при  $u_s \rightarrow 0$  (так как  $f(0, v) \equiv 0$ ), все эти члены, а также  $f(u_s, v_s) V_s^i$ , стремятся к нулю при  $s \rightarrow +\infty$ .



Таким образом, в полной аналогии с анализом данного вопроса для первой производной, получаем следующую оценку:

$$\|U_j^i\| \leq \lambda^j + \sum_{s=0}^{j-1} \lambda^{j-s-1} (\delta \|U_s^i\| + \rho_s^i),$$

где  $\rho_s^i$  — некоторая последовательность положительных чисел, сходящаяся к нулю при  $s \rightarrow +\infty$ . Следовательно, аналогично неравенству (3.7.26) для  $U_j^1$ , получаем, что  $U_j^i$  ограничены сверху некоторой последовательностью  $Z_j^i$ , которая не зависит от  $k$  и стремится к нулю при  $j \rightarrow +\infty$ . Таким образом, приходим к заключению, что все производные функции  $\xi_k$  стремятся к нулю при  $k \rightarrow +\infty$ .

Для  $V_j^i$  получаем следующую оценку:

$$\|V_j^i\| \leq \sum_{s=j}^{k-1} \gamma^{j-s-1} (\delta \|V_s^i\| + \sigma_{k-s}^i),$$

где  $\sigma_{k-s}^i \rightarrow 0$  при  $(k-s) \rightarrow +\infty$ . Используя те же рассуждения, что и в случае с функциями  $U_j^i$ , можно показать, что  $\|V_{k-j}^i\| \rightarrow 0$  при  $(k-j) \rightarrow +\infty$ . Полагая  $j = k$ , находим, что все производные функции  $\eta_k$  стремятся к нулю при  $k \rightarrow +\infty$ , что и требовалось доказать.

### 3.8. Поведение линейных отображений вблизи неподвижных точек седлового типа. Примеры

В этом разделе изучаются геометрические свойства линейных седловых отображений. В подходящих координатах линейное отображение  $T$  с грубой седловой неподвижной точкой  $O$  можно записать в виде

$$\begin{aligned} \bar{x} &= A^{sL} x, & \bar{u} &= A^{ss} u, \\ \bar{y} &= A^{uL} y, & \bar{v} &= A^{uu} v, \end{aligned} \quad (3.8.1)$$

где модули собственных значений матрицы  $A^{sL}$  равны  $\lambda$ ,  $0 < \lambda < 1$ , а матрицы  $A^{ss}$  — меньше  $\lambda$ . Собственные значения матрицы  $A^{uL}$  по модулю равны  $\gamma$ ,  $\gamma > 1$ , а матрицы  $A^{uu}$  — по модулю больше  $\gamma$ . Тогда, уравнение устойчивого инвариантного многообразия  $W^s$  имеет вид ( $y = 0, v = 0$ ),

а уравнение неведущего (сильно) устойчивого многообразия  $W^{ss}$  — вид ( $x = 0, y = 0, v = 0$ ). Уравнение неустойчивого многообразия  $W^u$  имеет вид ( $x = 0, u = 0$ ), а уравнение неведущего (сильно) неустойчивого многообразия  $W^{uu}$  — вид ( $x = 0, u = 0, y = 0$ ).

Выберем две точки на устойчивом и неустойчивом многообразиях:  $M^+(x^+, u^+, 0, 0) \in W^s/O$  и  $M^-(0, 0, y^-, v^-) \in W^u/O$  и рассмотрим их малые прямоугольные окрестности

$$\Pi^+ = \{\|x - x^+\| \leq \varepsilon_0, \|u - u^+\| \leq \varepsilon_0, \|y\| \leq \varepsilon_0, \|v\| \leq \varepsilon_0\}$$

$$\Pi^- = \{\|x\| \leq \varepsilon_1, \|u\| \leq \varepsilon_1, \|y - y^-\| \leq \varepsilon_1, \|v - v^-\| \leq \varepsilon_1\}$$

такие, что  $T(\Pi^+) \cap \Pi^+ = \emptyset$  и  $T(\Pi^-) \cap \Pi^- = \emptyset$ . Будем считать, что ведущие собственные значения седловой неподвижной точки  $O$  простые, т. е. есть либо одно вещественное ведущее собственное значение, либо пара комплексно-сопряженных. В первом случае вектор  $x$  (или  $y$ ) одномерный, а матрица  $A^{sL}$  (или  $A^{uL}$ ) — скаляр. В случае, когда ведущие собственные значения комплексно сопряжены, вектор  $x$  или  $y$  является двумерным, а матрица  $A^{sL}$  или  $A^{uL}$  имеет вид:

$$A^{sL} = \lambda \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad A^{uL} = \gamma \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi \\ \sin \psi & \cos \psi \end{pmatrix},$$

где  $0 < \lambda < 1$ ,  $\gamma > 1$ ,  $(\varphi, \psi) \notin \{0, \pi\}$ .

Рассмотрим следующие вопросы: существуют ли в окрестности  $\Pi^+$  какие-либо точки, траектории которых достигают окрестности  $\Pi^-$ ? Что собой представляет множество таких точек в окрестности  $\Pi^-$  и множество их образов в окрестности  $\Pi^+$ ?

Сначала рассмотрим случай, когда седловая неподвижная точка имеет только ведущие собственные значения. В разделе 3.6 было установлено, что существует девять основных типов указанных седловых отображений: четыре двумерных (все собственные значения действительны); четыре трехмерных: два седла-фокуса (2,1) и два седло-фокуса (1,2) и четырехмерный случай: седло-фокус (2,2).

Начнем с двумерных отображений. В зависимости от знаков собственных значений седла могут быть четыре различных (в смысле топологической сопряженности) случая. Отображение может иметь один из следующих

ВИДОВ

- (1)  $\bar{x} = \lambda x, \quad \bar{y} = \gamma y;$
- (2)  $\bar{x} = -\lambda x, \quad \bar{y} = \gamma y;$
- (3)  $\bar{x} = \lambda x, \quad \bar{y} = -\gamma y;$
- (4)  $\bar{x} = -\lambda x, \quad \bar{y} = -\gamma y.$

Без потери общности, можно положить, что  $x^+ > 0, y^- > 0$ .

В случае (1) под действием отображения  $T$  точка  $(x^+, 0)$  переходит в точку  $(\lambda x^+, 0)$ , затем в  $(\lambda^2 x^+, 0)$  и так далее. Поскольку  $0 < \lambda < 1$ , точки  $T^k(M^+) = (\lambda^k x^+, 0)$  монотонно стремятся к седлу  $O$ . Между тем, под действием отображения  $T$  прямоугольник  $\Pi^+$  растягивается в  $\gamma$  раз по координате  $y$  и сжимается в  $\lambda$  раз по координате  $x$ . Очевидно, что можно выбрать такое большое  $\bar{k}$  ( $\bar{k} \rightarrow +\infty$  при  $\varepsilon_0 \varepsilon_1 \rightarrow 0$ ), что для всех  $k \geq \bar{k}$  выполняются следующие условия:

$$T^k(\Pi^+) \cap \Pi^- \neq \emptyset, \quad (\gamma^{\bar{k}} \xi_0 > y^- + \varepsilon_1, \quad \lambda^{\bar{k}}(x^+ + \varepsilon_0) < \varepsilon_1),$$

см. рис. 3.8.1<sup>7</sup>.

Обозначим  $\sigma_k^1 = T^k(\Pi^+) \cap \Pi^-$ , где  $k \geq \bar{k}$ . В рассматриваемом случае  $\sigma_k^1$  есть полоска на  $\Pi^-$ , определяемая условиями

$$\sigma_k^1 = \{(x, y) : |x - \lambda^k x^+| \leq \lambda^k \varepsilon_0, |y - y^-| \leq \varepsilon_1\}.$$

При  $k \rightarrow \infty$  полоски  $\sigma_k^1$  монотонно накапливаются к отрезку  $W^u \cap \Pi^- = \{(x, y) : x = 0, |y - y^-| \leq \varepsilon_1\}$ . Для любого достаточно большого  $k$  отображение  $T^k : \Pi^+ \rightarrow \Pi^-$  определено. Его область определения представляет собой полоску  $\sigma_k^0 = T^{-k}(\Pi^-) \cap \Pi^+$  на  $\Pi^+$ , определяемую условиями

$$\sigma_k^0 = \{(x, y) : |x - x^+| \leq \varepsilon_0, |y - \gamma^{-k} y^-| \leq \gamma^{-k} \varepsilon_1\}.$$

При  $k \rightarrow +\infty$  полоски  $\sigma_k^0$  монотонно накапливаются к отрезку  $W^s \cap \Pi^+ = \{(x, y) : |x - x^+| \leq \varepsilon_0, y = 0\}$  (см. рис. 3.8.2). Расположение полосок  $\sigma_k^0$  и  $\sigma_k^1$  показано на рис. 3.8.3а.

В случае (2) точка  $O$  — узел (–) на  $W^s$ . Поэтому прямоугольники  $T^k(\Pi^+)$  и  $T^{k+1}(\Pi^+)$  расположены с разных сторон от  $W^u$ . Таким образом, при  $k \rightarrow +\infty$  полоски  $\sigma_k^1$  накапливаются к интервалу  $W^u \cap \Pi^-$ : справа

<sup>7</sup>Для нелинейного случая существование такого  $\bar{k}$  вытекает из  $\lambda$ -леммы.

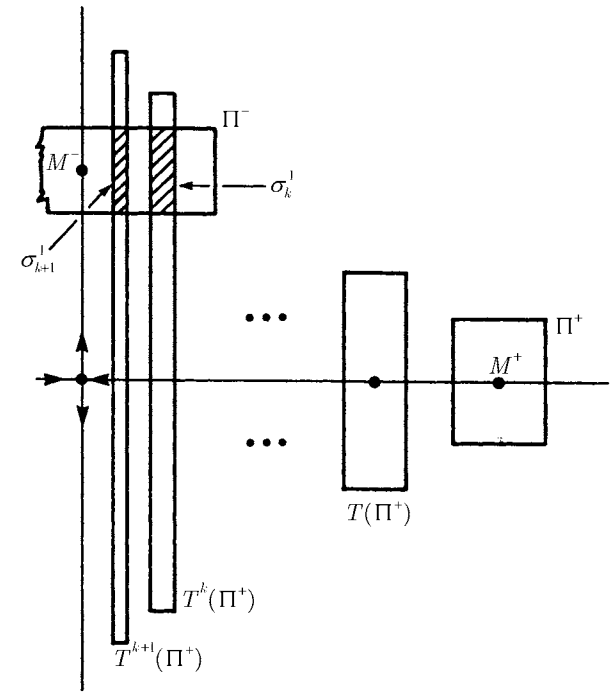


Рис. 3.8.1. Отображение  $T$  вблизи седловой неподвижной точки. Исходный прямоугольник  $\Pi^+$  растягивается вдоль неустойчивого направления  $y$  и сжимается вдоль устойчивого направления  $x$ . Область определения отображения  $T' : \Pi^+ \rightarrow \Pi^-$  состоит из полосок  $\sigma_k^1$ , лежащих в пересечении образов  $T^k \Pi^+$  и прямоугольника  $\Pi^-$

при четных  $k$  (со стороны положительных  $x$ ) и слева — при нечетных  $k$ . Расположение полосок  $\sigma_k^0$  и  $\sigma_k^1$  показано на рис. 3.8.3б.

В случае (3) «прыгающим направлением» является ось  $y$  — неустойчивое многообразие  $W^u$ . Полоски  $\sigma_k^0$  накапливаются к отрезку  $W^s \cap \Pi^+$  с двух сторон, как показано на рис. 3.8.3с.

В случае (4) точка  $O$  имеет устойчивый узел (–) на  $W^s$  и неустойчивый узел (–) на  $W^u$ . Поэтому полоски  $\sigma_k^0$  накапливаются к отрезку  $W^s \cap \Pi^+$  с двух сторон. Полоски  $\sigma_k^1$  накапливаются к отрезку  $W^u \cap \Pi^-$  также с двух сторон, см. рис. 3.8.3д.

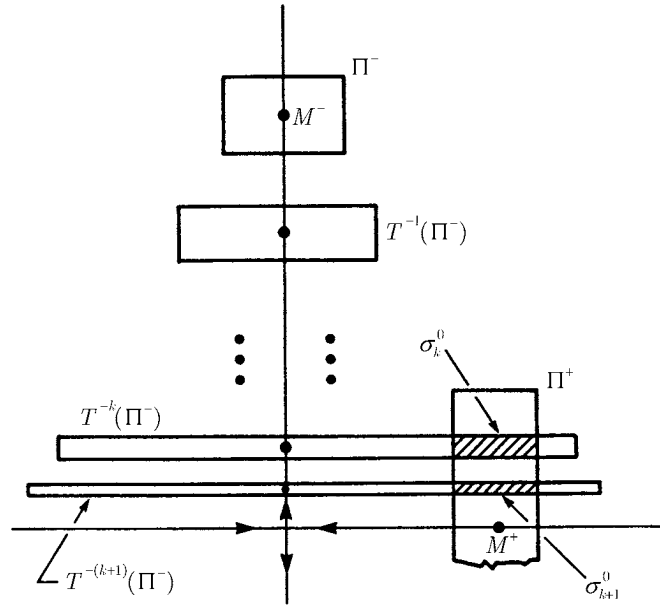


Рис. 3.8.2. Обратное отображение  $T^{-1}$  вблизи седла. Прямоугольник  $\Pi^-$  под действием обратного отображения  $T^{-1}$  растягивается вдоль устойчивого направления  $x$  и сжимается вдоль неустойчивого направления  $y$ . Полоски  $\sigma_k^0$  образуют область определения отображения  $T' : \Pi^+ \rightarrow \Pi^-$

Рассмотрим теперь случаи, когда ведущие собственные значения содержат комплексно сопряженную пару.

В трехмерном случае, когда точка  $O$  является седло-фокусом (2,1), линейное отображение можно записать в виде

$$\begin{aligned}\bar{x}_1 &= \lambda(\cos \varphi \cdot x_1 - \sin \varphi \cdot x_2), \\ \bar{x}_2 &= \lambda(\sin \varphi \cdot x_1 + \cos \varphi \cdot x_2), \\ \bar{y} &= \gamma y,\end{aligned}\quad (3.8.2)$$

где  $\lambda_{1,2} = \lambda e^{\pm i\varphi}$  и  $\gamma$  собственные значения седла  $O$ ,  $\varphi \notin \{0, \pi\}$ ,  $0 < \lambda < 1$ ,  $|\gamma| > 1$ . Для определенности, рассмотрим случай, когда  $\gamma$  положительно.

Отображение  $T^k$  принимает вид

$$\begin{aligned}\bar{x}_1 &= \lambda^k(\cos(k\varphi) \cdot x_1 - \sin(k\varphi) \cdot x_2), \\ \bar{x}_2 &= \lambda^k(\sin(k\varphi) \cdot x_1 + \cos(k\varphi) \cdot x_2), \\ \bar{y} &= \gamma^k y.\end{aligned}\quad (3.8.3)$$

На  $W^s \setminus O$  возьмем произвольную точку  $M^+(x_1^+, x_2^+, 0)$ . Поворотом системы координат в плоскости  $(x_1, x_2)$  всегда можно сделать так, что  $x_2^+ = 0$ , а формулы (3.8.2) и (3.8.3) оставались бы неизменными. Из (3.8.3) вытекает, что область определения  $\sigma_0$  отображения  $T' : \Pi^+ \rightarrow \Pi^-$  состоит из счетного объединения непересекающихся трехмерных «пластинок»

$$\sigma_k^0 = \{(x_1, x_2, y) : |x - x^+| \leq \varepsilon_0, |x_2| \leq \varepsilon_0, |y - \gamma^{-k} y^-| \leq \gamma^{-k} \varepsilon_1\}$$

( $k \geq \bar{k}$ ), накапливающихся к квадрату  $W^s \cap \Pi^+$  при  $k \rightarrow +\infty$ . Чтобы описать область значений  $\sigma_1$  отображения  $T' : \Pi^+ \rightarrow \Pi^-$ , введем полярные координаты  $(r, \theta)$  такие, что  $x_1 = r \cos \theta$ ,  $x_2 = r \sin \theta$ . Отображение (3.8.3) принимает вид:

$$\bar{r} = \lambda^k r, \quad \bar{\theta} = \theta + k\varphi, \quad \bar{y} = \gamma^k y.$$

Следовательно,  $T^k(\Pi^+)$  представляет собой параллелепипед высотой  $2\gamma^k \varepsilon_0$ . Его основание, лежащее на многообразии  $W^s$ , представляет собой квадрат со стороной  $2\varepsilon_0 \lambda^k$  и центром в точке  $M_k^+ = (\lambda^k x_1^+, k\varphi)$ . Заметим, что все точки  $M_k^+$  лежат на логарифмической спирали  $\bar{r} = x_1^+ \lambda^{\bar{\theta}/\varphi}$ . Таким образом,  $\sigma_1$  представляет собой объединение счетного множества трехмерных вертикальных параллелепипедов  $\sigma_k^1$ , лежащих внутри «рулета»  $R^-$ :

$$\{(|x^+| - \varepsilon_0) \lambda^{\bar{\theta}/\varphi} \leq \bar{r} \leq (|x^+| + \varepsilon_0) \lambda^{\bar{\theta}/\varphi}, |\bar{y} - y^-| \leq \varepsilon_1\},$$

закрученного вокруг отрезка

$$W^u \cap \Pi^- = \{x_1 = x_2 = 0, |y - y^-| \leq \varepsilon_1\}$$

оси  $W^u$ , см. рис. 3.8.4. Полоска  $\sigma_k^1 \subset R^-$  по координатам  $(x_1, x_2)$  имеет диаметр порядка  $\varepsilon_0 \lambda^k$  и отстоит от полоски  $\sigma_{k+1}^1$  на угол порядка  $\varphi$  по угловой координате  $\theta$ .

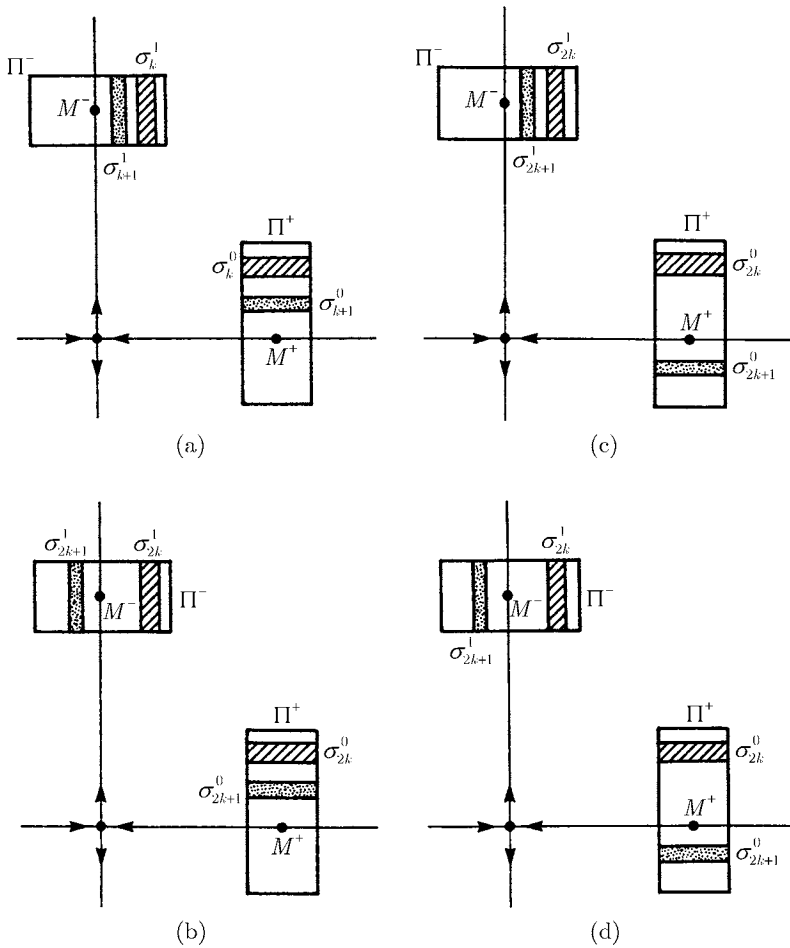


Рис. 3.8.3. Отображение Пуанкаре вблизи седловых неподвижных точек различных типов. См. подрисовочные надписи к рис. 3.8.1 и 3.8.2. (a) Вблизи седла (+, +), (b) вблизи седла (-, +). Четные и нечетные итерации прямоугольника  $\Pi^+$  лежат с разных сторон от неустойчивого многообразия (оси  $y$ ), (c) вблизи седла (-, +), (d) вблизи седла (-, -)

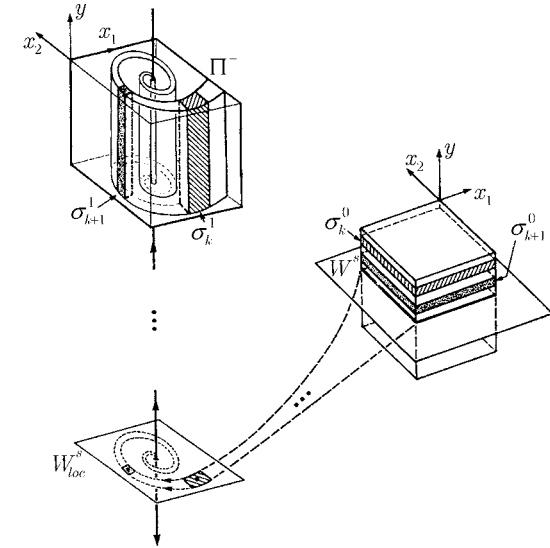


Рис. 3.8.4. Геометрия отображения Пуанкаре вблизи седло-фокуса (2, 1+)

В случае, когда неподвижная точка является седло-фокусом (1,2), отображение  $T$  можно представить в виде

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \lambda x, \\ \bar{y}_1 &= \gamma(\cos \psi \cdot y_1 - \sin \psi \cdot y_2), \\ \bar{y}_2 &= \gamma(\sin \psi \cdot y_1 + \cos \psi \cdot y_2), \end{aligned}$$

где  $|\lambda| < 1$ ,  $\gamma > 1$ , а  $\psi \neq \{0, \pi\}$ . Для определенности рассмотрим случай, когда  $0 < \lambda < 1$ . Отображение  $T^{-k} : \Pi^- \rightarrow \Pi^+$  имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \bar{y}_2 &= \gamma^{-k}(\cos(k\psi) \cdot \bar{y}_2 - \sin(k\psi) \cdot \bar{y}_1), \\ \bar{y}_1 &= \gamma^{-k}(\sin(k\psi) \cdot \bar{y}_2 + \cos(k\psi) \cdot \bar{y}_1), \\ \bar{x} &= \lambda^{-k} \cdot \bar{x}. \end{aligned}$$

Эта формула аналогична (3.8.3). Тогда, из-за симметрии, если взять точки  $M^+ \in W^s \setminus O$  и  $M^-(0, 0, y_2^-) \in W^u \setminus O$ , и их окрестности  $\Pi^+$  и

$\Pi^-$ , то область значений отображения  $T' : \Pi^+ \rightarrow \Pi^-$  будет состоять из счетного объединения непересекающихся трехмерных пластинок  $\sigma_k^1$ , накапливающихся к квадрату  $W^u \cap \Pi^-$ . Область определения отображения  $T' : \Pi^+ \rightarrow \Pi^-$  представляет собой объединение счетного множества трехмерных горизонтальных параллелепипедов  $\sigma_k^0$ , лежащих внутри рулета  $R^+$  (см. рис. 3.8.5):

$$\{(|y_2^-| - \varepsilon_1) \cdot \gamma^{-\theta/\psi} \leq r \leq (|y_2^-| + \varepsilon_1) \cdot \gamma^{-\theta/\psi}, |x - x^+| \leq \varepsilon_0\},$$

закрученного вокруг отрезка

$$W^s \cap \Pi^+ = \{|x - x^+| \leq \varepsilon_0, y_1 = y_2 = 0\}$$

оси  $W^s$ . Полоска  $\sigma_k^0$  по координатам  $(y_1, y_2)$  имеет диаметр порядка  $\varepsilon_1 \cdot \gamma^{-k}$ . Кроме того, полоски  $\sigma_k^0$  и  $\sigma_{k+1}^0$  отстоят друг от друга на угол порядка  $\psi$  по угловой координате  $\theta$ .

Теперь рассмотрим случай, когда неподвижная точка  $O$  является седло-фокусом (2,2). Соответствующее линейное отображение  $T$  можно записать как

$$\begin{aligned} \bar{x}_1 &= \lambda(\cos \varphi \cdot x_1 - \sin \varphi \cdot x_2), \\ \bar{x}_2 &= \lambda(\sin \varphi \cdot x_1 + \cos \varphi \cdot x_2), \\ \bar{y}_1 &= \gamma(\cos \psi \cdot y_1 - \sin \psi \cdot y_2), \\ \bar{y}_2 &= \gamma(\sin \psi \cdot y_1 + \cos \psi \cdot y_2), \end{aligned} \quad (3.8.4)$$

где  $\varphi, \psi \notin \{0, \pi\}$ ,  $0 < \lambda < 1 < \gamma$ . Рассмотрим две произвольные точки  $M^+(x_1^+, x_2^+, 0, 0) \in W^s \setminus O$  и  $M^-(0, 0, y_1^-, y_2^-) \in W^u \setminus O$ . Не внося изменений в формулу (3.8.4), путем ортогонального поворота систем координат в плоскостях  $(x_1, x_2)$  и  $(y_1, y_2)$  всегда можно добиться, что  $x_1^+ = 0$  и  $y_1^- = 0$ . В полярных координатах  $(r, \theta)$  в плоскости  $(x_1, x_2)$  и  $(\rho, \alpha)$  в плоскости  $(y_1, y_2)$  отображение (3.8.4) принимает простой вид:

$$\bar{r} = \lambda r, \quad \bar{\theta} = \theta + \varphi, \quad \bar{\rho} = \gamma \rho, \quad \bar{\alpha} = \alpha + \psi.$$

Следовательно, отображение  $T^k$  примет вид:

$$\bar{r} = \lambda^k r, \quad \bar{\theta} = \theta + k\varphi, \quad \bar{\rho} = \gamma^k \rho, \quad \bar{\alpha} = \alpha + k\psi. \quad (3.8.5)$$

Так как  $0 < \lambda < 1 < \gamma$ , то из (3.8.5) вытекает, что  $\gamma^k \varepsilon_0 > y_2^- + \varepsilon_1$  и  $\lambda^k(x_1^+ + \varepsilon_0) < \varepsilon_1$  при достаточно больших  $k$ , поэтому  $T^k(\Pi^+) \cap \Pi^- \neq \emptyset$ .

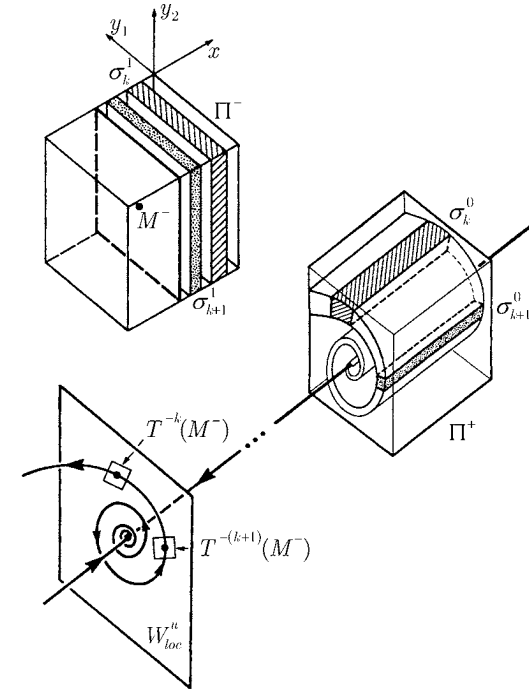


Рис. 3.8.5. Отображение Пуанкаре вблизи седло-фокуса (1+2). Картинка обратная к отображению на рис. 3.8.4

Четырехмерные полоски  $\sigma_k^1 \equiv T^k(\Pi^+) \cap \Pi^-$  при  $k \rightarrow +\infty$  накапливаются к двумерному квадрату:

$$W^u \cap \Pi^- = \{0, 0, |y_1| \leq \varepsilon_1, |y_2 - y_2^-| \leq \varepsilon_1\}.$$

В плоскости  $W^s : (x_1, x_2, 0, 0)$  точки  $M_k^+ \equiv T^k(M^+) = (\lambda^k x_1^+, k\varphi)$  лежат на логарифмической спирали  $\bar{r} = x_1^+ \cdot \lambda^{\bar{\theta}/\varphi}$ . Таким образом, область значений  $\sigma_1$  отображения  $T' : \Pi^+ \rightarrow \Pi^-$  представляет собой объединение счетного множества полосок  $\sigma_k^1$ , расположенных внутри рулета  $R^-$  (рис. 3.8.6)

$$\{(|x_1^+| - \varepsilon_0) \cdot \lambda^{\bar{\theta}/\varphi} \leq \bar{r} \leq (|x_1^+| + \varepsilon_0) \cdot \lambda^{\bar{\theta}/\varphi}, |\bar{y}_1| \leq \varepsilon_1, |\bar{y}_2 - y_2^-| \leq \varepsilon_1\},$$

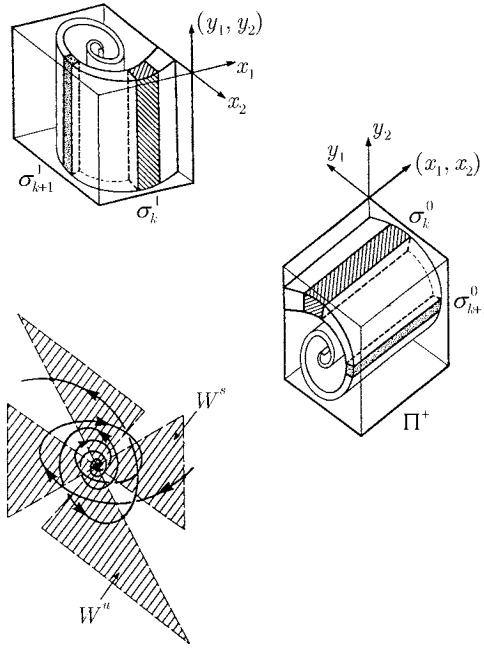


Рис. 3.8.6. Отображение Пуанкаре вблизи седло-фокуса в  $\mathbb{R}^4$ . Исходный четырехмерный параллелепипед  $\Pi^+$  под действием отображения  $T$  преобразуется в «рулет», пересекающий параллелепипед  $\Pi^-$ . Образ параллелепипеда  $\Pi^+$  под действием обратного отображения  $T^{-1}$  имеет ту же форму

закрученного вокруг двумерного квадрата  $W^u \cap \Pi^-$ . По координатам  $(x_1, x_2)$  полоска  $\sigma_k^1$  имеет диаметр порядка  $\varepsilon_0 \lambda^k$ , а по угловой координате  $\theta$  полоски  $\sigma_k^1$  и  $\sigma_{k+1}^1$  отстают друг от друга на угол порядка  $\varphi$ .

Теперь найдем область определения  $\sigma_0$  отображения  $T^1: \Pi^+ \rightarrow \Pi^-$ . Отображение  $T^{-k}: \Pi^- \rightarrow \Pi^+$ , записанное в полярных координатах  $(r, \theta, \rho, \alpha)$ , имеет вид

$$r = \lambda^{-k} \bar{r}, \quad \theta = \bar{\theta} - k\varphi, \quad \rho = \gamma^{-k} \bar{\rho}, \quad \alpha = \bar{\alpha} - k\psi. \quad (3.8.6)$$

Так как  $0 < \lambda < 1$ ,  $\gamma > 1$ , то область определения  $\sigma_0$  состоит из счетного множества четырехмерных полосок  $\sigma_k^0$ , лежащих внутри рулета

$R^+$  (см. рис. 3.8.6)

$$\left\{ (|y^-_2| - \varepsilon_1) \cdot \gamma^{-\alpha/\psi} \leq \rho \leq (|y^-_2| + \varepsilon_1) \cdot \gamma^{-\alpha/\psi}, \right. \\ \left. |x_1 - x^+_1| \leq \varepsilon_0, |x_2| \leq \varepsilon_0, \right\}$$

закрученного вокруг двумерного квадрата  $W^s \cap \Pi^+$ . При  $k \rightarrow +\infty$  четырехмерные полоски  $\sigma_k^0$  накапливаются к квадрату  $W^s \cap \Pi^+$ . По координатам  $(y_1, y_2)$  полоска  $\sigma_k^0$  имеет диаметр  $\sim \varepsilon_1 \gamma^{-k}$ , а по угловой координате  $\alpha$  ближайшие полоски  $\sigma_k^0$  и  $\sigma_{k+1}^0$  удалены друг от друга на угол порядка  $\psi$ .

Рассмотрим теперь ситуацию, когда неподвижная точка седлового типа имеет неведущие направления. Найдем область определения и область значений отображения  $T^1: \Pi^+ \rightarrow \Pi^-$  для трехмерных случаев. Рассмотрим два случая:

- 1)  $W^s$  двумерно, а  $W^u$  одномерно;
- 2)  $W^s$  одномерно, а  $W^u$  двумерно.

В первом случае линейное отображение  $T$  записывается как

$$\bar{x} = \lambda x, \quad \bar{u} = \lambda_2 u, \quad \bar{y} = \gamma y,$$

где, для определенности, мы полагаем, что  $\lambda$  и  $\gamma$  положительны, а  $0 < |\lambda_2| < \lambda$ . Поскольку  $M^+ \notin W^{ss}$ , то  $x^+ \neq 0$ , и поэтому можно положить, что  $x^+ > 0$ . Отображение  $T^{-k}: \Pi^- \rightarrow \Pi^+$  записывается как

$$x = \lambda^{-k} \bar{x}, \quad u = \lambda_2^{-k} \bar{u}, \quad y = \gamma^{-k} \bar{y},$$

где  $(x, u, y) \in \Pi^+$ , а  $(\bar{x}, \bar{u}, \bar{y}) \in \Pi^-$ . Замечаем, что для достаточно больших  $k$  таких, что  $\lambda^{-k} \varepsilon_1 > x^+ + \varepsilon_0$  и  $|\lambda_2^{-k}|^{-k} \varepsilon_1 > |u^+| + \varepsilon_0$ , полоски  $\sigma_k^0 \equiv T^{-k}(\Pi^-) \cap \Pi^+$  определяются как

$$\sigma_k^0 = \{(x, u, y): |x - x^+| \leq \varepsilon_0, |u - u^+| \leq \varepsilon_0, |y - \gamma^{-k} y^-| \leq \gamma^{-k} \varepsilon_1\},$$

т. е. они суть трехмерные пластинки толщиной  $2\gamma^{-k} \varepsilon_1$ , накапливающиеся к квадрату  $W^s \cap \Pi^+$  при  $k \rightarrow +\infty$ , см. рис. 3.8.7.

Отображение  $T^k$  записывается в виде

$$\bar{x} = \lambda^k x, \quad \bar{u} = \lambda_2^k u, \quad \bar{y} = \gamma^k y.$$

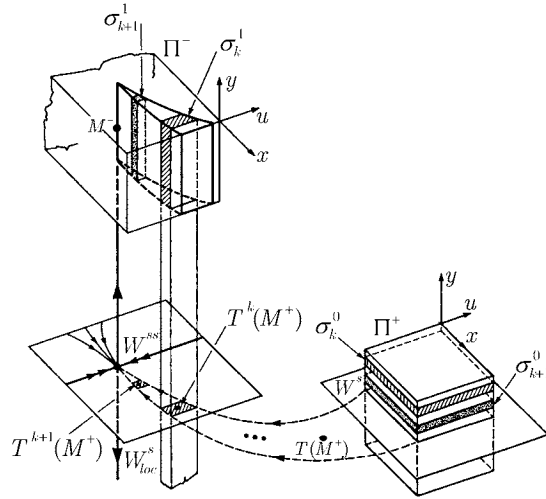


Рис. 3.8.7. Отображение Пуанкаре в окрестности седла в  $\mathbb{R}^3$ . Образы точек, лежащих на пересечении двумерного устойчивого многообразия  $W^s$  с трехмерной областью  $\Pi^+$ , образуют ребро клина. Часть области  $\Pi^+$ , расположенная выше  $W^s$ , преобразуется в сам клин. Чем ближе к многообразию  $W^s$  заштрихованный участок области  $\Pi^+$ , тем тоньше его образ внутри  $\Pi^-$ , и тем ближе он располагается к многообразию  $W^u$

Полоски  $\sigma_k^1 \equiv T^k(\Pi^+) \cap \Pi^-$  задаются соотношениями:

$$\sigma_k^1 = \{(\bar{x}, \bar{u}, \bar{y}) : |\bar{x} - \lambda^k x^+| \leq \lambda^k \varepsilon_0, |\bar{u} - \lambda_2^k u^+| \leq \lambda_2^k \varepsilon_0, |\bar{y} - y^-| \leq \varepsilon_1\}.$$

Поэтому, во-первых, при  $k \rightarrow +\infty$  полоски  $\sigma_k^1$  накапливаются к отрезку

$$W^u \cap \Pi^- = \{x = 0, u = 0, |y - y^-| \leq \varepsilon_1\}$$

и, во-вторых, они имеют форму вертикальных «брусков», лежащих внутри трехмерного клина

$$\{\bar{x} > 0, C_2 \bar{x}^\alpha \leq \bar{u} \leq C_1 \bar{x}^\alpha, |\bar{y} - y^-| \leq \varepsilon_1, \alpha = \ln |\lambda_2| / \ln \lambda,\}$$

$$C_{1,2} = (u^+ \pm \varepsilon_0) / (x^+ \mp \varepsilon)^{-\alpha}\}.$$

Данный клин примыкает к отрезку

$$W^u \cap \Pi^- = \{x = 0, u = 0, |y - y^-| \leq \varepsilon_1\}.$$

Поскольку  $\alpha > 1$  и  $C_{1,2} \neq \infty$ , клин касается расширенного неустойчивого подпространства  $E^u \otimes E^{s+} : \{u = 0\}$  в точках отрезка  $W^u \cap \Pi^-$ , как показано на рис. 3.8.7.

Если  $W^s$  одномерно, а  $W^u$  двумерно, то отображение  $T$  можно записать в виде

$$\bar{x} = \lambda x, \quad \bar{y} = \gamma y, \quad \bar{v} = \gamma_2 v,$$

где  $|\gamma_2| > |\gamma|$ . Данный случай сводится к приведенному выше путем рассмотрения обратного отображения  $T^{-1}$ . Рассмотрим точки  $M^+ \in W^s$  и  $M^- \in W^u/W^{uu}$  и их окрестности  $\Pi^+$  и  $\Pi^-$ , соответственно. Область значений отображения  $T' : \Pi^+ \rightarrow \Pi^-$  будет состоять из счетного объединения непересекающихся трехмерных пластинок  $\sigma_k^1$ , накапливающихся к квадрату  $W^u \cap \Pi^-$ . Вместе с тем, область определения представляет собой счетное множество трехмерных горизонтальных брусков  $\sigma_k^0$ , лежащих внутри клина

$$\{y > 0, \tilde{C}_2 y^\alpha < v < \tilde{C}_1 y^\alpha, |x - x^+| \leq \varepsilon_0\}$$

где  $\alpha = \ln |\gamma_2| / \ln |\gamma|$ . В точках отрезка

$$W^s \cap \Pi^+ = \{y = 0, v = 0, |x - x^+| \leq \varepsilon_0\}$$

указанный клин касается расширенного устойчивого подпространства  $E^s \oplus E^{u+} : \{v = 0\}$ , см. рис. 3.8.8.

Теперь рассмотрим общий линейный случай, т.е. для отображения (3.8.1) при  $\|A^{sL}\| \leq \lambda_2 < \lambda < 1$  и  $\|A^{uL}\| \geq \gamma_2 > \gamma > 1$ . Мы полагаем, что ни одна из точек  $M^+$  или  $M^-$  не лежит в неведущих инвариантных многообразиях седла, т.е.  $M^+ \in W^s \setminus W^{ss}$  и  $M^- \in W^u \setminus W^{uu}$ . Из этого условия вытекает, что  $\|x^+\| \neq 0$  и  $\|y^-\| \neq 0$ . Без потери общности можно положить, что  $x^+ > 0$  и  $y^- > 0$ . Несложно показать, что проекции многомерных полосок  $\sigma_k^0$  и  $\sigma_k^1$  на ведущие направления  $(x, y)$  аналогичны рассмотренным выше. Что касается неведущих направлений, то имеют место следующие соотношения: если  $(x, u, y, v) \in \sigma_k^0$ , то  $\|v\|/\|y\| \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow +\infty$ , а если  $(\bar{x}, \bar{u}, \bar{y}, \bar{v}) \in \sigma_k^1$ , то  $\|\bar{v}\|/\|\bar{x}\| \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow +\infty$ .

### 3.9. Геометрические свойства нелинейных отображений седлового типа

Результаты, полученные в предыдущем разделе, имеют, главным образом, иллюстративный характер. Поэтому важно то, чтобы геометрические

структуры, рассмотренные при изучении линейного случая, сохранились для общих нелинейных отображений.

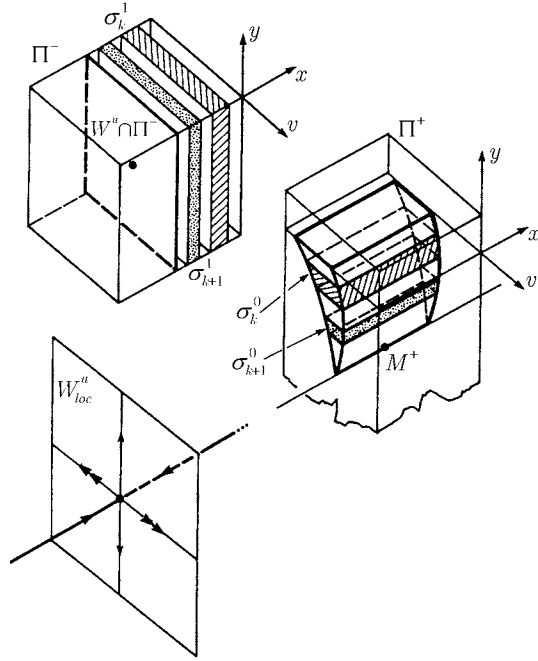


Рис. 3.9.1. Отображение вблизи седла другого топологического типа, то есть с одномерным устойчивым многообразием  $W^s$  и двумерным неустойчивым многообразием  $W^u$ . Данное отображение можно считать обратным отображению, приведенному на рис. 3.8.7

Вблизи седловой неподвижной точки нелинейное отображение  $T$  можно записать в виде

$$\begin{aligned}\bar{x} &= A^{sL}x + f_1(x, u, y, v), \\ \bar{u} &= A^{ss}u + f_2(x, u, y, v), \\ \bar{y} &= A^{uL}y + g_1(x, u, y, v), \\ \bar{v} &= A^{uu}v + g_2(x, u, y, v),\end{aligned}\tag{3.9.1}$$

где  $x$  и  $y$  — ведущие, а  $u$  и  $v$  — неведущие координаты. Абсолютные величины собственных значений матрицы  $A^{sL}$  равны  $\lambda$  ( $0 < \lambda < 1$ ), матрицы  $A^{ss}$  — меньше  $\lambda$ , матрицы  $A^{uL}$  — равны  $\gamma$  ( $\gamma > 1$ ), а матрицы  $A^{uu}$  — больше  $\gamma$ . Функции  $f$  и  $g$  вместе с первыми производными в начале координат обращаются в нуль. Допустим, что в некоторой достаточно малой окрестности  $U$  седловой точки  $O$  инвариантные устойчивые и неустойчивые многообразия распрямлены, тогда  $f(0, 0, y, v) \equiv 0$  и  $g(x, u, 0, 0) \equiv 0$ . В этом случае, уравнение многообразия  $W_{loc}^s$  имеет вид:  $(y = 0, v = 0)$ , а уравнение многообразия  $W_{loc}^u$  записывается как  $(x = 0, u = 0)$ .

Положим, что устойчивые и неустойчивые ведущие мультипликаторы седловой неподвижной точки  $O$  являются простыми (а именно: вещественным ведущим собственным значением или парой комплексно сопряженных ведущих собственных значений).

Пусть  $M^+(x^+, u^+, 0, 0)$  и  $M^-(0, 0, y^-, v^-)$  — некоторые точки на устойчивом и неустойчивом многообразиях такие, что ни одна из них не лежит в соответствующих неведущих многообразиях. Пусть  $\Pi^+$  и  $\Pi^-$  — достаточно малые прямоугольные окрестности точек  $M^+$  и  $M^-$  соответственно:

$$\Pi^+ = \{\|x - x^+\| \leq \varepsilon_0, \|u - u^+\| \leq \varepsilon_0, \|y\| \leq \varepsilon_0, \|v\| \leq \varepsilon_0\}$$

$$\Pi^- = \{\|x\| \leq \varepsilon_1, \|u\| \leq \varepsilon_1, \|y - y^-\| \leq \varepsilon_1, \|v - v^-\| \leq \varepsilon_1\}$$

такие, что  $T(\Pi^+) \cap \Pi^+ = \emptyset$  и  $T(\Pi^-) \cap \Pi^- = \emptyset$ .

Что в данном случае представляет собой отображение  $T' : \Pi^+ \rightarrow \Pi^-$ ? Легко показать, что здесь так же, как в линейном случае, есть счетное множество «полосок»  $\sigma_k^0 = T^{-k}(\Pi^-) \cap \Pi^+$  и  $\sigma_k^1 = T^k(\Pi^+) \cap \Pi^-$ , накапливающих соответственно к  $W_{loc}^s \cap \Pi^+$  и  $W_{loc}^u \cap \Pi^-$  при  $k \rightarrow +\infty$ . Для этих полосок выполняется тождество  $T^k(\sigma_k^0) \equiv \sigma_k^1$ .

Действительно, из существования решения краевой задачи (см. раздел 3.7) вытекает, что

$$(x_k, u_k) = \{\xi_k^1(x_0, u_0, y_k, v_k), \xi_k^2(x_0, u_0, y_k, v_k)\},\tag{3.9.2}$$

$$(y_0, v_0) = \{\eta_k^1(x_0, u_0, y_k, v_k), \eta_k^2(x_0, u_0, y_k, v_k)\},\tag{3.9.3}$$

где  $\|\xi_k\| \rightarrow 0$  и  $\|\eta_k\| \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow +\infty$  (лемма 3.3). Таким образом, при достаточно большом значении  $k$  (то есть таком, чтобы выполнялись неравенства  $\|\xi_k\| < \varepsilon_1$  и  $\|\eta_k\| < \varepsilon_0$ ) полоски  $\sigma_k^0$  и  $\sigma_k^1$  определяются следующими условиями:



- $\sigma_k^0$  представляет собой множество тех точек в  $\Pi^+$ , координаты  $(x_0, u_0, y_0, v_0)$  которых удовлетворяют (3.9.3), где  $\|y_k - y^-\| \leq \varepsilon_1$ ,  $\|v_k - v^-\| \leq \varepsilon_1$ ;
- $\sigma_k^1$  представляет собой множество тех точек в  $\Pi^-$ , координаты  $(x_k, u_k, y_k, v_k)$  которых удовлетворяют (3.9.2), где  $\|x_0 - x^+\| \leq \varepsilon_0$  и  $\|u_0 - u^+\| \leq \varepsilon_0$ .

Заметим, что поскольку  $T(\Pi^+) \cap \Pi^+ = \emptyset$ ,  $T(\Pi^-) \cap \Pi^- = \emptyset$ , а отображение  $T$  является диффеоморфизмом, полоски  $\sigma_k^j$  ( $j = 0, 1$ ) не пересекаются при любых значениях  $k$ .

Для описания геометрических свойств области определения  $\cup \sigma_k^0$  и области значений  $\cup \sigma_k^1$  отображения  $T' : \Pi^+ \rightarrow \Pi^-$  в нелинейном случае необходимы некоторые дополнительные оценки решений (3.9.2) и (3.9.3) краевой задачи. Их можно получить следующим образом. Введем такие координаты  $(x, u, y, v)$ , чтобы для системы (3.9.1) выполнялись условия

$$\begin{aligned} f_i &= f_{i1}(x, y, v)x + f_{i2}(x, u, y, v)u \\ g_i &= g_{i1}(x, u, y)y + g_{i2}(x, u, y, v)v \\ f_{1j}|_{y=0, v=0} &\equiv 0, \quad g_{1j}|_{x=0, u=0} \equiv 0, \\ f_{i1}|_{x=0} &\equiv 0, \quad g_{i1}|_{y=0} \equiv 0 \quad (i, j = 1, 2). \end{aligned} \quad (3.9.4)$$

Существование таких  $\mathbb{C}^{r-1}$ -координат гарантирует теорема 3.22 (доказательство аналогично доказательству теоремы 2.20, приведенному в приложении А). В указанных координатах неведущие инвариантные многообразия распрямлены: уравнение многообразия  $W_{loc}^{ss}$  имеет вид  $(y = v = x = 0)$ , а уравнение многообразия  $W_{loc}^{uu}$  задается как  $(x = u = y = 0)$ . Кроме того, уравнения для ведущих координат становятся линейными как на  $W^s$ , так и на  $W^u$ . Заметим также, что все члены вида  $x \cdot p(y, v)$  исключаются из правых частей уравнений для  $\bar{x}$  и  $\bar{u}$ , а члены вида  $y \cdot q(x, u)$  исключаются из правых частей уравнений для  $\bar{y}$  и  $\bar{v}$ .

**Лемма 3.6.** *Если условия (3.9.4) выполнены, а ведущие собственные значения простые (вещественные или комплексные), то имеют место следующие соотношения:*

$$\xi_k^1 = (A^{sL})^k x_0 + o(\lambda^k), \quad \eta_k^1 = (A^{uL})^{-k} y_k + o(\gamma^{-k}), \quad (3.9.5)$$

$$\xi_k^2 = o(\lambda^k), \quad \eta_k^2 = o(\gamma^{-k}). \quad (3.9.6)$$

где члены  $o(\lambda^k)$  и  $o(\gamma^{-k})$  являются  $\mathbb{C}^{r-1}$ -гладкими, а все их производные также имеют порядок  $o(\lambda^k)$  и  $o(\gamma^{-k})$ , соответственно.

Доказательство приводится в приложении В.

Непосредственно из леммы 3.6 вытекает, что геометрическая структура множеств, состоящих из полосок  $\sigma_k^0$  и  $\sigma_k^1$ , по существу, аналогична линейному случаю. Действительно, согласно (3.9.6), полоски лежат внутри клинов, суженных вдоль неведущих координат (так как сжатия и растяжения по неведущим координатам асимптотически более сильные, чем по ведущим). Соотношения (3.9.5) означают, что по ведущим координатам геометрическая структура определяется, главным образом, линейными членами отображения  $T$ : полоски принадлежат рулетам в том случае, когда ведущие мультипликаторы комплексные; если устойчивый или неустойчивый ведущий мультипликатор действителен, то полоски соответственно накапливаются к  $W_{loc}^u$  или  $W_{loc}^s$  либо с одной стороны, когда мультипликатор положителен, либо с двух сторон, когда он отрицателен.

Отметим, что этот результат получен на основании леммы 3.6, которая верна только для отображений класса  $\mathbb{C}^r$ , где  $r \geq 2$ . Для доказательства того, что такая же геометрическая структура имеет место в случае класса  $\mathbb{C}^1$ , можно использовать видоизмененную краевую задачу, представленную в разделе 5.2.

Нужно заметить, что лемма 3.6 может не выполняться без предварительного приведения отображения  $T$  к специальному виду, где функции  $f$  и  $g$  удовлетворяют условиям (3.9.4). Покажем это на следующем примере.

Рассмотрим трехмерное отображение  $T_0$  следующего вида:

$$\bar{x} = \lambda x, \quad \bar{u} = \lambda_2 u + xy, \quad \bar{y} = \gamma y,$$

где  $0 < \lambda_2 < \lambda < 1 < \gamma$ . Здесь  $O(0, 0, 0)$  — седловая неподвижная точка. Уравнение двумерного устойчивого инвариантного многообразия  $W^s$  имеет вид  $y = 0$ , а уравнение одномерного неустойчивого инвариантного многообразия  $W^u$  задается как  $x = u = 0$ . Уравнение неведущего устойчивого инвариантного многообразия  $W^{ss} \in W^s$  имеет вид  $y = x = 0$ .

Краевую задачу для отображения  $T_0$  можно сформулировать следующим образом: *При заданных исходных данных  $(x_0, u_0, y_k)$  и данном  $k$  найти такое  $(x_k, u_k, y_0)$ , чтобы  $T_0^k(x_0, u_0, y_0) = (x_k, u_k, y_k)$ .*

Систему уравнений можно представить в виде

$$\begin{aligned} x_j &= \lambda^j x_0, \\ u_j &= \lambda_2^j u_0 + \sum_{s=0}^{j-1} \lambda_2^{j-s-1} \cdot \lambda^s x_0 \cdot \gamma^{s-k} y_k, \\ y_j &= \gamma^{j-k} y_k, \\ (j &= 0, 1, \dots, k). \end{aligned} \quad (3.9.7)$$

Из (3.9.7) видно, что  $x_k = \lambda^k x_0$ , а  $y_0 = \gamma^{-k} y_k$ . Однако

$$\begin{aligned} u_k &= \lambda_2^k u_0 + \sum_{s=0}^{k-1} \lambda_2^{k-s-1} \cdot \lambda^s x_0 \cdot \gamma^{s-k} y_k \\ &= \lambda_2^k u_0 + \lambda_2^{k-1} \gamma^{-k} x_0 y_k \sum_{s=0}^{k-1} \left( \frac{\lambda \gamma}{\lambda_2} \right)^s. \end{aligned}$$

Поскольку

$$\delta = \frac{\lambda \gamma}{\lambda_2} > 1,$$

то

$$\sum_{s=0}^{k-1} \left( \frac{\lambda \gamma}{\lambda_2} \right)^s = \frac{\delta^k - 1}{\delta - 1} \sim \frac{\lambda^{k-1}}{\lambda_2^{k-1}} \gamma^{k-1}.$$

Очевидно, если  $x_0 y_k \neq 0$ , то  $u_k \sim \lambda^k$  при достаточно большом значении  $k$ . Таким образом, хотя  $\lambda_2 < \lambda$ , скорости схождения по ведущим и неведущим координатам одинаковы, в противоположность утверждению леммы 3.6.

### 3.10. Нормальные координаты в окрестности периодической траектории

В следующих разделах особое внимание уделяется подходу к исследованию периодических траекторий, основанному на приведении к системе неавтономных периодических уравнений, размерность которых на единицу меньше размерности исходной системы. Также рассматривается задача

построения отображения Пуанкаре и нахождения мультипликаторов периодической траектории.

Рассмотрим  $(n+1)$ -мерную  $\mathbb{C}^r$ -гладкую ( $r \geq 1$ ) систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = X(x), \quad (3.10.1)$$

имеющую периодическую траекторию  $L : x = \varphi(t)$  с периодом  $\tau$ .

**Теорема 3.11.** *Существуют такое  $\mathbb{C}^r$ -гладкое преобразование координат и замена времени, что в малой окрестности периодической траектории  $L$  система принимает вид*

$$\begin{aligned} \dot{y} &= A(\theta)y + F(\theta, y), \\ \dot{\theta} &= 1, \end{aligned} \quad (3.10.2)$$

где  $y \in \mathbb{R}^n$ ,  $\theta \in \mathbb{S}^1$ . Здесь  $A(\theta)$  — некоторая  $\mathbb{C}^r$ -гладкая периодическая, периода  $\tau$ ,  $(n \times n)$ -матрица. Кроме того,  $\mathbb{C}^r$ -гладкая функция  $F$  также периодическая по  $\theta$  с тем же периодом  $\tau$ , и

$$F(\theta, 0) = 0, \quad F'_\theta(\theta, 0) = 0. \quad (3.10.3)$$

**Замечание.** Изменение масштаба (замена) времени эквивалентно умножению правой части системы на скалярную функцию. Таким образом, если не делать замену времени, то система, записанная в нормальных координатах, будет иметь вид

$$\begin{aligned} \dot{y} &= A(\theta)y + \tilde{F}(\theta, y), \\ \dot{\theta} &= 1 + b(\theta, y), \end{aligned} \quad (3.10.4)$$

где

$$\tilde{F}(\theta, 0) = 0, \quad \tilde{F}'_y(\theta, 0) = 0, \quad b(\theta, 0) = 0.$$

Доказательство теоремы. Исходную систему можно привести к виду (3.10.2) следующим образом. В каждой точке  $M_\theta(x = \varphi(\theta))$  выбираем  $(n+1)$  линейно независимых векторов  $(N_0(\theta), N_1(\theta), \dots, N_n(\theta))$ , где  $(N_0(\theta) \equiv \varphi'(\theta) = X(\varphi(\theta)))$  представляет собой вектор скорости, направленный по касательной к периодической траектории  $L$  в точке  $M_\theta$ . Пусть  $N_i(\theta)$  ( $i = 1, \dots, n$ ) — некоторые гладкие функции от  $\theta$ , и  $\mathcal{M}_\theta$  — линейная оболочка векторов  $(N_1(\theta), \dots, N_n(\theta))$ , то есть пространство  $\mathcal{M}_\theta$  трансверсально к  $L$ .



Непосредственно из (3.10.7) вытекает, что  $\dot{\theta} = 1$  и  $\dot{y} = 0$  в точке  $y = 0$ . Таким образом, система (3.10.1) принимает вид (3.10.4).

Приведение системы к виду (3.10.2) можно осуществить путем следующей замены переменной времени:

$$dt = \frac{d\tilde{t}}{1 + b(\theta, y)}. \quad (3.10.8)$$

В приведенном выше доказательстве не рассматривается метод построения семейства достаточно гладких векторов  $(N_1(\theta), \dots, N_n(\theta))$ , которые вместе с вектором  $(N_0(\theta))$  образуют линейно независимую систему. Вместо описания этого алгоритма мы даем другое доказательство, в основу которого положен используемый далее подход.

Рассмотрим некоторую малую секущую  $S$  к  $L$ . Пусть  $y = (y_1, \dots, y_n)$  — это некоторые координаты на  $S$ . Пусть  $\mathcal{X}(x, t)$  — сдвиг на время  $t$  точки  $x$  вдоль соответствующей траектории системы (3.10.1). Каждой точке  $x$  из малой окрестности траектории  $L$  будет соответствовать единственное значение  $t(x) \geq 0$  такое, что точка  $y = X(-\tau(x), x)$  будет первой точкой пересечения с секущей  $S$  отрицательной полутраектории точки  $x$ . По определению,  $\tau(x) \leq \bar{\tau}(y)$ , где  $\bar{\tau}(y)$  — время возвращения Пуанкаре. Можно изменить масштаб времени таким образом, что время возвращения будет константой для всех малых  $y$ :  $\bar{\tau}(y) \equiv \tau$ . Для этого введем новое время  $t$  по формуле

$$d\tilde{t} = \left( 1 + \alpha(y)\xi \left( \frac{t(x)}{\bar{t}(y)} \right) \right) dt, \quad (3.10.9)$$

где  $y = \mathcal{X}(-\tau(x), x)$  будет одно и то же на всем отрезке траектории точки  $x$  между двумя последовательными пересечениями с  $S$ . В момент пересечения  $x$  с  $S$  координата  $y$  меняется скачком. Чтобы преобразование (3.10.9) стало непрерывным, функцию  $\xi$  выберем так, что она тождественно равна нулю при значении ее аргумента, близком к 0 или 1 (это соответствует тому, что  $t(x)$  близко к 0 или к  $\bar{\tau}(y)$ , то есть близко к моментам пересечения траектории точки  $x$  с  $S$ ). Кроме того, функция  $\xi$  должна быть гладкой и отличной от нуля. Существование таких функций  $\xi$  — стандартный факт.

Более того, можно потребовать, что  $\int_0^1 \xi(s) ds = 1$ .

Таким образом, мы будем иметь гладкое преобразование времени, если,

конечно,  $\alpha$  достаточно мало. Новое время возвращения находится как

$$\int_0^{\bar{t}(y)} \frac{d\tilde{t}}{dt} dt = \bar{t}(y) + \alpha(y) \int_0^{\bar{t}(y)} \xi \left( \frac{t}{\bar{t}(y)} \right) dt = \bar{t}(y)(1 + \alpha(y)). \quad (3.10.10)$$

Следовательно, если положить  $\alpha(y) = \frac{Y}{\bar{\tau}(y)} - 1$ , то новое время возвращения будет действительно константой. Заметим, что  $\bar{t}(y)$  близко к  $\tau$  при малых  $y$ , откуда вытекает, что  $\alpha(y)$  также мало, и поэтому множитель в (3.10.9) ненулевой. Таким образом, формула (3.10.9) дает действительно хорошее перемасштабирование времени.

Пусть

$$\bar{y} = By + F_0(y), \quad (3.10.11)$$

есть отображение Пуанкаре  $T : S \rightarrow S$ , где  $F_0(0) = 0$  и  $F'_0(0) = 0$ . По определению

$$T(y) = \mathcal{X}(\tau, y). \quad (3.10.12)$$

Как мы отмечали раньше, произведение собственных значений матрицы  $B$  (что то же самое, что и произведение мультипликаторов траектории  $L$ ) положительно. Поэтому можно доказать, что существует такое семейство невырожденных матриц  $\tilde{A}(\theta)$  ( $0 \leq \theta \leq T$ ), что  $\tilde{A}(0) = I$ ,  $\tilde{A}(T) = B$ ,  $\tilde{A}'(0) = \tilde{A}'(T) = 0$ , и  $\tilde{A}(\theta) \mathbb{C}^{r+1}$ -гладко зависит от  $\theta$  (мы оставляем этот вполне стандартный факт без доказательства).

Рассмотрим семейство диффеоморфизмов  $Y_\theta : y_0 \mapsto y_\theta$  ( $0 \leq \theta \leq T$ )

$$y_\theta = \tilde{A}(\theta)y_0 + \eta(\theta)F_0(y_0), \quad (3.10.13)$$

где  $\eta(\theta)$  — некоторая  $\mathbb{C}^{r+1}$ -гладкая скалярная функция, которая тождественно равна нулю в малой окрестности точки  $\theta = 0$  и тождественно равна 1 в малой окрестности точки  $\theta = \tau$  (откуда вытекает также, что  $\eta'(0) \equiv 0$  при  $\theta$ , близких к 0 и  $\tau$ ). Положим также, что  $\tilde{A}'(\theta) = 0$  при  $\theta$ , близких к 0 и  $\tau$ . Таким образом,  $Y_\theta$  есть тождественное отображение при всех  $\theta$  близких к нулю и оно совпадает с отображением Пуанкаре  $T$  при всех  $\theta$  близких к  $\tau$ .

Так как  $F'_0(0) = 0$  и матрица  $\tilde{A}(\theta)$  невырождена при всех  $\theta$ , отображение (3.10.13) обратимо, то есть

$$y_0 = \tilde{A}^{-1}(\theta)y_\theta + F_1(\theta, y_\theta), \quad (3.10.14)$$

где  $F_1(0, 0) = 0$ ,  $F'_{1y}(\theta, 0) = 0$  и  $F'_{1y} \equiv 0$  при всех  $\theta$ , близких к 0 и  $\tau$ .

Проведем замену координат  $(\theta, y_1, \dots, y_n) \rightarrow (x_1, \dots, x_{n+1})$  согласно следующему правилу:

$$x = \mathcal{X}(\theta, Y_\theta^{-1}(y)). \quad (3.10.15)$$

Другими словами, отождествим время сдвига  $\theta$  точки  $y_0 \in S$  по траекториям системы (3.10.1) и время сдвига  $\theta$  точки  $y_0$ , задаваемого формулой (3.10.13). При  $\theta$  близком к 0 уравнение (3.10.15) принимает вид

$$x = \mathcal{X}(\theta, y), \quad (3.10.16)$$

а при значении  $\theta$ , близком к  $\tau$ , — вид

$$x = \mathcal{X}(\theta, T^{-1}(y)). \quad (3.10.17)$$

По определению (3.10.12), формула (3.10.17) совпадает с

$$x = \mathcal{X}(\theta - \tau, y).$$

Сравнивая последнее выражение с (3.10.16), получаем, что  $\mathbb{C}^r$ -гладкое преобразование координат (3.10.15) является  $\tau$ -периодическим.

Закон эволюции новых координат  $y$  задается уравнением (3.10.13), где  $\theta = 1$ . Из (3.10.14) находим

$$\begin{aligned} \dot{y} &= \tilde{A}'(\theta)y_0 + \eta'(\theta)F_0(y_0) \\ &= \tilde{A}'(\theta)\tilde{A}(\theta)^{-1}y + \tilde{A}'(\theta)F_1(\theta, y) + \eta'(\theta)F_0(\tilde{A}(\theta)^{-1}y + F_1(\theta, y)). \end{aligned} \quad (3.10.18)$$

При введении обозначений

$$A(\theta) = \tilde{A}'(\theta)A(\theta)^{-1} \quad (3.10.19)$$

$$F(\theta, y) = \tilde{A}'(\theta)F_1(\theta, y) + \eta'(\theta)F_0(\tilde{A}(\theta)^{-1}y + F_1(\theta, y)) \quad (3.10.20)$$

доказательство можно считать завершенным.

Координаты, в которых представление (3.10.2) верно, называются *нормальными координатами*. В нормальных координатах  $y = 0$  соответствует уравнению периодической траектории  $L$ . Фаза  $\theta$  параметризует точки на  $L$ . Заметим, что нормальные координаты не единственны: разные базисы  $N_i(\theta)$  ( $i = 0, \dots, n$ ) дают разные преобразования координат. Тем не менее, преимущество данного построения состоит в том, что оно увеличивает гладкость системы по нормальным координатам. Именно, справедливо следующее утверждение:

**Лемма 3.7.** *Все производные по  $y$  от правых частей системы (3.10.2) являются при  $y = 0$   $\mathbb{C}^r$ -гладкими по  $\theta$ .*

Доказательство. Непосредственно из (3.10.13) видно, что все производные  $\frac{d^k y_0}{d\theta^k} \Big|_{y_0=0}$  ( $k = 1, \dots, r$ ) являются  $\mathbb{C}^r + 1$ -гладкими по  $\theta$ . Согласно (3.10.13), это означает, что все производные функции  $F_1$  по  $y_\theta$  в точке  $y_\theta = 0$  также являются  $\mathbb{C}^r + 1$ -гладкими по  $\theta$ . Таким образом, лемма следует из (3.10.20).

Заметим, что наша конструкция не работает, когда система аналитическая (функции  $\xi, \eta$  не могут быть аналитическими, поскольку они тождественно равны нулю на некоторых интервалах). Чтобы допустить аналитический случай, можно сначала сделать  $\mathbb{C}^\infty$ -гладкое преобразование координат по формуле (3.10.15), затем, в соответствии с (3.10.15), выбрать  $\mathbb{C}^\infty$ -вектора  $\tilde{N}_i(\theta)$  в качестве образов базисных векторов в пространстве  $y$ . Поскольку система векторов  $\{\tilde{N}_0(\theta), \tilde{N}_1(\theta), \dots, \tilde{N}_n(\theta)\}$  является линейно независимой, то для достаточно близкого аналитического приближения  $(N_1(\theta), \dots, N_n(\theta))$  условие линейной независимости не будет нарушаться. Теперь, после того как мы нашли линейно независимую систему векторов  $\{\tilde{N}_0(\theta), \tilde{N}_1(\theta), \dots, \tilde{N}_n(\theta)\}$ , аналитически зависящих от  $\theta$ , искомое преобразование координат определяется согласно формулам (3.10.6) и (3.10.8).

Заметим, что зная решение  $L : \{x = \varphi(t)\}$  в явном виде, можно найти систему нормальных векторов  $(N_1(\theta), \dots, N_n(\theta))$  и, следовательно, найти преобразование координат, с помощью которого правые части системы (3.10.2) находятся также в явном виде.

Форма (3.10.2) весьма удобна, так как каждая плоскость  $\theta = \text{const}$  является секущей, а время возвращения любой точки на этой секущей всегда постоянно и равно  $\tau$ . Выберем плоскость  $S : \theta = 0$  в качестве такой секущей и определим отображение Пуанкаре  $S \mapsto S$ . Для траекторий, стартовых с  $S$ , имеем  $\theta = t$ , в соответствии со вторым уравнением системы (3.10.2), и следовательно, задача сводится к интегрированию системы

$$\dot{y} = A(t)y + F(t, y). \quad (3.10.21)$$

Решение данного уравнения с начальным условием  $y_0$  можно найти в виде ряда по степеням  $y_0$  с коэффициентами, зависящими от времени, используя метод последовательных приближений. В качестве первого при-

ближения принимаем решение линеаризованной системы

$$\dot{y}^{(1)} = A(t)y^{(1)}; \quad (3.10.22)$$

$m$ -е приближение задается выражением

$$\dot{y}^{(m)} = A(t)y^{(m)} + F(t, y^{(m-1)}). \quad (3.10.23)$$

Пусть  $\Phi(t)$  — фундаментальная матрица решений системы (3.10.22), то есть решение системы (3.10.22) имеет вид

$$y^{(1)}(t) = \Phi(t)y^0.$$

Тогда решение системы (3.10.23) задается формулой

$$y^{(m)}(t) = \Phi(t) \left( y^0 + \int_0^t \Phi^{-1}(s) F(s, y^{(m-1)}(s)) ds \right), \quad (3.10.24)$$

откуда видно, что каждое последующее приближение отличается от предыдущего членами высших порядков, а именно:

$$y^{(m)}(t) - y^{(m-1)}(t) = \Phi(t) \int_0^t \Phi^{-1}(s) (F(s, y^{(m-1)}(s)) - F(s, y^{(m-2)}(s))) ds$$

и соответственно

$$\|y^{(m)} - y^{(m-1)}\| \sim \|F'\| \|y^{(m-1)} - y^{(m-2)}\| = o(\|y^{(m-1)} - y^{(m-2)}\|)$$

(так как  $F' = 0$  при  $y = 0$ ). Используя формулу (3.10.24) можно найти члены любого порядка в разложении решения системы (3.10.21) в ряд Тейлора. Полагая  $t = \tau$  (период) в результирующем разложении, получаем ряд Тейлора для отображения Пуанкаре.

Также заметим, что отображение Пуанкаре можно представить как

$$\bar{y} = \Phi(\tau)y + \Psi(y), \quad (3.10.25)$$

где функция  $\Psi(y)$  при  $y = 0$  обращается в нуль вместе с первой производной. Линейная часть отображения Пуанкаре имеет вид

$$\bar{y} = \Phi(\tau)y.$$

откуда получаем, что мультипликаторы  $(\rho_1, \dots, \rho_n)$  периодической траектории  $L$  находятся как собственные значения матрицы  $\Phi(\tau)$ . Таким образом, когда известны периодическое решение  $\{x = \varphi(t)\}$  и фундаментальная матрица  $\Phi(t)$  линейной системы

$$\dot{y} = A(t)y, \quad (3.10.26)$$

то существует стандартная процедура построения отображения Пуанкаре и нахождения мультипликаторов периодической траектории.

### 3.11. Уравнения в вариациях

Задача об устойчивости периодической траектории по существу не отличается от соответствующей задачи для положений равновесия. В обоих случаях условия устойчивости определяются уравнениями для первого приближения, то есть соответствующей линеаризованной системой для положения равновесия или так называемым уравнением в вариациях для периодической траектории.

Пусть  $x = \varphi(t)$  — периодическое решение периода  $\tau$  для  $(n+1)$ -мерной автономной системы

$$\dot{x} = X(x). \quad (3.11.1)$$

Введем новые координаты  $\xi$  так, что

$$x = \xi + \varphi(t).$$

Система (3.11.1) в координатах  $\xi$  принимает следующий вид:

$$\dot{\xi} = D(t)\xi + \dots,$$

где

$$D(t) = \left. \frac{\partial X}{\partial x} \right|_{x=\varphi(t)}$$

а через многоточие обозначены члены по  $\xi$  более высокого порядка. Заметим, что такая замена переменных приводит  $(n+1)$ -мерную автономную систему к  $(n+1)$ -мерной неавтономной системе.

Линейная периодическая система

$$\dot{\xi} = D(t)\xi \quad (3.11.2)$$

называется *уравнением в вариациях*. Очевидно, если  $\xi(t)$  является решением системы (3.11.2), то  $\xi(t + \tau)$  также будет решением. Действительно, после сдвига по времени  $t \rightarrow t + \tau$ , получаем

$$\frac{d\xi(t + \tau)}{d(t + \tau)} = D(t + \tau)\xi(t + \tau),$$

и, следовательно,

$$\frac{d\xi(t + \tau)}{dt} = D(t)\xi(t + \tau).$$

Общее решение системы (3.11.2) есть

$$\xi(t) = \Psi(t)\xi(0) \quad (3.11.3)$$

где  $\Psi(t)$  — *фундаментальная матрица*, столбцы  $\Psi^{(i)}(t + \tau)$  ( $i = 1, \dots, n + 1$ ), которой являются решениями системы (3.11.2), которые в момент времени  $t = 0$  представляют собой базисные вектора. Поскольку  $\Psi^{(i)}(t + \tau)$  также является решением, из формулы (3.11.3) вытекает, что  $\Psi^{(i)}(t + \tau) = \Psi(t)\Psi^{(i)}(\tau)$ , или

$$\Psi(t + \tau) = \Psi(t)\Psi(\tau). \quad (3.11.4)$$

Уравнение

$$|\Psi(\tau) - \rho I| = 0 \quad (3.11.5)$$

называется *характеристическим уравнением*. Корни  $(\rho_1, \dots, \rho_{n+1})$  уравнения (3.11.5) называются *характеристическими корнями* или *мультипликаторами Флоке*.

Характеристическое уравнение инвариантно относительно любой замены координат вида

$$\eta = Q(t)\xi, \quad (3.11.6)$$

где матрица  $Q(t)$  невырождена при всех  $t$ , гладко зависит от  $t$  и периодическая с периодом  $\tau$ . Действительно, после такой замены система (3.11.2) остается линейной и периодической. Обозначим ее фундаментальную матрицу через  $\tilde{\Psi}(t)$ ; тогда общее решение можно записать в виде  $\eta(t) = \tilde{\Psi}(t)\eta(0)$ . В силу (3.11.3) и (3.11.6),  $\tilde{\Psi}(t) = Q(t)\Psi(t)Q(0)^{-1}$ . Тогда, поскольку матрица  $Q(t)$  периодична с периодом  $\tau$ , матрицы  $\tilde{\Psi}(\tau)$  и  $\Psi(\tau)$  эквивалентны:

$$\tilde{\Psi}(\tau) = Q(0)\Psi(\tau)Q(0)^{-1}.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} |\tilde{\Psi}(\tau) - \rho I| &= |Q(0)\Psi(\tau)Q(0)^{-1} - \rho I| = \\ &= |Q(0)(\Psi(\tau) - \rho I)Q(0)^{-1}| = |\Psi(\tau) - \rho I|. \end{aligned}$$

Значит, утверждение верно.

Из этого вытекает, что *мультипликаторы Флоке периодической траектории не зависят от выбора координат  $x$* . Действительно, пусть  $y = h(x)$  — некоторый диффеоморфизм, переводящий систему (3.11.1) в  $\dot{y} = Y(y)$  в некоторой малой окрестности периодической траектории  $L$ . В новых координатах уравнение траектории  $L$  имеет вид  $y = h(\varphi(t)) = \psi(t)$ . Уравнение в вариациях для  $\psi(t)$ , которое теперь задается выражением

$$\dot{\eta} = \left. \frac{\partial Y}{\partial y} \right|_{y=\psi(t)} \eta,$$

получается из (3.11.2) путем замены переменных (3.11.6), где  $Q(t) = h'(\varphi(t))$ . Таким образом, характеристическое уравнение и характеристические корни действительно не меняются.

В частности, если система имеет вид (3.10.4), то в нормальных координатах ее линеаризация в окрестности периодического решения ( $y = 0$ ,  $\theta = t \bmod \tau$ ) приводит к следующему уравнению в вариациях:

$$\dot{\xi} = \begin{pmatrix} A(t) & 0 \\ b'_y(t, 0) & 0 \end{pmatrix} \xi.$$

Легко убедиться в том, что фундаментальная матрица данной системы имеет вид

$$\begin{pmatrix} \Phi(t) & 0 \\ \beta(t) & 1 \end{pmatrix},$$

где  $\Phi(t)$  есть фундаментальная матрица системы

$$\dot{\eta} = A(t)\eta$$

с  $\Phi(0) = I$ . Следовательно, характеристическое уравнение можно представить в виде

$$|\Phi(\tau) - \rho I|(\rho - 1) = 0.$$

С другой стороны, мы показали в предыдущем разделе, что мультипликаторы отображения Пуанкаре в окрестности траектории  $L$  являются корнями уравнения  $|\Phi(\tau) - \rho I| = 0$ . Поэтому мультипликаторы Флоке  $(\rho_1, \dots, \rho_n)$  совпадают с мультипликаторами неподвижной точки отображения Пуанкаре, а последний мультипликатор Флоке  $\rho_{n+1}$  всегда тривиален:  $\rho_{n+1} = 1$ .

Существование тривиального характеристического корня свойственно вариационным уравнениям вблизи периодической траектории автономной системы. Поскольку  $x = \varphi(t)$  является решением, то есть так как

$$\dot{\varphi}(t) = X(\varphi(t)),$$

то путем дифференцирования по  $t$  получаем уравнение

$$\frac{d\dot{\varphi}(t)}{dt} = \frac{\partial X(\varphi(t))}{\partial x} \dot{\varphi}(t).$$

То есть,  $\xi(t) = \dot{\varphi}(t)$  является решением вариационного уравнения (3.11.2). Тогда, в силу (3.11.3),  $\dot{\varphi}(t) = \Psi(t)\dot{\varphi}(0)$ . Поскольку функция  $\varphi(t)$  периодическая с периодом  $\tau$ , то  $\dot{\varphi}(0) = \Psi(\tau)\dot{\varphi}(0)$ . Это означает, что вектор  $\dot{\varphi}(0)$  всегда является собственным вектором матрицы  $\Psi(\tau)$ , а соответствующий характеристический корень  $(\rho_{n+1})$  всегда равен 1. Этот результат впервые получил Пуанкаре.

Введем следующие величины:

$$\lambda_k = \frac{\ln \rho_k}{\tau} = \frac{1}{\tau} [\ln |\rho_k| + i(\arg \rho_k + 2\pi m_k)], \quad (3.11.7)$$

$$k = 1, \dots, n+1$$

которые называются *характеристическими показателями*. Заметим, что, согласно (3.11.7),  $\lambda_k$  определяется по модулю  $i2\pi m_k/\tau$ , где  $m_k$  — целое. Однако величины  $(\operatorname{Re} \lambda_1, \dots, \operatorname{Re} \lambda_n)$  определены однозначно. Их называют *показателями Ляпунова* периодической траектории  $x = \varphi(t)$ .

Эти величины имеют смысл для любой линейной периодической системы типа (3.11.2). Напомним, что в случае, когда уравнение в вариациях получается из автономной системы, всегда есть тривиальный характеристический корень, следовательно, в данном случае один из показателей Ляпунова всегда равен нулю.

Столбцы фундаментальной матрицы удовлетворяют системе уравнений

(3.11.2), то есть  $\frac{d}{dt}\Psi(t) = D(t)\Psi(t)$ . Таким образом,

$$\frac{d}{dt} \det \Psi(t) = \operatorname{tr} D(t) \cdot \det \Psi(t)$$

откуда получаем *формулу Вронского*

$$\det \Psi(t) = e^{\int_0^t \operatorname{tr} D(s) ds}.$$

При  $t = \tau$  имеем

$$\rho_1 \rho_2 \cdots \rho_{n+1} = e^{\int_0^\tau \operatorname{tr} D(s) ds}, \quad (3.11.8)$$

где  $(\rho_1, \dots, \rho_{n+1})$  — характеристические корни. Очевидно, что все  $\rho_1, \dots, \rho_{n+1}$  ненулевые и матрица  $\Psi(\tau)$  невырождена.

В случае, когда линейная система (3.11.2) получена из автономной системы (3.11.1), данная формула принимает вид

$$\rho_1 \rho_2 \cdots \rho_n = e^{\int_0^\tau \operatorname{div} X|_{x=\varphi(s)} ds}, \quad (3.11.9)$$

или

$$\lambda_1 + \dots + \lambda_n = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \operatorname{div} X|_{x=\varphi(s)} ds. \quad (3.11.10)$$

Заметим, что в общем случае нельзя в явном виде найти фундаментальную матрицу уравнения в вариациях или ее характеристические корни. Исключение составляет разве что только двумерный случай. В этом случае формула (3.11.10) позволяет найти единственный ненулевой показатель Ляпунова:

$$\lambda = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \left[ \frac{\partial X_1(\varphi_1(t), \varphi_2(t))}{\partial x_1} + \frac{\partial X_2(\varphi_1(t), \varphi_2(t))}{\partial x_2} \right] dt.$$

Пусть  $\xi^{(k)}(0)$  — собственный вектор матрицы  $\Psi(\tau)$ , соответствующий мультипликатору  $\rho_k$ . Решение, с начальным условием  $\xi^{(k)}(0)$ , имеет вид  $\xi^{(k)}(t) = \Psi(t)\xi^{(k)}(0)$ . Поскольку  $\Psi(\tau)\xi^{(k)}(0) = \rho_k \xi^{(k)}(0)$ , из (3.11.4) вытекает, что

$$\xi^{(k)}(t + \tau) = \rho_k \xi^{(k)}(t)$$



для всех  $t$ . Таким образом, функция

$$\phi_k(t) = e^{-\lambda_k t} \xi^{(k)}(t)$$

является периодической с периодом  $\tau$ : поскольку  $e^{\lambda_k \tau = \rho_k}$ , то

$$\phi_k(t + \tau) = e^{-\lambda_k(t+\tau)} \xi^{(k)}(t + \tau) = e^{-\lambda_k t} e^{-\lambda_k \tau} \rho_k \xi^{(k)}(t) = \phi_k(t).$$

Следовательно,

$$\xi^{(k)}(t) = \phi_k(t) e^{\lambda_k t}, \quad (3.11.11)$$

где  $\phi_k(t)$  — периодическая функция.

Справедливо также и более общее утверждение, известное как *теорема Флоке* [24]: фундаментальная матрица  $\Psi$  линейной периодической по времени системы удовлетворяет соотношению

$$\Psi(t) = \Phi(t) e^{\Lambda t} \quad (3.11.12)$$

где  $\Phi(t)$  — периодическая матрица с периодом  $\tau$ , а  $\Lambda$  — постоянная матрица, собственные значения которой суть характеристические показатели  $(\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1})$ .

Для доказательства заметим, что в силу (3.11.4) матрица  $\Phi(t) = \Psi(t) e^{-\Lambda t}$  будет  $\tau$ -периодической, если

$$\Psi(\tau) = e^{\Lambda \tau}, \quad (3.11.13)$$

то есть, если  $\tau \Lambda$  является логарифмом матрицы  $\Psi(\tau)$ . Существование логарифма невырожденной матрицы — хорошо известный факт. Например, если все характеристические корни  $(\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{n+1})$  различные, то матрица  $\Phi(t)$  эквивалентна диагональной матрице

$$\Psi(\tau) = P \begin{pmatrix} \rho_1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \rho_{n+1} \end{pmatrix} P^{-1},$$

а матрица  $\Lambda$  есть просто

$$\Lambda = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \lambda_{n+1} \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Непосредственно из (3.11.12) вытекает, что периодическая замена переменных  $\xi = \Phi(t)y$  приводит систему (3.11.2) к автономной форме

$$\dot{y} = \Lambda y.$$

Заметим, что уравнение (3.11.13) определяет, вообще говоря, комплекснозначную матрицу  $\Lambda$ , даже когда матрица  $\Psi(\tau)$  вещественна. Таким образом, матрица  $\Phi(t)$  комплексная, а значит, вещественное  $\tau$ -периодическое преобразование, приводящее систему к автономной форме, не всегда существует. Тем не менее, имеет место следующая теорема.

**Теорема 3.12 (Ляпунов).** *Существует замена переменных вида  $\xi = \tilde{\Phi}(t)y$ , где  $\tilde{\Phi}(t)$  — действительная периодическая матрица с периодом  $2\tau$ , приводящая систему (3.11.3) к виду*

$$\dot{y} = \tilde{\Lambda} y,$$

где  $\tilde{\Lambda}$  — действительная матрица с постоянными коэффициентами, собственные значения которой удовлетворяют условию  $e^{2\tau \lambda_k} = \rho_k^2$ .

Видно, что  $\operatorname{Re} \tilde{\lambda}_k = \operatorname{Re} \lambda_k$ , где  $\lambda_k$  — характеристические показатели системы (3.11.2). Таким образом,

- Если все показатели Ляпунова отрицательны, то решение  $\xi = 0$  линейной системы (3.11.2) является экспоненциально устойчивым при  $t \rightarrow +\infty$ ;
- Если существует по крайней мере один положительный показатель Ляпунова, то нулевое решение является неустойчивым.

Чтобы доказать теорему Ляпунова, обозначаем через  $U$  собственное пространство матрицы  $\Psi(\tau)$ , соответствующее всем действительным отрицательным корням  $\rho_k$ , а через  $V$  — собственное подпространство, соответствующее другим собственным значениям матрицы  $\Psi(\tau)$ . Таким образом,  $\xi = (u, v)$ , где  $u \in U$ ,  $v \in V$ . Если сделать линейное преобразование

$$\sigma : (u, v) \mapsto (-u, v), \quad (3.11.14)$$

то матрица  $\tilde{A} = \sigma \Psi(\tau) = \Psi(\tau) \sigma$  не будет иметь действительных отрицательных собственных значений. По построению, ее собственные значения

$\tilde{\rho}_k$  удовлетворяют соотношению  $\tilde{\rho}_k^2 = \rho_k^2$ . Матрица  $\tilde{A}$  эквивалентна матрице, записанной в вещественной жордановой форме:

$$\tilde{A} = P(A^\circ + \Delta A)P^{-1},$$

где

$$A_{kk}^\circ = \tilde{\rho}_k, \quad \text{если корень } \tilde{\rho}_k \text{ вещественный}$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} A_{kk}^\circ & A_{k,k+1}^\circ \\ A_{k+1,k}^\circ & A_{k+1,k+1}^\circ \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} re^{i\phi} & 0 \\ 0 & re^{-i\phi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} r \cos \phi & -r \sin \phi \\ r \sin \phi & r \cos \phi \end{pmatrix}, \text{ если } (\tilde{\rho}_k = re^{i\phi}, \tilde{\rho}_{k+1} = re^{-i\phi}), \end{aligned} \quad (3.11.15)$$

Остальные элементы матрицы  $A^\circ$  равны нулю; ненулевыми элементами матрицы  $\Delta A$  могут быть лишь

$$(\Delta A)_{k,k+1} = 1, \quad \text{если } \tilde{\rho}_k = \tilde{\rho}_{k+1} \text{ — вещественные кратные собственные значения.}$$

и

$$(\Delta A)_{k,k+2} = 1, \quad \text{если } \tilde{\rho}_k = \tilde{\rho}_{k+2} \text{ — комплексные кратные собственные значения.} \quad (3.11.16)$$

Можно проверить, что *вещественный* логарифм матрицы  $\tilde{A}$  определяется следующей формулой:

$$\begin{aligned} \ln \tilde{A} &= P \ln(A^\circ + \Delta A)P^{-1} = P[\ln A^\circ + \ln(I + (A^\circ)^{-1}\Delta A)]P^{-1} \\ &= P \left[ \ln A^\circ + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s} (A^\circ)^{-s} (\Delta A)^s \right] P^{-1}, \end{aligned} \quad (3.11.17)$$

где

$$(\ln A^\circ)_{kk} = \ln \tilde{\rho}_k, \quad \text{если корень } \tilde{\rho}_k \text{ вещественный,}$$

$$\begin{pmatrix} (\ln A^\circ)_{kk} & (\ln A^\circ)_{k,k+1} \\ (\ln A^\circ)_{k+1,k} & (\ln A^\circ)_{k+1,k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ln r & -\phi \\ \phi & \ln r \end{pmatrix}, \quad \text{если } \tilde{\rho}_k = \tilde{\rho}_{k+1}^* = re^{i\phi}. \quad (3.11.18)$$

Поскольку по построению вещественные корни  $\tilde{\rho}_k$  являются положительными, из формулы (3.11.18) получаем вещественнозначную матрицу  $\ln A^\circ$ ; матрица  $(A^\circ)^{-1}$  существует, так как на основании (3.11.8), все корни  $\rho_k$  отличны от нуля; ряд в формуле (3.11.17) сходится потому, что  $(\Delta A)^s \equiv 0$  при достаточно большом  $s$ . Разложение в ряд для  $\ln(A^\circ + \Delta A)$  в (3.11.17) представляет собой нахождение тейлоровского разложения для скалярного логарифма: здесь имеет место «скалярная арифметика», поскольку матрицы  $\ln A^\circ$ ,  $A^\circ$  и  $\Delta A$  коммутируют, то есть  $A^\circ \cdot \ln A^\circ = \ln A^\circ \cdot A^\circ$ ,  $A^\circ \cdot \Delta A = \Delta A \cdot A^\circ$ ,  $\Delta A \cdot \ln A^\circ = \ln A^\circ \cdot \Delta A$  (см (3.11.15), (3.11.16), (3.11.18)).

Теперь возьмем

$$\tilde{\Lambda} = \frac{1}{\tau} \ln \tilde{A},$$

таким образом,

$$\Psi(\tau) = \sigma e^{\tilde{\Lambda}\tau}.$$

Следовательно, матрица  $\tilde{\Phi}(t) = \Psi(t)e^{-\tilde{\Lambda}t}$  удовлетворяет уравнению

$$\tilde{\Phi}(t + \tau) = \tilde{\Phi}(t)\sigma \quad (3.11.19)$$

(см (3.11.4)). В частности, матрица  $\tilde{\Phi}(t)$  является  $2\tau$ -периодической. По построению, общее решение (3.11.3) системы (3.11.2) записывается как

$$\xi(t) = \tilde{\Phi}(t)e^{\tilde{\Lambda}t}\xi(0)$$

откуда вытекает, что преобразование  $y = \tilde{\Phi}(t)^{-1}$  действительно приводит систему к линейной автономной форме.

**Замечание.** Из (3.11.19) вытекает, что если нет вещественных отрицательных мультипликаторов Флоке, то приведение системы к вещественной автономной форме осуществляется путем периодического преобразования с периодом  $\tau$ . В случае, когда отрицательные мультипликаторы существуют, инволюция  $\sigma$  не является тождественной; в этом случае мы будем называть функции, удовлетворяющие уравнению (3.11.19),  $\tau$ -*антипериодическими*.

Теорема 3.12 выполняется для любой вещественной линейной системы с периодическими по времени коэффициентами. В частности, применяя теорему к линейной части уравнения для  $y$  либо системы (3.10.4), либо системы (3.10.2), получаем, что *можно ввести такие нормальные координаты, чтобы система вблизи периодической орбиты принимала вид*

$$\begin{aligned} \dot{y} &= \Lambda y + F(\theta, y), \\ \dot{\theta} &= 1 + b(\theta, y); \end{aligned} \quad (3.11.20)$$

или, после изменения масштаба времени,

$$\begin{aligned}\dot{y} &= \Lambda y + F(\theta, y), \\ \dot{\theta} &= 1.\end{aligned}\tag{3.11.21}$$

Правые части данной системы удовлетворяют следующим условиям  $\tau$ -(анти)периодичности:

$$\begin{aligned}F(\theta + \tau, \sigma y) &= \sigma F(\theta, y), \\ b(\theta + \tau, \sigma y) &= b(\theta, y),\end{aligned}\tag{3.11.22}$$

где  $\sigma$  суть инволюция (3.11.14), меняющая знак некоторых переменных  $y$  — тех, которые отвечают вещественным отрицательным мультипликаторам.

### 3.12. Устойчивость периодических траекторий. Периодические траектории седлового типа

Хорошо известно, что Ляпунов решил задачу устойчивости периодической траектории в случае системы вида

$$\dot{x} = F(x, t),\tag{3.12.1}$$

где  $x = (x_1, \dots, x_n)$ , а  $F$  — периодическая по времени  $t$  функция. Он дал следующее определение.

**Определение 3.2.** Решение  $x = \varphi(t)$  системы (3.12.1) называется устойчивым (по Ляпунову), если для любого заданного  $\varepsilon > 0$  существует такое  $\delta > 0$ , что если  $\|x_0 - \varphi(t_0)\| \leq \delta$ , то  $\|x(t) - \varphi(t)\| \leq \varepsilon$  для всех  $t \geq t_0$ , где  $x(t)$  представляет собой решение с начальным условием  $x_0$ .

Пусть система (3.12.1) имеет периодическое решение  $x = \varphi(t)$  с периодом  $\tau$ , который либо равен периоду функции  $F(x, t)$ , либо кратен ему. Обозначим через  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  характеристические показатели соответствующего вариационного уравнения

$$\dot{\xi} = F'_x(\varphi(t), t)\xi.$$

**Теорема 3.13 (Ляпунов).** Пусть  $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$  ( $i = 1, \dots, n$ ). Тогда решение  $x = \varphi(t)$  является устойчивым. Более того, оно экспоненциально

устойчиво, то есть любое решение с начальными условиями, близкими к  $\varphi(t_0)$  при  $t = t_0$ , экспоненциально стремится к  $\varphi(t)$  при  $t \rightarrow +\infty$ .

Ляпунов доказал эту теорему для случая, когда система (3.12.1) имеет аналитическую правую часть, хотя она справедлива и в случае, когда функция  $F$  является лишь  $\mathbb{C}^1$ -гладкой по  $x$  и непрерывной по  $t$ .

В малой окрестности решения  $x = \varphi(t)$  систему (3.12.1) можно привести к виду (см. раздел 3.11)

$$\dot{y} = \Lambda y + G(y, t),\tag{3.12.2}$$

где  $\Lambda$  — некоторая матрица с постоянными элементами, действительные части собственных значений которой являются показателями Ляпунова ( $\operatorname{Re} \lambda_1, \dots, \operatorname{Re} \lambda_n$ ). Функция  $G(y, t)$  периодическая по  $t$  с периодом  $\tau$  или  $2\tau$ . Кроме того,  $G(0, t) \equiv 0$ ,  $G'_y(0, t) \equiv 0$ . Это означает, что  $\|G'_y\|$ , при всех  $t$  и всех малых  $y$  равномерно ограничено сверху некоторой малой константой. После приведения системы (3.12.1) к виду (3.12.2), доказательство теоремы 3.13 будет повторять доказательство теоремы о существовании линеаризации вблизи устойчивого положения равновесия (теорема 2.4).

Рассмотрим теперь  $(n + 1)$ -мерную автономную систему

$$\dot{x} = X(x)\tag{3.12.3}$$

имеющую периодическое решение  $x = \varphi(t)$  периода  $\tau$ . Из раздела 3.11 известно, что один из характеристических показателей вариационного уравнения для системы (3.12.3) всегда равен нулю. Поэтому, с точки зрения устойчивости по Ляпунову, этот случай критический. Тем не менее, имеет место следующая теорема.

**Теорема 3.14 (Андронов — Витт).** Если все  $n$  нетривиальных характеристических показателей периодического решения системы (3.12.3) имеют отрицательные действительные части, то периодическое решение будет устойчивым по Ляпунову.

Эта теорема позволяет обосновать линеаризацию, но только для очень слабой формы устойчивости. Трудность заключается в следующем. Пусть  $L$  — соответствующая периодическая траектория:  $L = \{x : x = \varphi(\theta), 0 \leq \theta \leq \tau\}$ . Тогда для любых двух близких точек на траектории  $L$  соответствующие решения системы (3.12.3) не могут асимптотически сближаться при  $t \rightarrow +\infty$ . Это становится очевидным, если записать систему вблизи  $L$  в

нормальных координатах. Напомним, что в нормальных координатах  $(y, \theta)$ , где через  $\|y\|$  обозначается расстояние до  $L$ , а  $\theta \in \mathbb{S}^1$  — угловая переменная, вблизи траектории  $L$  система принимает вид (3.11.20), где  $\|F'_y\|$  равномерно ограничена сверху малой константой при всех  $t$  и малых  $y$ . Действительные части собственных значений матрицы  $\Lambda$  являются нетривиальными показателями Ляпунова траектории  $L$ . Как и в теореме Ляпунова 3.13, если все собственные значения имеют отрицательные действительные части, то

$$\|y(t)\| < \|y_0\|e^{-\lambda t} \quad (3.12.4)$$

где  $\lambda > 0$ . В то же время, поскольку  $b(\theta, 0) \equiv 0$ , мы имеем  $\dot{\theta} = 1 + O(y) = 1 + O(e^{-\lambda t})$ . Следовательно,

$$\theta(t) = \theta_0 + t + \psi(t; \theta_0, y_0) \quad (3.12.5)$$

где функция  $\psi(t)$  имеет конечный предел при  $t \rightarrow +\infty$ . Очевидно, что  $\psi$  обращается в нуль в точке  $y = 0$ . Таким образом, вблизи  $y = 0$  решения с различными значениями начальной фазы  $\theta_0$  остаются на конечном расстоянии друг от друга в любой момент времени.

В первоначальных координатах  $x$  периодическая траектория  $L$  соответствует семейству периодических решений  $x = \varphi(t + \theta_0)$ , параметризованных начальной фазой  $\theta_0$ . Полагая, что все нетривиальные характеристические показатели лежат в открытой левой полуплоскости, Ляпунов сформулировал вопрос: для каких начальных условий  $x(0) = x_0$  решение  $x(t)$  достигает  $\varphi(t + \theta_0)$  в пределе при  $t \rightarrow +\infty$ ? Он показал, что геометрическое место этих начальных точек является поверхностью  $S_{\theta_0}$ , проходящей через точку  $\varphi(\theta_0)$ . Следовательно, малая окрестность устойчивой периодической траектории  $L$  расслаивается на семейство поверхностей  $\{S_\theta : 0 \leq \theta \leq \tau\}$ , называемых *поверхностями Ляпунова*. Заметим, что в нормальных координатах уравнение поверхностей Ляпунова имеет вид  $S_{\theta_0} = \{\theta = \theta_0\}$ .

Окончательно, приходим к следующей теореме (см. формулы (3.12.4), (3.12.5))

**Теорема 3.15 (Об асимптотической фазе).** Пусть все ненулевые характеристические показатели периодической траектории  $L$  лежат слева от мнимой оси. Тогда, при достаточно малом заданном  $\varepsilon > 0$  существует такое  $\delta > 0$ , что если  $\|x_0 - \varphi(\theta_0)\| < \delta$ , то найдется такое  $\psi$ ,  $|\psi| < \varepsilon$ , что решение  $x(t)$ ,  $x(0) = x_0$  удовлетворяет неравенству

$$\|x(t) - \varphi(t + \theta_0 + \psi)\| < Ke^{-\lambda t},$$

где  $K$  и  $\lambda$  — некоторые положительные константы.

Подробное доказательство этой теоремы имеется в книге Коддингтона и Левинсона.

Другим важным понятием, предложенным Пуанкаре, является орбитальная устойчивость.

**Определение 3.3.** Периодическая траектория  $L$  будет орбитально устойчивой при  $t \rightarrow +\infty$  ( $t \rightarrow -\infty$ ), если для любого данного  $\varepsilon > 0$  существует такое  $\delta > 0$ , что любая полутраектория  $x(t)$ ,  $0 \leq t < +\infty$  ( $-\infty < t \leq 0$ ), для которой  $\|x(0) - \varphi(\theta_0)\| < \delta$  при некотором  $\theta_0$ , лежит в  $\varepsilon$ -окрестности траектории  $L$ .

Периодическая траектория  $L$  является *асимптотически орбитально устойчивой* при  $t \rightarrow +\infty$ , если

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \text{dist}(x(t), L) = 0.$$

где

$$\text{dist}(x, L) = \inf_{0 \leq \theta \leq \tau} \|x - \varphi(\theta)\|.$$

**Теорема 3.16.** Если все мультипликаторы периодической траектории  $L$  лежат внутри единичной окружности, то  $L$  — орбитально устойчива при  $t \rightarrow +\infty$  и удовлетворяет следующему неравенству:

$$\text{dist}(x(t), L) \leq Ke^{-\lambda t},$$

где  $K$  и  $\lambda$  — некоторые положительные константы.

Эта теорема вытекает непосредственно из теоремы об устойчивости неподвижной точки отображения Пуанкаре и теоремы о непрерывной зависимости решения от начальных условий (или из формулы (3.12.4)), поскольку мультипликаторы траектории  $L$  лежат внутри единичной окружности в том и только в том случае, когда нетривиальные характеристические показатели траектории  $L$  лежат слева от мнимой оси (см. раздел 3.11).

Случай, когда все мультипликаторы периодической траектории  $L$  лежат вне единичной окружности, сводится к рассмотренному выше путем обращения времени  $t \rightarrow -t$ . Все траектории в малой окрестности такой неустойчивой периодической траектории с ростом  $t$  покидают окрестность.

Время, через которое траектория покидает окрестность, зависит от положения начальной точки траектории относительно  $L$ : чем ближе располагается точка к периодической траектории, тем больше указанный промежуток времени. Такие неустойчивые периодические траектории называются *вполне неустойчивыми* или *отталкивающими*.

Рассмотрим случай, когда некоторые из мультипликаторов  $(\rho_1, \dots, \rho_k)$  траектории  $L$  лежат внутри единичной окружности, а остальные  $(\rho_{k+1}, \dots, \rho_n)$  — вне ее.

В окрестности такой периодической траектории  $L$  периода  $\tau$  система имеет вид (3.10.2). Путем деления первого уравнения системы (3.10.2) на второе, получаем неавтономную систему с периодической правой частью:

$$\frac{dy}{d\theta} = A(\theta)y + F(y, \theta), \quad (3.12.6)$$

где  $F(0, \theta) \equiv 0$ ,  $F'_y(0, \theta) \equiv 0$ . Точно также как и в разделе 3.10, мы можем проинтегрировать уравнение (3.12.6) с исходными данными  $(y^0, 0)$  и найти решение  $y = y(\theta; y^0)$ , которое будет  $C^r$ -гладким по обоим аргументам. Если положить  $\theta = \tau$ , получим отображение Пуанкаре

$$\bar{y} = \Phi(\tau)y + \Psi(y), \quad (3.12.7)$$

где  $\Psi(0) = 0$ ,  $\Psi'(0) = 0$ . Корни уравнения  $|\Phi(\theta) - \rho I| = 0$  являются мультипликаторами  $(\rho_1, \dots, \rho_n)$  траектории  $L$ .

Из теоремы Адамара (см. раздел 3.6) вытекает, что через точку  $O$ , лежащую в начале координат, проходят два гладких инвариантных многообразия: устойчивое  $W_{loc}^s(O)$  и неустойчивое  $W_{loc}^u(O)$ . Эти многообразия касаются в  $O$  соответственно  $k$ -мерного устойчивого подпространства  $E^s$  и  $(n - k)$ -мерного неустойчивого подпространства  $E^u$  соответствующего линеаризованного отображения  $\bar{y} = \Phi y$ . Пусть  $y = (y_1, y_2)$ , где  $y_1 \in \mathbb{R}^k$  и  $y_2 \in \mathbb{R}^{n-k}$ . Пусть  $y_2 = C^s y_1$  — уравнение подпространства  $E^s$ , а  $y_1 = C^u y_2$  — уравнение подпространства  $E^u$ , где  $C^s$  и  $C^u$  — некоторые матрицы<sup>8</sup>. Таким образом, уравнение многообразия  $W_{loc}^s(O)$  имеет вид

$$y_2 = \psi(y_1), \quad \text{где} \quad \frac{\partial \psi(0)}{\partial y_1} = C^s,$$

<sup>8</sup>Чтобы получить уравнения устойчивого и неустойчивого многообразий периодической траектории  $L$  седлового типа нет необходимости в приведении отображения Пуанкаре к специальному виду (3.6.1), то есть не предполагается, что линейная часть отображения Пуанкаре разбивается на два уравнения.

а уравнение многообразия  $W_{loc}^u(O)$  определяется как

$$y_1 = \phi(y_2), \quad \text{где} \quad \frac{\partial \phi(0)}{\partial y_2} = C^u.$$

Обе функции  $\psi$  и  $\phi$  являются  $C^r$ -гладкими. Условие инвариантности многообразия  $W_{loc}^s(O)$  относительно отображения Пуанкаре следующее. Если мы выберем точку  $(y_1^0, \psi(y_1^0)) \in W_{loc}^s(O)$  как начальную при  $\theta = 0$ , и из нее выпустим траекторию, то при  $\theta = \tau$  эта траектория возвращается на секущую в некоторую точку многообразия  $W_{loc}^s(O)$ . Множество всех положительных полутраекторий, начинающихся на  $W_{loc}^s(O)$ , образует  $(k + 1)$ -мерную инвариантную поверхность — локально устойчивое многообразие  $W_{loc}^s(L)$  седловой периодической траектории  $L$ . Уравнение многообразия  $W_{loc}^s(L)$  имеет вид

$$y(\theta) = (y_1(\theta; y_1^0, \psi(y_1^0)), y_2(\theta; y_1^0, \psi(y_1^0))). \quad (3.12.8)$$

Аналогичным образом можно определить инвариантное неустойчивое многообразие  $W_{loc}^u(L)$  размерности  $(n - k + 1)$ . Оно задается следующим уравнением:

$$y(\theta) = (y_1(\theta; \phi(y_2^0), y_2^0), y_2(\theta; \phi(y_2^0), y_2^0)). \quad (3.12.9)$$

Заметим, что многообразия  $W_{loc}^s(L)$  и  $W_{loc}^u(L)$  имеют ту же гладкость, что и  $W_{loc}^s(O)$  и  $W_{loc}^u(O)$ . Подстрочный индекс *loc* означает здесь, что оба многообразия определены в  $\mathbb{D}^n \times \mathbb{S}^1$ , где  $\mathbb{D}^n = \{y, \|y\| < \varepsilon\}$  — диск некоторого достаточно малого радиуса  $\varepsilon$ .

Остановимся на рассмотрении трехмерных примеров, то есть, когда  $n = 2$  в формуле (3.12.3) и отображение Пуанкаре двумерное.

- 1) Пусть  $0 < \rho_1 < 1$ , а  $\rho_2 > 1$ . Седловая неподвижная точка  $O$  разбивает устойчивое и неустойчивое многообразия на две компоненты каждое, такие что

$$W_{loc}^s(O) = \Gamma_1 \cup O \cup \Gamma_2$$

и

$$W_{loc}^u(O) = \Gamma_3 \cup O \cup \Gamma_4.$$

Кроме того, каждая компонента  $\Gamma_i$  ( $i = 1, \dots, 4$ ) инвариантна, то есть под действием отображения Пуанкаре она отображается в себя. Следовательно, многообразия  $W_{loc}^s(L)$  и  $W_{loc}^u(L)$  являются гладкими двумерными поверхностями, гомеоморфными цилиндру, см. рис. 3.12.1.

Заметим, что трехмерная система (3.12.2) вблизи периодической траектории  $L$  может быть приведена к следующему виду (см. раздел 3.11)

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= \lambda_1 y_1 + f_1(y_1, y_2, \theta), \\ \dot{y}_2 &= \lambda_2 y_2 + f_2(y_1, y_2, \theta), \\ \dot{\theta} &= 1, \end{aligned} \tag{3.12.10}$$

где  $\lambda_{1,2} = \frac{\ln \rho_{1,2}}{\tau}$ .

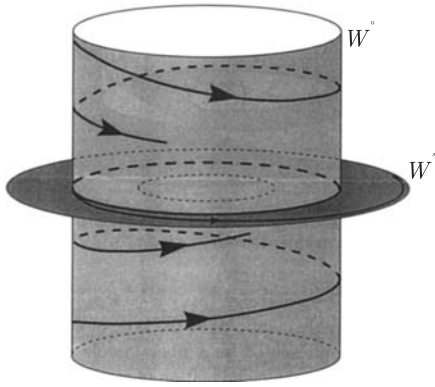


Рис. 3.12.1. Периодическая траектория седлового типа с двумерными устойчивым  $W^s$  и неустойчивым  $W^u$  многообразиями, гомеоморфными цилиндру

2) Пусть  $|\rho_1| < 1$  и  $|\rho_2| > 1$ , и кроме того,  $\rho_1 < 0$  и  $\rho_2 < 0$ . В данном случае отображение Пуанкаре переводит  $\Gamma_1$  в  $\Gamma_2$ , и  $\Gamma_2$  в  $\Gamma_1$ . Многообразие  $W_{loc}^s(L)$  будет диффеоморфно двумерному листу Мебиуса. То же самое справедливо для  $W_{loc}^u(L)$ , см. рис. 3.12.2. В этом случае траектория  $L$  служит средней линией листа Мебиуса.

Таким образом, мы можем видеть, что в трехмерном случае седловые периодические траектории могут быть двух разных топологических типов, поскольку цилиндры и листы Мебиуса негомеоморфны. Аналогичная ситуация имеет место и для многомерных систем. Если  $\text{sign}(\rho_1 \cdot \dots \cdot \rho_k) = 1$ , что влечет также  $\text{sign}(\rho_{k+1} \cdot \dots \cdot \rho_n) = 1$ , то  $W_{loc}^s(L)$  гомеоморфно многомерному цилиндру  $\mathbb{D}^k \times \mathbb{S}^1$ , а  $W_{loc}^u(L)$  гомеоморфно  $\mathbb{D}^{n-k} \times \mathbb{S}^1$ . Если

$\text{sign}(\rho_1 \cdot \dots \cdot \rho_k) = -1$ , а  $\text{sign}(\rho_{k+1} \cdot \dots \cdot \rho_n) = -1$ , то многообразия  $W_{loc}^s(L)$  и  $W_{loc}^u(L)$  являются неориентируемыми многообразиями типа многомерных листов Мебиуса (т. е. их можно представить как косое расслоение пучка дисков  $\mathbb{D}^k$  и соответственно  $\mathbb{D}^{n-k}$  над  $\mathbb{S}^1$ ). Аналогично классификации грубых неподвижных точек, мы можем различать грубые периодические траектории с помощью инвариантов  $\delta_s = \text{sign} \prod_{i=1}^k \rho_i$  и  $\delta_u = \text{sign} \prod_{i=k+1}^n \rho_i$ .

До этого только рассматривались локальные многообразия периодических траекторий. Однако эти многообразия определялись глобально. Обозначим через  $x = X(t; x_0)$  траекторию с начальным условием  $x_0$ .

**Определение 3.4.** Устойчивое многообразие периодической траектории  $L$  представлено множеством

$$W_L^s = \{x \in \mathbb{R}^n \mid X(t; x) \rightarrow L \text{ при } t \rightarrow +\infty\}.$$

Неустойчивое многообразие  $W_L^u$  определяется аналогичным образом с той лишь разницей, что  $t \rightarrow -\infty$ .

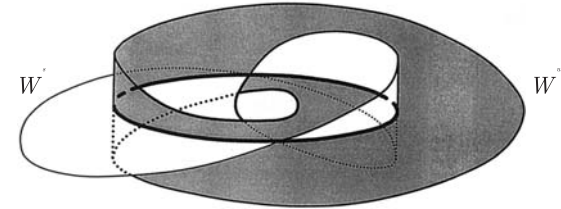


Рис. 3.12.2. Седловая периодическая траектория с двумерными устойчивым  $W^s$  и неустойчивым  $W^u$  многообразиями, гомеоморфными листу Мебиуса

Согласно этому определению, для любой точки  $x \in W^s(L)$  существует момент времени, когда траектория этой точки  $x$  входит в малую окрестность траектории  $L$ , т. е. для точки  $x$  существует такой сдвиг по времени, что она придет на локальное устойчивое многообразие. Следовательно,

$$W^s(L) = \bigcup_{t^* \leq 0} W_L^s(t^*),$$

где

$$W_L^s(t^*) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x = X(t^*; x^*) \text{ при некотором } x^* \in W_{loc}^s(L)\}.$$

Поскольку  $W_L^s(t^*)$  является гладким образом многообразия  $W_{L_{loc}}^s$  относительно  $X(t^*; \cdot)$ , то  $W_L^s$  будет гладким образом либо цилиндра  $\mathbb{R}^k \times \mathbb{S}^1$ , либо листа Мебиуса.

То же самое верно и для многообразия  $W^u(L)$ :

$$W^u(L) = \bigcup_{t^* \geq 0} W_L^u(t^*),$$

где

$$W_L^u(t^*) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x = X(t^*; x^*), \text{ при некотором } x^* \in W_{loc}^u(L)\}.$$

### 3.13. Гладкая эквивалентность и резонансы

Задача приведения нелинейного диффеоморфизма к линейной форме в окрестности неподвижной точки, по существу, аналогична соответствующей задаче для случая векторных полей (см. раздел 2.9). Основная трудность в обоих случаях связана с наличием резонансов. Однако, в отличие от резонансов векторных полей, резонансы диффеоморфизмов имеют мультипликативный характер.

Рассмотрим  $n$ -мерный диффеоморфизм

$$\bar{x} = Ax + f(x), \quad (3.13.1)$$

где  $f(0) = 0$ ,  $f'(0) = 0$ . Обозначим через  $(\rho_1, \dots, \rho_n)$  собственные значения матрицы  $A$ . Тогда, *резонанс* определяется соотношением

$$\rho_k = \rho^m, \quad (3.13.2)$$

где  $\rho^m = (\rho_1^{m_1} \rho_2^{m_2} \dots \rho_n^{m_n})$ , а  $m_k \geq 0$  ( $k = 1, \dots, n$ ) — такие неотрицательные целые числа, что  $|m| = \sum_{k=1}^n m_k \geq 2$ . Число  $|m|$  называется *порядком резонанса*.

**Лемма 3.8.** Пусть функция  $f(x) \in C^{N+1}$  и пусть резонансы порядка  $|m| \leq N$  отсутствуют. Тогда, замена переменных

$$y = x + \varphi_2(x) + \dots + \varphi_N(x), \quad (3.13.3)$$

где  $\varphi_l$  ( $l = 2, \dots, N$ ) являются однородными полиномами степени  $l$ , преобразует диффеоморфизм (3.13.1) в

$$\bar{y} = Ay + o_N(y), \quad (3.13.4)$$

где функция  $o_N(y)$  вместе с производными до порядка  $N$  обращается в нуль в начале координат.

Очевидно, что указанные замены переменных являются локальными, то есть они справедливы только в некоторой малой окрестности неподвижной точки диффеоморфизма (3.13.1).

Лемма 3.8 хорошо известна и справедлива даже для случая, когда матрица  $A$  имеет кратные собственные значения. Здесь рассматривается лишь случай, когда собственные значения являются простыми (общий случай анализируется по аналогии с леммой 2.2). Матрицу  $A$  можно записать в виде

$$A = \begin{pmatrix} \rho_1 & & & \mathbf{0} \\ & \rho_2 & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & \rho_n \end{pmatrix}.$$

Запишем функцию  $f(x)$  следующим образом:

$$f(x) = f_2(x) + f_3(x) + \dots + f_N(x) + o_N(x),$$

где  $f_l(x)$ , ( $l = 2, \dots, N + 1$ ) является однородным полиномом степени  $l$ . Получаем выражение

$$f_l(x) = \sum_k \sum_{l_1 + \dots + l_n = l} d_{k, l_1 \dots l_n} x_1^{l_1} \dots x_n^{l_n} e_k,$$

где  $e_k = (\underbrace{0, \dots, 0}_k, 1, 0, \dots, 0)$  представляет собой  $k$ -й базисный вектор; то есть  $f_l(x)$  является суммой мономов  $d_l x^l e_k$ . Заменой переменных (3.13.3) получаем

$$\begin{aligned} \bar{y} &= \bar{x} + \sum_{l=2}^N \varphi_l(\bar{x}) \\ &= Ax + \sum_{l=2}^N f_l(x) + \sum_{l=2}^N \varphi_l \left( Ax + \sum_{j=2}^N f_j(x) \right) + \dots \\ &= Ay - \sum_{l=2}^N A \varphi_l(x) + \sum_{l=2}^N f_l(x) + \sum_{l=2}^N \varphi_l \left( Ax + \sum_{j=2}^N f_j(x) \right) + \dots, \end{aligned} \quad (3.13.5)$$

где через многоточие обозначены члены, степень которых больше  $N$  (следует отметить, что остальные слагаемые содержат также члены степени  $(N + 1)$  и выше). Процедура исключения избыточных членов начинается с членов второй степени. Для нахождения  $\varphi_2(x)$  необходимо записать следующее уравнение:

$$-A\varphi_2(x) + f_2(x) + \varphi_2(Ax) = 0. \quad (3.13.6)$$

Записывая функцию  $\varphi_2(x)$  в виде

$$\varphi_2(x) = \sum_k \sum_{m_1 + \dots + m_n = 2} c_{km} x^m e_k, \quad x^m = x_1^{m_1} \dots x_n^{m_n}$$

получаем следующее уравнение для нахождения неизвестных коэффициентов  $c_{km}$ :

$$(-\rho_k + \rho^m) c_{km} + d_{km} = 0, \quad (3.13.7)$$

где  $m = 2$ , а  $k = (1, \dots, n)$ . Поскольку в данном случае резонансов нет, находим коэффициенты

$$c_{km} = \frac{d_{km}}{\rho_k - \rho^m}. \quad (3.13.8)$$

Чтобы получить полином  $\varphi_3(x)$ , запишем следующее уравнение:

$$-A\varphi_3(x) + \varphi_3(Ax) + f_3(x) + \{\varphi_2(Ax + f_2(x))\} = 0,$$

где через « $\{\}$ » обозначены кубические члены. Так как полином  $\varphi_2(x)$  уже найден, неизвестные коэффициенты полинома  $\varphi_3(x)$  находятся из следующего уравнения

$$(-\rho_k + \rho^m) c_{km} + \tilde{d}_{km} = 0. \quad (3.13.9)$$

Здесь  $\tilde{d}_{km} = d_{km} + d'_{km}$ , где  $d'_{km}$  — коэффициент при  $x^m$  в  $k$ -й компоненте вектор-полинома  $\varphi_2(Ax + f_2(x))$ . Повторяя эту процедуру, зануляем все члены до степени  $N$ .

В случае, когда существуют резонансы вида  $\rho_k = \rho^m$ , мы не можем «убить» мономы вида  $\tilde{d}_{km} x^m e_k$ . Для таких случаев имеет место следующая хорошо известная лемма.

**Лемма 3.9.** Пусть  $f(x) \in C^N$ . Тогда, существует замена переменных

$$y = x + \varphi(x),$$

где  $\varphi(x)$  — некоторый полином такой, что  $\varphi(0) = 0$ ,  $\varphi'(0) = 0$ , приводящая диффеоморфизм (3.13.1) к следующему виду

$$\bar{x} = Ax + R_N(x) + o_N(x), \quad (3.13.10)$$

где

$$R_N(x) = \sum_{\substack{|m| \leq N \\ \rho^m = \rho_k}} b_{km} x^m e_k. \quad (3.13.11)$$

Пусть теперь функция  $f(x)$  является аналитической. В пределе при  $N \rightarrow \infty$  исходный диффеоморфизм приводится либо к линейному виду, либо к виду

$$\bar{y} = Ay + R(y), \quad (3.13.12)$$

где

$$R(y) = \sum_{\rho^m = \rho_k} b_{km} y^m e_k. \quad (3.13.13)$$

Однако, замена переменных

$$y = x + \varphi_2(x) + \dots + \varphi_m(x) + \dots \quad (3.13.14)$$

является, вообще говоря, только лишь формальным рядом, так же как и ряд (3.13.13).

Для диффеоморфизмов имеет место теорема, аналогичная теореме Пуанкаре–Дюлака для векторных полей (см. раздел 2.9).

**Теорема 3.17.** Пусть  $|\rho_i| < 1$  ( $|\rho_i| > 1$ ,  $i = 1, \dots, n$ ). Тогда существует аналитическая замена переменных, преобразующая диффеоморфизм (3.13.1) в

$$\bar{y} = Ay + R(y), \quad (3.13.15)$$

где  $R(y)$  представляет собой полином, составленный из резонансных мономов. В отсутствие резонансов  $R(y) \equiv 0$ .

Случай, когда неподвижная точка 0 является седловой, то есть когда ее мультипликаторы лежат как внутри, так и вне единичной окружности, намного сложнее. Причина состоит в том, что даже если совокупность  $\{\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n\}$  нерезонансная, нуль является предельной точкой для множества

$$\{\rho^m - \rho_k\}_{m=2}^{\infty}, \quad k = 1, \dots, n \quad (3.13.16)$$



Здесь задача сходимости нормализующего ряда (3.13.14) становится намного более неопределенной из-за «малых знаменателей», возникающих (3.13.8). Из работ Зигеля и Брюно известно, что в седловом случае обе возможности реализуются: замены переменных в виде рядов могут как сходиться, так и расходиться.

Ситуация становится более определенной в  $C^\infty$ -гладком случае.

**Теорема 3.18 (Стернберг).** *Существует некоторая  $C^\infty$ -гладкая замена переменных, которая приводит  $n$ -мерный диффеоморфизм*

$$\bar{x} = Ax + f(x),$$

к линейному виду, если  $f(x) \in C^\infty$  и нет резонансов.

В случае, когда резонансы есть, справедлива следующая теорема.

**Теорема 3.19.** *Если  $f \in C^\infty$ , то существует такая  $C^\infty$ -гладкая замена переменных, которая приводит диффеоморфизм (3.13.1) к виду*

$$\bar{y} = Ay + R(y), \quad (3.13.17)$$

где  $R(y)$  — некоторая  $C^\infty$ -функция, формальный ряд Тейлора которой состоит только из резонансных мономов.

Из этих двух теорем вытекает, что зависимость нормальных форм от совокупности  $\rho = \{\rho_1, \dots, \rho_n\}$  имеет разрывный характер.

Как и в случае векторных полей, мы можем поставить вопрос о приведении диффеоморфизмов к линейному виду посредством замен переменных только лишь конечной гладкости.

**Теорема 3.20 (Белицкий).** *Пусть  $f \in C^{N+1}$ , а  $q$  — число различных по модулю мультипликаторов из  $(\rho_1, \dots, \rho_n)$ . Положим также, что нет резонансов порядков меньших или равных  $N$ . Тогда существует такая  $C^{\lfloor \frac{N}{q} \rfloor}$ -гладкая замена переменных, которая приводит систему (3.13.1) к линейному виду.*

Из этой теоремы вытекает, что нелинейный диффеоморфизм может быть приведен к линейному виду с помощью  $C^r$ -гладкой замены переменных в том случае, когда нет резонансов порядка  $|m| \leq N$ , где  $N \geq r n$ .

**Теорема 3.21 (Белицкий).** *Пусть  $f \in C^2$ ,  $|\rho_k| \neq 1$  ( $k = 1, \dots, n$ ), и пусть выполняются следующие условия:*

$$|\rho_i| \neq |\rho_j| |\rho_k|, \quad |\rho_i| < 1 < |\rho_k|, \quad (3.13.18)$$

где  $\{i, j, k\} \in (1, \dots, n)$ . Тогда систему (3.13.1) можно привести к линейному виду посредством  $C^1$ -гладкой замены переменных.

Вывод 1. Если  $|\rho_i| < 1$  ( $i = 1, \dots, n$ ), и  $f \in C^2$ , то диффеоморфизм (3.13.1) можно привести к линейному виду некоторой  $C^1$ -гладкой заменой переменных.

Вывод 2. Если  $n = 2$ ,  $|\rho_1| < 1$ ,  $|\rho_2| > 1$  и  $f \in C^2$ , то двумерный диффеоморфизм можно привести к линейному виду с помощью  $C^1$ -гладкой замены переменных.

С точки зрения динамики, сама задача приведения диффеоморфизма к линейной форме в окрестности седловой неподвижной точки не кажется особо значимой. Конечно, всю необходимую информацию о поведении траекторий вблизи седла можно получить при помощи стандартных методов, рассмотренных в данной главе. Однако, если мы интересуемся глобальными (не в малой окрестности седла) особенностями поведения траекторий, ситуация становится более интригующей.

Например, описание траекторий в окрестности гомоклинической траектории Пуанкаре<sup>9</sup> (то есть траектории, двояко-асимптотической к седловой неподвижной точке при  $t \rightarrow \pm\infty$ ) требует описания свойств траекторий, остающихся вблизи седловой неподвижной точки долгое время. Конечно, это описание можно легко получить, когда диффеоморфизм приведет к линейному виду, и такое приведение в  $C^\infty$ -гладком случае было использовано Смейлом при изучении гомоклиники. Однако этот подход не всегда применим; например, в гамильтоновом случае всегда существуют резонансы.

Более того, чтобы изучить бифуркации гомоклинических траекторий необходимо включить рассматриваемый диффеоморфизм в некоторое конечно-параметрическое семейство. Поэтому, локальное приведение к некоторому удобному виду должно непрерывно зависеть от параметров.

Рассмотрим конечно-параметрическое семейство диффеоморфизмов  $X_\mu$ . Положим, что семейство  $X_\mu$  является  $C^r$ -гладким ( $r \geq 2$ ) по совокупности переменных и параметров и что оно может быть представлено

<sup>9</sup>Пуанкаре первым обнаружил существование таких траекторий в задачах гамильтоновой динамики.

в виде

$$\begin{aligned}\bar{x} &= A_1(\mu)x + f_1(x, y, u, v, \mu), \\ \bar{u} &= A_2(\mu)u + f_2(x, y, u, v, \mu), \\ \bar{y} &= B_1(\mu)y + g_1(x, y, u, v, \mu), \\ \bar{v} &= B_2(\mu)v + g_2(x, y, u, v, \mu),\end{aligned}\quad (3.13.19)$$

где, при всех достаточно малых  $\mu$ , функции  $f_i(x, y, u, v, \mu)$  и  $g_i(x, y, u, v, \mu)$  ( $i = 1, 2$ ) вместе с их первыми производными по переменным  $(x, y, u, v)$  обращаются в нуль в начале координат.

Предположим также, что собственные значения матрицы

$$A(0) = \begin{pmatrix} A_1(0) & 0 \\ 0 & A_2(0) \end{pmatrix}$$

лежат строго внутри единичной окружности, а собственные значения матрицы

$$B(0) = \begin{pmatrix} B_1(0) & 0 \\ 0 & B_2(0) \end{pmatrix}$$

лежат строго вне единичной окружности. Предположим также, что собственные значения  $(\rho_1, \dots, \rho_{m_1})$  матрицы  $A_1(0)$  удовлетворяют условиям  $|\rho_i| = \rho < 1$  ( $i = 1, \dots, m_1$ ), а собственные значения  $(\gamma_1, \dots, \gamma_{p_1})$  матрицы  $B_1(0)$  удовлетворяют условиям  $|\gamma_i| = \gamma > 1$  ( $i = 1, \dots, p_1$ ). Относительно собственных значений  $(\rho_{m_1+1}, \dots, \rho_m)$  матрицы  $A_2(0)$  и  $(\gamma_{p_1+1}, \dots, \gamma_p)$  матрицы  $B_2(0)$  предположим, что

$$\begin{aligned}|\rho_i| &< \rho, & i &= m_1 + 1, \dots, m \\ |\gamma_i| &> \gamma, & i &= p_1 + 1, \dots, p.\end{aligned}\quad (3.13.20)$$

Следовательно, неподвижная точка  $O$  является седловой, а координаты  $x$  и  $y$  являются ведущими соответственно устойчивыми и неустойчивыми координатами.

**Теорема 3.22.** *При сделанных выше предположениях существует  $\mathbb{C}^{r-1}$ -гладкая замена переменных, приводящая семейство (3.13.19) к виду*

$$\begin{aligned}\bar{x} &= A_1(\mu)x + f_{11}x + f_{12}u, \\ \bar{u} &= A_2(\mu)u + f_{21}x + f_{22}u, \\ \bar{y} &= B_1(\mu)y + g_{11}y + g_{12}v, \\ \bar{v} &= B_2(\mu)v + g_{21}x + g_{22}v,\end{aligned}\quad (3.13.21)$$

где  $f_{i,j}(x, y, u, v, \mu)$  и  $g_{i,j}(x, y, u, v, \mu)$   $i, j = 1, 2$  есть некоторые  $\mathbb{C}^{r-1}$ -функции, которые обращаются в нуль в начале координат и удовлетворяют следующим условиям

$$\begin{aligned}f_{1j}(x, u, 0, 0, \mu) &\equiv 0, & f_{i1}(0, u, y, v, \mu) &\equiv 0, \\ g_{1j}(0, 0, y, v, \mu) &\equiv 0, & g_{i1}(x, u, 0, v, \mu) &\equiv 0.\end{aligned}$$

В данном случае гладкость относительно параметров такая же, как в теореме 2.20.

Заметим, что приведение к виду (3.13.21) оказывается достаточным для изучения основных гомоклинических бифуркаций (см. Гонченко & Шильников и Гонченко и др. [1996]), благодаря наличию оценок, аналогичных тем, которые получены в лемме 3.6.

Заметим, что основная идея доказательства этой теоремы состоит в том, чтобы избавиться от некоторых «нерезонансных функций». Доказательство практически полностью повторяет доказательство теоремы 2.20 для случая векторного поля, представленное в приложении А.

В случае, когда собственные значения матрицы  $A$  диффеоморфизма (3.13.1) лежат на единичной окружности, всегда существует конечное число резонансов, а именно

$$\rho_k = \rho_k^m, \quad m \geq 2 \quad (3.13.22)$$

при  $\rho_k = 1$ ;

$$\rho_k = \rho_k^{2m+1}, \quad m \geq 1 \quad (3.13.23)$$

при  $\rho_k = -1$ ; и

$$\rho_k = \rho_k (\rho_k \rho_{k+1})^m, \quad m \geq 1 \quad (3.13.24)$$

если  $\rho_{k, k+1} = e^{\pm i\varphi}$ , где  $\varphi \neq 0$ .

Теория нормальных форм представляет здесь особую ценность: прежде всего, для задач устойчивости в критических случаях, а также при изучении соответствующих бифуркационных явлений. В последнем случае естественно рассматривать не только сам диффеоморфизм, но и гладкие конечно-параметрические семейства, его содержащие. Очевидно, что приведение семейства к простейшей форме является здесь первой задачей.

Предположим сейчас, что только собственные значения  $(\rho_1, \dots, \rho_p)$  лежат на единичной окружности. Если  $p < n$ , то здесь удобно воспользоваться теоремой о центральном многообразии (см. главу 5), которая позволяет

привести исходное семейство  $n$ -мерных систем к следующему конечно-параметрическому семейству  $p$ -мерных систем:

$$\bar{x} = Ax + g(x) + h(x, \varepsilon), \quad (3.13.25)$$

где матрица  $A$  имеет собственные значения  $(\rho_1, \dots, \rho_p)$ ,  $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_q)$ , а функции  $g(x)$  и  $h(x, \varepsilon)$  являются достаточно гладкими. Более того,

$$g(0) = 0, \quad g'(0) = 0, \quad h(x, 0) \equiv 0, \quad h'_x(x, 0) \equiv 0.$$

Рассмотрим  $(p + q)$ -мерный диффеоморфизм, записанный в треугольной форме:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= Ax + g(x) + h(x, \varepsilon), \\ \bar{\varepsilon} &= \varepsilon. \end{aligned} \quad (3.13.26)$$

Этот диффеоморфизм имеет неподвижную точку  $O(0, 0)$ , матрица Якоби в которой имеет вид

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A & h'_\varepsilon(0, 0) \\ 0 & I \end{pmatrix},$$

где  $I$  — единичная матрица. Матрица  $\tilde{A}$  имеет собственные значения  $\rho_1 \cdots \rho_p = 1$  и  $\gamma_1 \cdots \gamma_q = 1$ . В этом случае, кроме резонансов типа

$$\rho_k = \rho^m,$$

где

$$\rho^m = \rho_1^{m_1} \cdots \rho_p^{m_p}, \quad \sum_{i=1}^p m_i \geq 2,$$

которые существуют, когда  $\varepsilon = 0$ , имеют место следующие резонансы:

$$\rho_k = \rho_k \gamma^l, \quad (3.13.27)$$

$$\rho_k = \rho^m \gamma^l, \quad (3.13.28)$$

$$\gamma_k = \gamma^l, \quad (3.13.29)$$

где

$$\gamma^l = \gamma_1^{l_1} \cdots \gamma_q^{l_q}, \quad \sum_{j=1}^q l_j \geq 2.$$

Систему (3.13.26) можно привести к нормальной форме путем замены переменных

$$\begin{aligned} y &= x + \varphi(x, \varepsilon) \\ \varepsilon &= \varepsilon \end{aligned} \quad (3.13.30)$$

которая оставляет второе уравнение системы (3.13.26) неизменным (последнее означает, что нет необходимости рассматривать резонансы вида (3.13.29)). Аналогично случаю, рассмотренному в лемме 3.9, исходное семейство можно привести к виду

$$\bar{y} = Ay + R_0(\varepsilon) + R_1(\varepsilon)y + R_N(y, \varepsilon) + o_N(y, \varepsilon), \quad (3.13.31)$$

где  $R_1(\varepsilon)$  — некоторый полином степени не выше чем  $N - 1$ ,  $R_1(0) = 0$ , и

$$R_N(y, \varepsilon) = \sum_{\substack{|m| \leq N \\ \rho_k = \rho^m}} b_{km}(\varepsilon) y^m e_k, \quad (3.13.32)$$

где  $b_{km}(\varepsilon)$  — некоторые полиномы, степени которых не превышают  $(N - |m|)$ . Кроме того,  $R_0(\varepsilon) \equiv 0$ , если ни одно из собственных значений  $(\rho_1, \dots, \rho_p)$  не равно единице. В противном случае  $R_0(\varepsilon)$  будет полиномом степенью не выше  $N$ , а  $R_0(0) = 0$ . Появление в уравнении (3.13.31) члена  $R_0(\varepsilon)$  связано с существованием резонансов вида

$$\rho_k = \gamma^l. \quad (3.13.33)$$

Во многих случаях для описания поведения траекторий в малой фиксированной окрестности неподвижной точки  $O$ , а также для построения бифуркационной диаграммы достаточно ограничиться рассмотрением конечной нормальной формы

$$\bar{y} = Ay + R_0(\varepsilon) + R_1(\varepsilon)y + R_N(y, \varepsilon) \quad (3.13.34)$$

при некоторых подходящих  $N$  и  $p$ . Как в случае векторного поля, прежде чем применять информацию, полученную при анализе укороченной нормальной формы (3.13.34), к исходному семейству диффеоморфизмов, она должна быть обоснована. Указанный метод используется во второй части данной книги при изучении основных случаев бифуркаций периодических траекторий.

### 3.14. Автономные нормальные формы

В этом разделе рассматриваются различные виды нормальных форм вблизи периодической траектории. Из раздела 3.11 известно, что линейную неавтономную систему, периодическую по времени, всегда можно привести к автономному виду с помощью периодического по времени преобразования координат. Здесь мы обобщаем этот результат и показываем, что некоторой *формальной* заменой переменных все неавтономные члены в произвольной *нелинейной* системе могут быть приведены к автономному виду вблизи некоторой периодической траектории.

Рассмотрим следующую  $\mathbb{C}^r$ -гладкую систему в нормальных координатах

$$\begin{cases} \dot{y} = A(\theta)y + F(\theta, y) \\ \dot{\theta} = 1 \end{cases} \quad (3.14.1)$$

вблизи периодической траектории  $\{y = 0\}$  периода  $\tau$  (таким образом, полагаем, что функции  $A$  и  $F$  являются  $\tau$ -периодическими по  $\theta$ ). Для простоты, рассмотрим случай, когда  $y$  является вектором комплексных переменных ( $y \in \mathbb{C}^n$ ). Трудности, возникающие в случае, когда величина  $y$  вещественна, можно преодолеть таким же образом, как в лемме 2.2.

Пусть  $\{e_1, \dots, e_n\}$  — базис Жордана в  $\mathbb{C}^n$ , связанный с матрицей линейной части отображения Пуанкаре для системы (3.14.1), а  $\{y_1, \dots, y_n\}$  — координаты в этом базисе. В разделе 3.11 показано, что систему (3.14.1) можно привести к виду

$$\dot{y}_k = \lambda_k y_k + \delta_k y_{k+1} + \sum_{2 \leq |m| \leq r} F_{km}(\theta) y^m + o(\|y\|^r) \quad (k = 1, \dots, n) \quad (3.14.2)$$

где  $\lambda_k$  суть (нетривиальные) характеристические показатели, коэффициенты  $\delta_k$  равны 0 или 1; более того,  $\delta_k$  отличны от нуля только в случае  $\lambda_k = \lambda_{k+1}$ . Функции  $F_{km}$  имеют период  $\tau$  по  $\theta$ , из леммы 3.7 вытекает, что они являются  $\mathbb{C}^r$ -гладкими по  $\theta$ . Напомним, что характеристические показатели определяются в терминах мультипликаторов  $\rho_1, \dots, \rho_n$  периодической траектории:

$$\lambda_k = \frac{1}{\tau} \ln \rho_k \quad (3.14.3)$$

В предыдущем разделе мы ввели понятие резонансного соотношения

$$\rho_1^{m_1} \cdots \rho_n^{m_n} = \rho_k,$$

(где  $m_1, \dots, m_n$  — неотрицательные целые числа), которое можно переписать в виде

$$m_1 \lambda_1 + \cdots + m_n \lambda_n = \lambda_k + \frac{2\pi i}{\tau} m_{n+1}, \quad (3.14.4)$$

где  $m_{n+1}$  также является целым числом, возможно даже отрицательным.

**Теорема 3.23.** *Существует целое число  $S$ , определяемое только значениями мультипликаторов  $\rho_1, \dots, \rho_n$ , такое что для любого конечного  $r$  существует локальное  $(S\tau)$ -периодическое по  $\theta$  преобразование координат  $y$ , после которого все коэффициенты  $F_{jm}$  в (3.14.2) становятся независимыми от  $\theta$ .<sup>10</sup> Более того, если моном  $y^m e_k$  нерезонансный для некоторого  $k$ , то  $F_{km} \equiv 0$  в новых координатах.*

Доказательство. Будем проводить последовательно координатные преобразования вида

$$y_k^{\text{new}} = y_k + f_{km}(\theta) y^m, \quad (3.14.5)$$

каждое из которых делает коэффициент функции  $(y^{\text{new}})^m e_k$  независимым от  $\theta$ ; здесь  $e_k = \underbrace{(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)}_k$  есть  $k$ -й базисный вектор. Такое пре-

образование не изменяет коэффициенты перед мономами  $y^{m'} e_{k'}$ , порядки которых ниже порядка монома  $y^m e_k$  (в смысле леммы 2.2; см. (2.9.18)). Поэтому, рассматривая все большие (по порядку) мультииндексы  $(k, m)$  в (3.14.5), в конце концов доказываем теорему.

Приравнивая коэффициенты перед  $y^m$  в тождестве

$$\frac{d}{dt} y_k^{\text{new}} = \frac{d}{dt} [y_k + f_{km}(\theta) y^m],$$

получаем

$$F_{km}^{\text{new}}(\theta) = F_{km}^{\text{old}}(\theta) + (f'_{km}(\theta) + f_{km}(\theta)[(m, \lambda) - \lambda_k]).$$

Последнее выражение можно рассматривать как дифференциальное уравнение для  $f_{km}$ . Его решение имеет вид

$$f_{km}(\theta) = e^{-\gamma_{km}\theta} \left( C + \int_0^\theta e^{\gamma_{km}t} \{F_{km}^{\text{new}}(t) - F_{km}^{\text{old}}(t)\} dt \right) \quad (3.14.6)$$

<sup>10</sup>Заметим, что члены  $o(\|y\|^r)$  остаются неавтономными.

где

$$\gamma_{km} = (m, \lambda) - \lambda_k.$$

Можно увидеть, что если моном  $y^m$  нерезонансный (т.е.  $\gamma_{jm} \neq 2\pi i \frac{k}{T}$ ), то константу  $C$  в (3.14.6) можно выбрать такой, что функция  $f_{km}$  будет  $\tau$ -периодической по  $\theta$ , и  $F_{jm}^{\text{new}} \equiv 0$ . Действительно, условие периодичности функции  $f_{km}$  есть

$$f_{km}(\theta + \tau) = f_{km}(\theta),$$

или, когда  $F_{km}^{\text{new}} = 0$ , мы имеем

$$\begin{aligned} (e^{\gamma_{km}\tau} - 1)C &= e^{\gamma_{km}\tau} \int_0^\theta e^{\gamma_{km}t} F_{km}(t) dt - \int_0^{\theta+\tau} e^{\gamma_{km}t} F_{km}(t) dt \\ &= \int_0^\theta e^{\gamma_{km}(t+\tau)} F_{km}(t+\tau) dt - \int_0^{\theta+\tau} e^{\gamma_{km}t} F_{km}(t) dt \\ &= - \int_0^\tau e^{\gamma_{km}t} F_{km}(t) dt \end{aligned}$$

(здесь мы использовали  $\tau$ -периодичность функции  $F_{km}(t)$ ). Если  $\gamma_{km} \neq 2\pi i \frac{j}{T}$ , то коэффициент перед  $C$  отличен от нуля, и требуемое значение константы  $C$  находится сразу.

При резонансе имеют место два случая:  $\gamma_{km} = 0$  и  $\gamma_{km} \neq 0$ . Если  $\gamma_{km} = 0$  ( $m_{n+1} = 0$ , см. (3.14.4)), уравнение (3.14.6) принимает вид

$$f_{km}(\theta) = C + \int_0^\theta \{F_{km}^{\text{new}}(t) - F_{km}^{\text{old}}(t)\} dt. \quad (3.14.7)$$

Поскольку  $F_{km}^{\text{new}} = \text{const} = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau F_{km}^{\text{old}}(t) dt$ , функция  $f_{km}$  является  $\tau$ -периодической. Таким образом, систему можно привести к автономной форме путем  $\tau$ -периодического преобразования, при условии, что величины  $\gamma_{km}$  обращаются в нуль для всех резонансных мономов.

Хотя данный случай не является общим, мы докажем однако, что его можно достичь, если рассматривать систему как  $(S\tau)$ -периодическую с некоторым целым  $S \geq 1$ . Идея доказательства состоит в том, что характеристические показатели  $\lambda_k$  определяются из (3.14.3) не единственным

образом, поскольку логарифм не является однозначной функцией. Фактически, можно записать

$$\lambda_k = \frac{1}{\tau} \ln \rho_k + 2\pi i \frac{j_k}{\tau}$$

где  $j_k$  — произвольные целые числа (если  $\rho_k = \rho_{k+1}$ , берем  $j_{k+1} = j_k$ , чтобы получить  $\lambda_{k+1} = \lambda_k$ ). Если рассмотреть систему как  $(S\tau)$ -периодическую, получаем

$$\lambda_k^{\text{new}} = \frac{1}{S\tau} \ln(\rho_k^S) + 2\pi i \frac{j_k}{S\tau} = \lambda_k^{\text{old}} + 2\pi i \frac{j_k}{S\tau}. \quad (3.14.8)$$

Теперь докажем, что существуют такие целые  $S$  и  $j_1, \dots, j_n$ , что во всех резонансных соотношениях мнимая часть<sup>11</sup> обращается в нуль одновременно с переходом к новым характеристическим показателям  $\lambda_k$ , определяемым формулой (3.14.8) (тогда справедливость теоремы вытекает непосредственно из приведенного выше анализа).

Резонансное соотношение (3.14.4) является частным случаем соотношения

$$m_1 \lambda_1 + \dots + m_n \lambda_n + m_{n+1} i \omega = 0 \quad (3.14.9)$$

где  $\omega = 2\pi/\tau$ . Это уравнение можно рассматривать как линейное по переменным  $(m_1, \dots, m_{n+1})$  с данными коэффициентами  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n, i\omega)$ . Указанное уравнение может иметь только конечное число линейно независимых целочисленных решений, которые обозначим как  $(m_1^{(1)}, \dots, m_{n+1}^{(1)}), \dots, (m_1^{(q)}, \dots, m_{n+1}^{(q)})$  ( $q \leq n$ ). Любое другое целочисленное решение можно представить в виде линейной комбинации  $m = \sigma_1 m^{(1)} + \dots + \sigma_q m^{(q)}$  с некоторыми коэффициентами  $\sigma$ . Мы должны изменить характеристические показатели  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  так, что во всех резонансных мономах одновременно  $m_{n+1}$  обращается в нуль. Поскольку любое решение уравнения (3.14.9) представляет собой линейную комбинацию конечного числа базисных решений  $m^{(1)}, \dots, m^{(q)}$ , достаточно, чтобы  $\{m_{n+1}^{(1)} = 0, \dots, m_{n+1}^{(q)} = 0\}$ .

Имеем

$$\begin{aligned} m_1^{(1)} \lambda_1 + \dots + m_n^{(1)} \lambda_n + m_{n+1}^{(1)} i \omega &= 0, \\ \vdots & \\ m_1^{(q)} \lambda_1 + \dots + m_n^{(q)} \lambda_n + m_{n+1}^{(q)} i \omega &= 0, \end{aligned}$$

<sup>11</sup>То есть  $\frac{2\pi i}{T} m_{n+1}$  в выражении (3.14.4).

Рассмотрим эту систему как линейную однородную систему относительно  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n, i\omega)$  с целыми коэффициентами  $m_\beta^\alpha$ . Хорошо известно, что если линейная однородная система с целыми коэффициентами имеет ненулевое решение, то она будет иметь и целочисленное ненулевое решение. Следовательно, существуют такие целые числа  $j_1, \dots, j_n$  и  $S$ , что

$$\begin{aligned} m_1^{(1)} j_1 + \dots + m_n^{(1)} j_n + m_{n+1}^{(1)} S &= 0, \\ \vdots & \\ m_1^{(q)} j_1 + \dots + m_n^{(q)} j_n + m_{n+1}^{(q)} S &= 0. \end{aligned} \quad (3.14.10)$$

Подставив целочисленные решения  $j_1, \dots, j_n$  и  $S$  системы (3.14.10) в формулу (3.14.8), получим множество новых характеристических показателей таких, что

$$\begin{aligned} m_1^{(1)} \lambda_1^{\text{new}} + \dots + m_n^{(1)} \lambda_n^{\text{new}} &= 0, \\ \vdots & \\ m_1^{(q)} \lambda_1^{\text{new}} + \dots + m_n^{(q)} \lambda_n^{\text{new}} &= 0. \end{aligned}$$

Отсюда вытекает, что, в терминах вновь определенных показателей  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  и для случая, когда система рассматривается как  $(S\tau)$ -периодическая (где  $S$  вычисляется по формуле (3.14.10)), значение  $\gamma_{km}$  равно нулю для всех резонансных мономов. Теорема доказана.

Общий смысл этого результата состоит в том, что поведение решений, остающихся в малой окрестности периодической траектории, очень схоже с поведением решений в малой окрестности положения равновесия автономной системы. Более точно, если привести систему, записанную в нормальных координатах, к автономной форме с точностью до членов некоторого порядка  $r$ , то траектории в достаточно малой  $\varepsilon$ -окрестности периодической траектории будут близки к траекториям укороченной автономной системы на большом промежутке времени (порядка  $1/\varepsilon^r$ ). Однако следует учесть, что при увеличении  $r$  построенное преобразование координат может не сходиться (поскольку оно является частным случаем *формального* преобразования нормальной формы), и, вообще говоря, поведение исходной системы и поведение укороченной автономной системы на *бесконечном* интервале времени будут весьма различными.

Наконец, заметим, что из доказательства приведенной выше теоремы вытекает, что в важном частном случае, когда все характеристические пока-

затели  $\lambda_k$  равны нулю (то есть все мультипликаторы равны 1), автономная нормальная форма имеет тот же период  $\tau$ , что и исходная система (поскольку  $\gamma_{jm} \equiv (m, \lambda) - \lambda_j$  равен нулю для всех резонансных мономов).

### 3.15. Принцип сжимающих отображений. Седловые отображения

В этом разделе приводится простой критерий существования неподвижных точек, основанный на принципе сжимающих отображений. При помощи этого критерия, приложенного к отображению Пуанкаре, можно получить условия, гарантирующие существование периодических траекторий. Принцип сжимающих отображений является довольно общим математическим результатом, и его применимость не ограничивается задачей доказательства существования периодических траекторий. В следующих главах при доказательстве теорем об инвариантных многообразиях используется бесконечномерная версия (на пространстве непрерывных функций) этого принципа.

**Определение 3.5.** Отображение  $T : D \rightarrow D$  замкнутого множества  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  называется сжимающим, или просто сжатием, если существует такая константа  $K < 1$ , что для любых двух точек  $M_1$  и  $M_2$  в области  $D$  расстояние между их образами  $T(M_1)$  и  $T(M_2)$  не превышает расстояния между точками  $M_1$  и  $M_2$ , умноженного на  $K$ :

$$\|TM_1 - TM_2\| \leq K \|M_1 - M_2\| \quad (3.15.1)$$

**Теорема 3.24 (Принцип сжимающих отображений Банаха).** *Сжимающее отображение  $T$  имеет единственную неподвижную точку  $M^*$  в области  $D$ . Кроме того, траектория  $T^i M$  любой точки  $M \in D$  экспоненциально стремится к точке  $M^*$  при  $i \rightarrow \infty$ .*

Доказательство. Рассмотрим произвольную точку  $M \in D$ . Поскольку  $TD \subseteq D$ , траектория  $\{T^i M\}_{i=0}^\infty$  точки  $M$  целиком лежит в области  $D$ . Из (3.15.1) вытекает, что для любого  $i$  выполняется

$$\|T^{i+1} M - T^i M\| \leq K^i \|TM - M\|.$$

Следовательно, для любых значений  $m$  и  $j$  получаем неравенство

$$\begin{aligned} \|T^{m+j}M - T^mM\| &\leq \sum_{i=0}^{j-1} \|T^{m+i+1}M - T^{m+i}M\| \\ &\leq \left( \sum_{i=0}^{j-1} K^{m+i} \right) \|TM - M\| \leq \frac{K^m}{1-K} \|TM - M\|. \end{aligned}$$

Таким образом, последовательность точек  $\{T^iM\}_{i=0}^{\infty}$  является фундаментальной (или последовательностью Коши), то есть для любого  $\varepsilon > 0$  можно найти такое целое  $m$ , что неравенство  $\|T^{m+j}M - T^mM\| \leq \varepsilon$  выполняется при любом  $j$ . В данном случае

$$m > \frac{1}{|\ln K|} \cdot \left| \ln \frac{\varepsilon(1-K)}{\|TM - M\|} \right|.$$

Поскольку любая фундаментальная последовательность сходится<sup>12</sup>, существует предел  $M^* = \lim_{i \rightarrow \infty} T^iM$ . Так как отображение  $T$  непрерывно (согласно формуле (3.15.1)), получаем, что

$$TM^* = T \lim_{i \rightarrow \infty} T^iM = \lim_{i \rightarrow \infty} T^{i+1}M = M^*,$$

то есть  $M^*$  является неподвижной точкой отображения  $T$ .

Если  $T$  имеет еще одну неподвижную точку  $M^{**}$ , то

$$\|M^* - M^{**}\| = \|TM^* - TM^{**}\| \leq K\|M^* - M^{**}\|$$

откуда  $\|M^* - M^{**}\| = 0$ , то есть  $M^* = M^{**}$ . Таким образом, отображение  $T$  имеет единственную неподвижную точку  $M^*$ .

Мы показали, что траектория любой точки  $M$  экспоненциально стремится к некоторой неподвижной точке отображения  $T$ . Поскольку данная точка единственна, траектории с начальными точками в области  $D$  экспоненциально стремятся к  $M^*$ .

**Теорема 3.25.** Пусть отображение  $T : D \mapsto D$  непрерывно зависит от некоторого параметра  $\mu$ , а отображения  $T_\mu$  являются сжимающими и имеют одну и ту же константу сжатия  $K$  при всех  $\mu$ . Тогда неподвижная точка  $M_\mu^*$  непрерывно зависит от  $\mu$ .

<sup>12</sup>Пространство  $\mathbb{R}^n$  является полным.

Доказательство. Пусть  $M_\mu^*$  и  $M_{\mu+\Delta\mu}^*$  — неподвижные точки отображений  $T_\mu$  и  $T_{\mu+\Delta\mu}$  соответственно. По определению

$$T_\mu M_\mu^* = M_\mu^*$$

и

$$T_{\mu+\Delta\mu} M_{\mu+\Delta\mu}^* = M_{\mu+\Delta\mu}^*.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \|M_\mu^* - M_{\mu+\Delta\mu}^*\| &= \|T_\mu M_\mu^* - T_{\mu+\Delta\mu} M_{\mu+\Delta\mu}^*\| \\ &\leq \|T_\mu M_\mu^* - T_{\mu+\Delta\mu} M_\mu^*\| + \|T_{\mu+\Delta\mu} M_\mu^* - T_{\mu+\Delta\mu} M_{\mu+\Delta\mu}^*\| \\ &\leq \|T_\mu M_\mu^* - T_{\mu+\Delta\mu} M_\mu^*\| + K\|M_\mu^* - M_{\mu+\Delta\mu}^*\|, \end{aligned}$$

откуда

$$\|M_\mu^* - M_{\mu+\Delta\mu}^*\| \leq \frac{1}{1-K} \|T_\mu M_\mu^* - T_{\mu+\Delta\mu} M_\mu^*\|.$$

Так как  $T_\mu$  непрерывно зависит от  $\mu$ , правая часть последнего неравенства стремится к нулю при  $\Delta\mu \rightarrow 0$ , следовательно,  $M_{\mu+\Delta\mu}^* \rightarrow M_\mu^*$  при  $\delta\mu \rightarrow 0$ , что и требовалось доказать.

Следующий критерий существования неподвижных точек гладких отображений вытекает непосредственно из принципа Банаха.

**Теорема 3.26.** Пусть отображение  $\bar{x} = F(x)$  определено на замкнутом выпуклом множестве  $D \subseteq \mathbb{R}^n$ , где

$$F(D) \subseteq D \tag{3.15.2}$$

$$\|F'\| \leq K < 1. \tag{3.15.3}$$

Тогда, это отображение имеет единственную неподвижную точку  $x^* \in D$ , к которой сходятся все его траектории.

Доказательство. Чтобы доказать эту теорему достаточно проверить, что отображение  $F$  является сжимающим. В области  $D$  возьмем две точки  $x_1$  и  $x_2$  и исследуем их образы  $\bar{x}_1$  и  $\bar{x}_2$  относительно отображения  $F$ . Поскольку множество  $D$  выпуклое, интервал  $I = \{x_1 + s(x_2 - x_1)\}_{s \in [0,1]}$  соединяющий точки  $x_1$  и  $x_2$  целиком лежит в  $D$ . Рассмотрим функцию  $\varphi(s) = F(x_1 + s(x_2 - x_1))$ . Она отображает интервал  $I$  на  $D$  так, что  $\varphi(0) = \bar{x}_1$ ,  $\varphi(1) = \bar{x}_2$ . Поскольку

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \int_0^1 \varphi'(s) ds,$$

имеем, что

$$\bar{x}_2 = \bar{x}_1 + \int_0^1 F'(x_1 + s(x_2 - x_1))(x_2 - x_1) ds$$

и неравенство

$$\|\bar{x}_2 - \bar{x}_1\| \leq \int_0^1 \|F'\| ds \cdot \|x_2 - x_1\|.$$

Следовательно,

$$\|\bar{x}_2 - \bar{x}_1\| \leq K \|x_2 - x_1\|$$

т. е. отображение  $F$  является сжимающим, а из теоремы 3.24 вытекает, что в области  $D$  оно имеет единственную неподвижную точку.

**Замечание.** Выше было передоказано хорошо известное неравенство

$$\|F(x_2) - F(x_1)\| \leq \left( \sup_D \|F'\| \right) \cdot \|x_2 - x_1\|, \quad (3.15.4)$$

где  $x_1$  и  $x_2$  — произвольные точки, принадлежащие выпуклому множеству  $D$ , а  $F$  — гладкая функция. Это неравенство будет часто использоваться. Заметим, что, вообще говоря, оно не выполняется для невыпуклых множеств.

Если функция  $F$  непрерывно зависит от некоторого параметра  $\mu$ , то в силу теоремы 3.25,  $x^*$  также непрерывно зависит от  $\mu$ . Если зависимость  $F$  от  $\mu$  гладкая, то имеет место следующая теорема.

**Теорема 3.27.** Пусть функция  $F$ , как и в теореме выше,  $\mathbb{C}^r$ -гладко зависит от  $x \in D$  и параметра  $\mu$ . Тогда, неподвижная точка  $x^*$  также  $\mathbb{C}^r$ -гладко зависит от  $\mu$ .

Доказательство. Найдем первую производную  $dx^*/d\mu$ . Поскольку точка  $x^*$  является неподвижной, то

$$x^* = F(x^*, \mu).$$

Рассмотрим приращение  $\Delta\mu$  параметра  $\mu$ . Соответствующее приращение  $\Delta x^*$  координаты точки  $x^*$  определяется выражением

$$\Delta x^* = F'_x \Delta x^* + F'_\mu \Delta\mu + o(\|\Delta x^*\|) + o(\|\Delta\mu\|),$$

то есть

$$(I - F'_x) \Delta x^* = F'_\mu \Delta\mu + o(\|\Delta x^*\|) + o(\|\Delta\mu\|),$$

где  $I$  — единичная матрица. Так как  $\|F'_x\| \leq K < 1$ , то матрица  $(I - F'_x)$  является обратимой. Следовательно,

$$\Delta x^* = (I - F'_x)^{-1} F'_\mu \Delta\mu + o(\|\Delta x^*\|) + o(\|\Delta\mu\|),$$

то есть точка  $x^*$  гладко зависит от параметра  $\mu$ , а

$$\frac{dx^*}{d\mu} = (I - F'_x)^{-1} F'_\mu \Big|_{x=x^*(\mu)}. \quad (3.15.5)$$

Теперь можно показать, что точка  $x^*$   $\mathbb{C}^r$ -гладко зависит от  $\mu$ . Для этого достаточно продифференцировать выражение (3.15.5)  $(r-1)$  раз, соблюдая следующее правило:

$$\frac{d}{d\mu} = \frac{\partial}{\partial\mu} + \left( \frac{\partial}{\partial x} \right) \cdot \frac{dx^*}{d\mu} = \frac{\partial}{\partial\mu} + \left( \frac{\partial}{\partial x} \right) \cdot [(I - F'_x)^{-1} F'_\mu].$$

Теорема доказана.

Теорема 3.26 дает некоторое достаточное условие существования устойчивой неподвижной точки. Чтобы получить достаточное условие существования вполне неустойчивой неподвижной, нужно просто потребовать, чтобы формулы (3.15.2) и (3.15.3) выполнялись для обратного отображения  $F^{-1}$ .

В случае седловых неподвижных точек возникает трудность, связанная с тем, что вблизи такой точки нельзя найти область, которая бы отображалась в себя под действием  $F$ . Аналогично, нет и области, отображающейся в себя под действием отображения  $F^{-1}$ . Это легко увидеть из следующего примера:

$$\bar{x} = \lambda x, \quad \bar{y} = \gamma y, \quad 0 < \lambda < 1 < \gamma. \quad (3.15.6)$$

Чтобы избежать этой трудности, рассмотрим отображения в так называемом *перекрестном виде*.

**Определение 3.6.** Пусть  $D_1$  и  $D_2$  — некоторые множества, а  $P : D_1 \times D_2 \mapsto D_1$ ,  $Q : D_1 \times D_2 \mapsto D_2$  — некоторые функции. Пусть  $T$  является отображением, определяемым на некотором подмножестве в  $D_1 \otimes D_2$  (где  $\otimes$  означает прямое произведение). Мы говорим, что функции  $P$  и  $Q$  определяют отображение  $T$  в перекрестном виде, если точка  $(\bar{x}, \bar{y}) \in D_1 \otimes D_2$  является образом точки  $(x, y) \in D_1 \otimes D_2$  относительно отображения  $T$  тогда и только тогда, когда

$$\begin{aligned} \bar{x} &= P(x, \bar{y}), \\ \bar{y} &= Q(x, \bar{y}). \end{aligned} \quad (3.15.7)$$



Отображение  $T^\times$ , определяемое по формулам (3.15.7), называется *перекрестным отображением*. По построению,  $T^\times(D_1 \otimes D_2) \subseteq D_1 \otimes D_2$ .

В прямой форме отображение  $T$  задается в виде

$$\begin{aligned}\bar{x} &= F(x, y), \\ \bar{y} &= G(x, y).\end{aligned}$$

Из (3.15.7) вытекает, что

$$\begin{aligned}F(x, y) &= P(x, G(x, y)), \\ y &= Q(x, G(x, y)),\end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned}F'_x dx + F'_y dy &= (P'_x + P'_y G'_x) dx + P'_y G'_y dy, \\ dy &= (Q'_x + Q'_y G'_x) dx + Q'_y G'_y dy.\end{aligned}$$

Здесь производные функций  $F$  и  $G$  берутся по  $(x, y)$ , а производные функций  $P$  и  $Q$  — по  $(x, \bar{y})$ . Приравнивая коэффициенты при  $dy$  и  $dx$ , получаем формулы

$$\begin{aligned}G'_y &= (Q'_y)^{-1}, \\ G'_x &= -(Q'_y)^{-1} Q'_x, \\ F'_y &= P'_y (Q'_y)^{-1}, \\ F'_x &= P'_x - P'_y (Q'_y)^{-1} Q'_x\end{aligned}\tag{3.15.8}$$

и

$$\begin{aligned}Q'_y &= (G'_y)^{-1}, \\ Q'_x &= -(G'_y)^{-1} G'_x, \\ P'_y &= F'_y (G'_y)^{-1}, \\ P'_x &= F'_x - F'_y (G'_y)^{-1} G'_x.\end{aligned}\tag{3.15.9}$$

Заметим, что гладкое прямое отображение не всегда соответствует гладкому перекрестному отображению. В случае, когда  $(Q'_y)^{-1}$  не определено, отображения  $T$  может быть негладким (недостаточно гладким), или оно вообще может не быть взаимно однозначным. Однако, такие свойства перекрестного и прямого отображений сохраняются в случае, описанном ниже.

**Определение 3.7.** Отображение  $T$ , определенное, в перекрестной форме (3.15.7) посредством гладких функций  $P$  и  $Q$ , на прямом произведении

замкнутых выпуклых множеств  $D_1$  и  $D_2$  ( $D_1 \subset \mathbb{R}^n$ ,  $D_2 \subset \mathbb{R}^m$ ), называется седловым отображением, если

$$\begin{aligned}\|P'_x\|_o &< 1, \quad \|Q'_y\|_o < 1, \\ \|P'_y\|_o \|Q'_x\|_o &< (1 - \|P'_x\|_o)(1 - \|Q'_y\|_o),\end{aligned}\tag{3.15.10}$$

где  $\|\cdot\|_o = \sup_{(x,y) \in D_1 \times D_2} \|\cdot\|$ .

Пример. Перекрестное отображение, соответствующее отображению (3.15.6), находится тривиально:

$$\bar{x} = \lambda x, \quad y = \gamma^{-1} \bar{y}.$$

Поскольку  $0 \leq \lambda < 1$  и  $\gamma^{-1} < 1$ , то подмножества  $D_1$  и  $D_2$  можно рассматривать как интервалы  $[-\varepsilon, \varepsilon]$ , принадлежащие осям  $x$  и  $y$ , соответственно. Теперь область  $D_1 \otimes D_2$  отображается в себя под действием отображения  $T^\times$ . В данном случае  $P'_x = \lambda$ ,  $P'_y = 0$ ,  $Q'_x = 0$ ,  $Q'_y = \gamma^{-1}$ . Поэтому, так как  $\max\{\lambda, \gamma^{-1}\} < 1$ , выполняются условия (3.15.10), т. е. данное отображение является седловым. Аналогично, произвольное линейное отображение

$$\bar{x} = A^- x, \quad y = (A^+)^{-1} \bar{y}$$

такое, что  $\text{Spec} A^-$  лежит строго внутри единичной окружности, а  $\text{Spec} A^+$  — строго вне ее, также является седловым. Здесь  $\max\{\|A^-\|, \|(A^+)^{-1}\|\} \leq 1$ , а  $D_1$  и  $D_2$  представляют собой некоторые шары в пространствах  $x$  и  $y$ , соответственно.

При записи отображения  $T$  в прямой форме условия (3.15.10) перестают быть симметричными.

**Утверждение 3.1.** Для выполнения условия (3.15.10) достаточно, чтобы

$$\begin{aligned}\|F'_x\|_o &< 1, \quad \|(G'_y)^{-1}\|_o < 1, \\ \|F'_y (G'_y)^{-1}\|_o \cdot \|G'_x\|_o &< (1 - \|F'_x\|_o) \cdot (1 - \|(G'_y)^{-1}\|_o).\end{aligned}\tag{3.15.11}$$

Чтобы доказать это утверждение, заметим, что условие (3.15.10) вытекает из (3.15.9) в том случае, когда

$$\|(G'_y)^{-1}\|_o < 1$$

и

$$\begin{aligned} & \|F'_y(G'_y)^{-1}\|_o \|G'_x\|_o \|(G'_y)^{-1}\|_o \\ & \leq (1 - \|F'_x\|_o - \|F'_y(G'_y)^{-1}\|_o \|G'_x\|_o) \cdot (1 - \|(G'_y)^{-1}\|_o). \end{aligned}$$

Заметим, что эти неравенства вытекают из условий (3.15.11).

Первые два неравенства в (3.15.11) означают, что отображение  $T$  является растягивающим по координатам  $y$  и сжимающим по координатам  $x$ . Если производные  $F'_y$  и  $G'_x$  были бы равны нулю, как в рассмотренном выше случае линейного отображения, то этого было бы достаточно для того, чтобы отображение было седловым. Последнее неравенство в (3.15.11) означает просто, что искажение, вызванное производными  $F'_y$  и  $G'_x$ , несущественно.

**Теорема 3.28.** *Седловое отображение  $T$  имеет единственную неподвижную точку в  $D_1 \times D_2$ .*

Доказательство. Прежде всего заметим, что неподвижные точки прямого  $T$  и перекрестного  $T^\times$  отображений совпадают. Следовательно, нужно лишь показать, что  $T^\times$  является сжимающим отображением, и применить теорему 3.24.

Введем в  $D_1 \times D_2$  расстояние по следующей формуле

$$\rho((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \|x_2 - x_1\| + L\|y_2 - y_1\|, \quad (3.15.12)$$

где константа  $L$  выбирается таким образом, что

$$\frac{\|P'_y\|_o}{1 - \|Q'_y\|_o} < L < \frac{1 - \|P'_x\|_o}{\|Q'_x\|_o}. \quad (3.15.13)$$

Чтобы проверить, что отображение  $T^\times$  является сжимающим, заметим, что согласно (3.15.4)

$$\|P(x_2, \bar{y}_2) - P(x_1, \bar{y}_1)\| \leq \|P'_x\|_o \|x_2 - x_1\| + \|P'_y\|_o \|\bar{y}_2 - \bar{y}_1\|,$$

и

$$\|Q(x_2, \bar{y}_2) - Q(x_1, \bar{y}_1)\| \leq \|Q'_x\|_o \|x_2 - x_1\| + \|Q'_y\|_o \|\bar{y}_2 - \bar{y}_1\|$$

или

$$\|\bar{x}_2 - \bar{x}_1\| \leq \|P'_x\|_o \|x_2 - x_1\| + \|P'_y\|_o \|\bar{y}_2 - \bar{y}_1\|,$$

и

$$\|y_2 - y_1\| \leq \|Q'_x\|_o \|x_2 - x_1\| + \|Q'_y\|_o \|\bar{y}_2 - \bar{y}_1\|,$$

откуда получаем

$$\begin{aligned} & \|\bar{x}_2 - \bar{x}_1\| + L\|y_2 - y_1\| \\ & \leq (\|P'_x\|_o + L\|Q'_x\|_o) \|x_2 - x_1\| + (\|P'_y\|_o + L\|Q'_y\|_o) \|\bar{y}_2 - \bar{y}_1\| \\ & \leq K(\|x_2 - x_1\| + L\|\bar{y}_2 - \bar{y}_1\|), \end{aligned}$$

где

$$K = \max\{\|P'_x\|_o + L\|Q'_x\|_o, L^{-1}\|P'_y\|_o + \|Q'_y\|_o\}.$$

Тогда  $K < 1$ , в силу (3.15.13), и, следовательно, отображение  $T^\times$  является сжимающим, что и требовалось доказать.

Можно показать, что полученная неподвижная точка является седловой. Фактически, здесь можно использовать теорему 4.2 из следующей главы (как для самого отображения  $T$ , так и для его обратного  $T^{-1}$ ), тогда можно показать, что неподвижная точка седлового отображения имеет гладкие устойчивое и неустойчивое многообразия вида  $y = \psi(x)$  и  $x = \varphi(y)$  соответственно, где функции  $\psi(x)$  и  $\varphi(y)$  определены всюду на  $D_1$  и  $D_2$  соответственно.

Обсудим теперь абстрактный вариант принципа Банаха. Очевидно, что теорема 3.24 остается справедливой в случае, когда  $D$  является замкнутым подпространством любого банахова пространства  $X$ . Напомним, что линейное пространство  $X$  называется пространством Банаха, если оно полное, т. е. любая фундаментальная последовательность  $\{x_i\}_{i=1}^\infty$  элементов из  $X$  сходится: если для любого  $\epsilon$  существует  $m$  такое, что  $\|x_{n+m} - x_m\| \leq \epsilon$  для всех  $n \geq 0$ , то для некоторого элемента  $x^* \in X$

$$\lim_{i \rightarrow \infty} x_i = x^*.$$

Расстояние между точками пространства  $X$  определяется как

$$\text{dist}(x^1, x^2) = \|x^1 - x^2\|$$

где норма  $\|\cdot\|$  есть произвольная неотрицательная функция  $X \rightarrow R$  такая, что

$$\|x^1 + x^2\| \leq \|x^1\| + \|x^2\|$$

$$\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\| \quad \text{для любой скалярной величины } \lambda$$

$$\|x\| > 0 \quad \text{при } x \neq 0.$$

Евклидово пространство  $\mathbb{R}^n$  является примером банахова пространства. Другим важным примером является пространство  $H$  непрерывных функций  $x(t)|_{t \in [0, \tau]}$  (где  $x \in \mathbb{R}^n$ ) с нормой

$$\|x(t)\|_0 = \sup_{t \in [0, \tau]} \|x(t)\|$$

(мы обозначаем через  $\|\cdot\|_0$  норму в  $H$ , чтобы отличить ее от нормы в  $\mathbb{R}^n$ ). Пространство  $H$  полное, поскольку полным является пространство  $\mathbb{R}^n$ . Таким образом, теорема 3.24 выполняется для любого сжимающего оператора  $H \rightarrow H$ .

Например, доказательство теоремы 2.9 о существовании единственного решения краевой задачи вблизи седла состоит, главным образом, в проверке того, что правая часть интегрального уравнения (2.8.4) определяет сжимающий оператор на замкнутом  $\varepsilon$ -шаре  $D_\varepsilon : \|x(t)\|_0 \leq \varepsilon$  в  $H$  (здесь  $x(t) \equiv (u(t), v(t))$ ).

Аналогично, теорема 3.10 (о существовании решения краевой задачи вблизи седловой неподвижной точки) доказывается путем применения принципа Банаха к оператору, определенному на  $\varepsilon$ -шаре в банаховом пространстве последовательностей  $x = \{(u_0, v_0), (u_1, v_1), \dots, (u_k, v_k)\}$  с нормой

$$\|x\|_0 = \max_{i=0, \dots, k} \|u_i, v_i\|.$$

В теореме Адамара (теорема 3.9) принцип Банаха применяется к оператору  $\varphi \mapsto \tilde{\varphi}$ , определенному на банаховом пространстве непрерывных функций  $u = \varphi(v)$ , где  $v$  принадлежит  $\delta$ -окрестности нуля в пространстве  $\mathbb{R}^{n-k}$ , а  $u \in \mathbb{R}^k$ , с нормой

$$\|\varphi\|_0 = \sup_{\|v\| \leq \delta} \|\varphi(v)\|. \quad (3.15.14)$$

В действительности, рассматриваемый оператор определен (см. шаг 1 доказательства теоремы) на подпространстве  $D$  банахова пространства, состоящего из гладких функций  $\varphi$ , удовлетворяющих неравенствам (3.6.4), (3.6.5). Данное подмножество не является замкнутым (последовательность гладких функций может сходиться в норме (3.15.14) к негладкой). Поэтому теорема 3.24 не гарантирует то, что неподвижная точка  $\varphi^*$  принадлежит  $D$ , но  $\varphi^*$  лежит в замыкании подпространства  $D$ : в пространстве непрерывных функций, удовлетворяющих условию Липшица (3.6.3) (гладкость  $\varphi^*$  была доказана позднее с использованием дополнительных аргументов).

Теоремы 3.25 и 3.27 о зависимости неподвижной точки  $x^*$  от параметров также остаются справедливыми, когда  $x$  и  $\mu$  становятся элементами абстрактных банаховых пространств  $X$  и  $M$  соответственно. Чтобы пояснить утверждение теоремы 3.27, напомним следующие определения.

Для отображения  $f : Y \rightarrow X$  (где  $Y$  и  $X$  — банаховы пространства) производная  $f'(y)$  в точке  $y \in Y$  есть (однозначно определенный) линейный оператор  $f'(y) : \Delta y \in Y \mapsto \Delta x \equiv f'(y)\Delta y \in X$  такой, что

$$\limsup_{\|\Delta y\| \rightarrow 0} \frac{\|f(y + \Delta y) - f(y) - f'(y)\Delta y\|}{\|\Delta y\|} = 0.$$

Отображение  $f$  будет *гладким* на подпространстве  $D$  пространства  $Y$ , если производная  $f'(y)$  непрерывно зависит от  $y$  и равномерно ограничена для всех значений  $y \in D$  в смысле обычной нормы линейного оператора:

$$\|A\| = \sup_{\|\Delta y\|=1} \|A\Delta y\|.$$

С такой нормой пространство ограниченных линейных операторов  $Y \rightarrow X$  представляет собой банахово пространство. Производная  $f'(y)$  зависит от точки  $y \in Y$ , следовательно, можно рассматривать вторую производную, которая является линейным оператором  $Y \rightarrow (Y \rightarrow X)$ , и так далее:  $r$ -я производная представляет собой индуктивно определенный линейный оператор  $\underbrace{Y \rightarrow (Y \rightarrow (\dots (Y \rightarrow X) \dots))}_r$ .

Очевидно,  $r$ -ю производную функции  $f^{(r)}$  можно рассматривать как симметричный полилинейный оператор  $Y^r \rightarrow X$  такой, что

$$f(y + \Delta y) = f(y) + f'(y)\Delta y + \dots + \frac{1}{r!} f^{(r)}(y)(\Delta y)^r + o(\|\Delta y\|^r).$$

Функция  $f$  является  $\mathbb{C}^r$ -гладкой на подмножестве  $D \subseteq Y$ , если при каждом  $k \leq r$  ее  $k$ -я производная  $f^{(k)}(y)$  непрерывно зависит от  $y$  и равномерно ограничена как оператор  $Y^k \rightarrow X$ , то есть

$$\sup_{y \in D, \|\Delta y_1\| = \dots = \|\Delta y_k\| = 1} \|f^{(k)}(y)\Delta y_1 \cdots \Delta y_k\|_X$$

является конечным.

Например, для любой  $\mathbb{C}^r$ -гладкой функции  $g$ , заданной на  $\mathbb{R}^n$ , оператор  $x(t) \mapsto g(x(t))$ , действующий на пространстве  $H$  непрерывных функций

$x(t)_{t \in [0, \tau]}$ , является  $\mathbb{C}^r$ -гладким. Ограниченный линейный оператор является  $\mathbb{C}^r$ -гладким при любом значении  $r$ . Суперпозиция гладких операторов является оператором той же гладкости. В частности, оператор  $H \rightarrow H$ , отображающий непрерывную функцию  $x(t)_{t \in [0, \tau]}$  в

$$\bar{x}(t) = \int_0^t \psi(s)g(x(s), s)ds$$

является  $\mathbb{C}^r$ -гладким для любой непрерывной функции  $\psi$  и любой  $\mathbb{C}^r$ -гладкой по  $x$  и непрерывной по  $s$  функции  $g$ . Гладкость операторов такого сорта будет использована в главе 5 при доказательстве гладкости инвариантных многообразий с помощью теоремы 3.27.

## ГЛАВА 4

# Инвариантные торы

Понятие инвариантного тора возникает в нелинейной динамике при изучении автоколебательных систем с периодическим возмущением, а также взаимодействующих автоколебательных систем. Ограничимся здесь рассмотрением первого случая, то есть неавтономных систем следующего вида

$$\dot{x} = X(x) + \mu p(x, t), \quad (4.0.1)$$

где  $x \in \mathbb{R}^n$ , а  $p(x, t)$  — периодическая функция с периодом  $2\pi$  по  $t$ . Полагаем, что система

$$\dot{x} = X(x) \quad (4.0.2)$$

обладает грубой периодической траекторией  $L$  с периодом  $\tau$ . Фазовым пространством системы (4.0.1) является пространство  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{S}^1$ , где  $\mathbb{S}^1$  — окружность длиной  $2\pi$ . В принципе, систему (4.0.1) можно привести к автономной системе

$$\begin{aligned} \dot{x} &= X(x) + \mu p(x, \theta), \\ \dot{\theta} &= 1, \end{aligned} \quad (4.0.3)$$

в пространстве  $\mathbb{R}^{n+1}$ , где  $\theta$  — циклическая переменная, определенная по модулю  $2\pi$ . Особенностью системы (4.0.1) и, соответственно системы (4.0.3), является наличие при  $\mu = 0$  (в этом случае первое и второе уравнения системы (4.0.3) становятся независимыми) у обеих систем двумерного инвариантного тора  $\mathbb{T}_0^2: L \times \mathbb{S}^1$ . Ниже будет показано, что при всех достаточно малых значениях  $\mu$  также существует гладкий инвариантный тор  $\mathbb{T}_\mu^2$ , близкий  $\mathbb{T}_0^2$ . Для этого используется критерий существования устойчивых торов, предложенный Афраимовичем и Л. Шильниковым [2, 3] и называемый *принципом кольца*. Кроме того, этот принцип применим в случае нескольких циклических переменных, в связи с чем его можно использовать для неавтономных систем, возмущаемых квазипериодической внешней силой.

Затем исследуется поведение траекторий на двумерном инвариантном торе  $\mathbb{T}_\mu^2$ . В данном случае задачу можно свести к исследованию ориентируемого отображения Пуанкаре окружности. Наиболее важные результаты по теории таких отображений были получены в пионерских работах Пуанкаре и Данжуа. В разделе 4.4 представлены основные элементы этой теории, поскольку она дает математически корректное объяснение некоторых задач о синхронизации колебаний.

#### 4.1. Неавтономные системы

Формально  $n$ -мерная неавтономная периодическая система записывается в виде

$$\dot{x} = F(x, t), \quad (4.1.1)$$

где  $F(x, t + 2\pi) = F(x, t)$ . Предполагается, что условия существования и единственности решения выполняются в пространстве  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^1$  или в  $D \times \mathbb{R}^1$ , где  $D$  представляет собой некоторую область в пространстве  $\mathbb{R}^n$ . Положим, что при любых начальных условиях  $(x_0, t_0)$  решение можно продолжить на интервал  $[t_0, t_0 + 2\pi]$ . Многие задачи нелинейной динамики, связанные с исследованием колебаний с периодическим возмущением, сводятся к изучению таких систем. Например, уравнение Ван-дер-Поля

$$\ddot{x} + \mu(x^2 - 1)\dot{x} + \omega_0^2 x = A \sin \omega t,$$

уравнение Дуффинга

$$\ddot{x} + h\dot{x} + \alpha x + \beta x^3 = A \sin \omega t,$$

и так далее.

В целом, систему (4.1.1) можно расширить до автономной путем введения новой циклической переменной  $\theta$  такой, чтобы  $\dot{\theta} = 1$ . Но для этого необходимо, чтобы обе переменные  $x$  и  $\theta$  имели одинаковый статус, то есть функция  $F(x, \theta)$  должна быть  $C^r$ -гладкой ( $r \geq 1$ ) относительно всех своих аргументов. Особенность неавтономных систем заключается в том, что функция  $F$  считается непрерывной лишь по  $t$ .

В принципе, изучение системы (4.1.1) сводится к исследованию диффеоморфизма, гладкость которого относительно  $x$  равна гладкости функции  $F$ , при этом полагается, что все производные функции  $F$  по  $x$  являются непрерывными функциями от  $t$ . Вследствие периодичности функции  $F$  по

$t$  траектории точек  $(x, t)$  и  $(x, t + 2\pi m)$ , где  $m \in \mathbb{Z}$ , являются тождественными. Следовательно, отображая плоскость  $t = 0$  в плоскость  $t = 2\pi$  вдоль решений системы (4.1.1), как показано на рис. 4.1.1, получаем соответствующий диффеоморфизм.

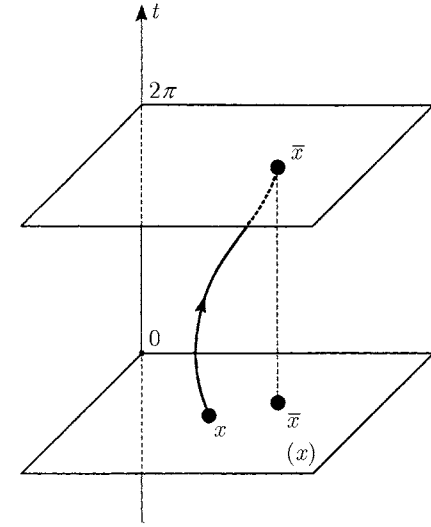


Рис. 4.1.1. Геометрическая иллюстрация построения диффеоморфизма вдоль траекторий  $2\pi$ -периодической неавтономной системы. Точки пересечения траектории неавтономной системы с плоским сечением через каждые  $2\pi$  периода времени содержат траекторию диффеоморфизма

Пусть  $\varphi(t, x)$  является решением системы (4.1.1), проходящим через точку  $x$  в момент времени  $t = 0$ . Тогда, рассматриваемый диффеоморфизм имеет вид

$$\bar{x} = f(x), \quad (4.1.2)$$

где  $f(x) = \varphi(2\pi, x)$ .

Возможность такого приведения является одной из особенностей автономных систем<sup>1</sup>. Заметим, что утверждение о существовании такого гло-

<sup>1</sup>Заметим, что изучение систем с кусочно-непрерывной правой частью  $F(x, t)$ , имеющей конечное число точек разрыва непрерывности за период, также можно привести к такому диффеоморфизму.

бального сечения на фазовом пространстве автономной системы, в общем случае, не является верным.

Очевидно, что в фазовом пространстве  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{S}^1$  (или  $D \times \mathbb{S}^1$ ) периодическая траектория, проходящая  $k$  раз через сечение  $t = 0$ , соответствует  $k$ -периодической орбите  $(x_0, \dots, x_{k-1})$  диффеоморфизма.

Напомним определение периодической точки диффеоморфизма. Точка  $x_0$  называется периодической с периодом  $k$ , если  $x_0$  является неподвижной точкой для отображения  $\bar{x} = f^k(x)$ , но не является неподвижной точкой для  $\bar{x} = f^p(x)$ , при  $p < k$ . Наряду с  $x_0$  точки  $x_p$ , где  $x_p = f^p(x_0)$ ,  $p = 1, \dots, k-1$ , также являются периодическими. Очевидно, что  $x_{p+1} = f(x_p)$ , а  $x_0 = f(x_{k-1})$ . Каждая точка  $x_p$  соответствует решению  $\varphi_p(t)$  ( $p = 0, \dots, k-1$ ), период которого равен  $2\pi k$ . Любые два таких решения тождественны с точностью до сдвига по фазе, кратного  $2\pi$ :

$$\varphi_p(t) = \varphi_0(t + 2\pi p),$$

Для установления существования неподвижной точки полезен следующий критерий. Пусть  $D$  является ограниченной областью, гомеоморфной стандартному шару  $\{x: \|x\| \leq 1\}$ . В этом случае также говорят, что  $D$  — шар.

**Теорема 4.1 (Критерий Брауэра).** Пусть  $T$  — непрерывное отображение шара  $D$  в себя, то есть  $TD \subset D$ . Тогда,  $T$  имеет, по крайней мере, одну неподвижную точку.

Критерий Брауэра, как правило, используется в следующих случаях. Пусть все интегральные кривые системы, определенной в области  $D \times \mathbb{R}^1$ , входят в эту область на границе  $\overline{D} \times \mathbb{R}^1$ . Тогда соответствующий диффеоморфизм (4.1.2) удовлетворяет теореме 4.1 и, следовательно, сама система имеет, по крайней мере, одну периодическую траекторию.

Вернемся к задаче о системах с периодическим возмущением. В данном случае исследование системы (4.0.1) сводится к изучению семейства диффеоморфизмов вида

$$\bar{x} = f(x, \mu), \tag{4.1.3}$$

где  $f$  задается соотношением

$$f(x, \mu) = f_0(x) + \mu f_1(x, \mu). \tag{4.1.4}$$

Заметим, что при  $\mu = 0$  диффеоморфизм (4.1.3) представляет собой отображение сдвига на  $2\pi$  вдоль траекторий автономной системы (4.0.2) или, что

то же самое, отображение из  $\theta = 0$  в  $\theta = 2\pi$ , определенное вдоль решений системы

$$\begin{aligned} \dot{x} &= X(x), \\ \dot{\theta} &= 1. \end{aligned} \tag{4.1.5}$$

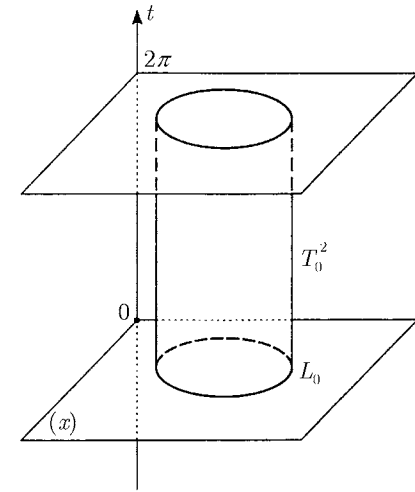
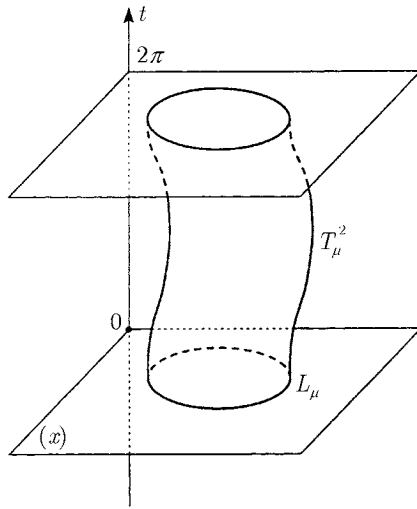


Рис. 4.1.2. Инвариантный тор  $T_0^2$  расширенной системы (4.1.5) при  $\mu = 0$  представлен в виде прямого произведения  $L_0 \times \mathbb{S}^1$

Согласно сделанному выше предположению, система (4.0.2) имеет периодическое решение  $L$  с периодом  $\tau$ , уравнение которого имеет вид  $x = \varphi(t)$ . Следовательно, система (4.0.3) имеет «прямолинейный» инвариантный тор  $T_0^2$  с основанием  $\{L: x = \varphi(\theta_1), 0 \leq \theta_1 \leq \tau\}$  (рис. 4.1.2). Таким образом, диффеоморфизм (4.1.3) при  $\mu = 0$  имеет инвариантную гладкую замкнутую кривую  $L_0$ . Ниже покажем, что если  $L_0$  является устойчивым решением системы (4.0.2), то при любом достаточно малом значении  $\mu$  система (4.0.3) имеет гладкий инвариантный тор  $T_\mu^2$  близкий к  $T_0^2$ , см. рис. 4.1.3. Это связано с тем, что при любом достаточно малом значении  $\mu$ , диффеоморфизм (4.1.3) имеет гладкую инвариантную замкнутую кривую  $L_\mu$ .

Рис. 4.1.3. Гладкий инвариантный тор  $T_\mu^2$  возмущенной системы

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = X(x, t), \quad (4.1.6)$$

где положим, что  $X(x, t)$  является квазипериодической функцией от  $t$ . Следовательно,

$$X(x, t) = \sum_{k_1=-\infty}^{+\infty} \cdots \sum_{k_{m+1}=-\infty}^{+\infty} a_{k_1 \dots k_{m+1}}(x) e^{i(k_1 \Omega_1 + \dots + k_{m+1} \Omega_{m+1})t}, \quad (4.1.7)$$

где  $k = (k_1, \dots, k_{m+1})$  представляет собой вектор, состоящий из целых чисел, а  $\Omega = (\Omega_1, \dots, \Omega_{m+1})$  — вектор, состоящий из вещественных чисел. Допустим также, что последовательность  $\Omega_1, \dots, \Omega_{m+1}$  задает базис частот, то есть

$$(k, \Omega) = k_1 \Omega_1 + \dots + k_{m+1} \Omega_{m+1} \neq 0 \quad (4.1.8)$$

для любых значений  $k \neq 0$ . Заметим, что если  $X(x, t) \in \mathbb{C}^r$  ( $\mu \geq 1$ ), эту функцию можно представить в виде

$$X(x, t) = X(x, \theta_1, \dots, \theta_{m+1}), \quad (4.1.9)$$

где функция  $X(x, \theta_1, \dots, \theta_{m+1}) \in \mathbb{C}^r$  является периодической по каждому аргументу  $\theta_j = \Omega_j t$  с периодом  $2\pi$ . Таким образом, систему (4.1.6) можно привести к следующей автономной системе:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= X(x, \theta), \\ \dot{\theta} &= \Omega, \end{aligned} \quad (4.1.10)$$

где  $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_{m+1})$ . Фазовым пространством системы (4.1.10) является пространство  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{T}^{m+1}$ . Более того, изучение системы (4.1.10) можно привести к исследованию отображения

$$\begin{aligned} \bar{x} &= f(x, \theta), \\ \bar{\theta} &= \theta + \omega \pmod{2\pi}, \end{aligned} \quad (4.1.11)$$

для сечения  $\theta_{m+1} = 0$ . Здесь  $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_m)$ ,  $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_m)$ , где  $\omega_j = 2\pi \Omega_j / \Omega_{m+1}$  ( $j = 1, \dots, m$ ). Фазовым пространством диффеоморфизма (4.1.11) является пространство  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{T}^m$ . При этом  $\mathbb{T}^m$  удобнее представить в как  $m$ -мерный куб

$$\left\{ (\theta_1, \dots, \theta_m) \mid 0 \leq \theta_j \leq 2\pi, \quad j = (1, \dots, m) \right\},$$

все точки которого, лежащие на противоположных ребрах, тождественны, то есть

$$(\theta_1, \dots, \theta_{j-1}, 0, \theta_{j+1}, \dots, \theta_m) \equiv (\theta_1, \dots, \theta_{j-1}, 2\pi, \theta_{j+1}, \dots, \theta_m).$$

Поскольку вторая группа уравнений системы (4.1.11) не зависит от  $x$ , отображение

$$\bar{\theta} = \theta + \omega \pmod{2\pi}, \quad (4.1.12)$$

определено на торе  $\mathbb{T}^m$  и является диффеоморфизмом. Это отображение в силу условий (4.1.8), накладываемых на вектор  $\Omega$ , не имеет ни неподвижных точек, ни инвариантных торов меньшей размерности. Иными словами,  $\mathbb{T}^m$  — минимальное множество. Таким образом, простейшими объектами, возникающими на первом этапе изучения объединенного отображения (4.1.11), являются  $m$ -мерные инвариантные торы вида  $x = h(\theta)$ , соответствующие квазипериодическим решениям с базисом частот  $(\omega_1, \dots, \omega_m)$ .

В разделе 4.2 указан довольно удобный критерий существования инвариантного тора для достаточно большого класса диффеоморфизмов.

**Замечание.** Как было показано, неавтономную систему с периодической или квазипериодической зависимостью от времени можно естественным образом расширить до автономной системы большей размерности. Увеличение размерности соответствует числу независимых частот. Однако в общем случае такое расширение для систем с произвольной зависимостью от времени невозможно. Кроме того, в данном случае прямое увеличение размерности фазового пространства не принесет пользы, поскольку поведение траекторий при  $t \rightarrow +\infty$  необходимо изучать на некомпактном фазовом пространстве. В противном случае блуждающее множество оказывается пустым. Следовательно, исследование неавтономных систем с общей зависимостью от времени требует принципиально нового подхода. Такой подход для класса неавтономных двумерных систем был разработан Лерманом и Л. Шильниковым [41].

## 4.2. Теорема о существовании инвариантного тора.

### Принцип кольца

Рассмотрим диффеоморфизм  $T$ :

$$\begin{aligned}\bar{x} &= f(x, \theta), \\ \bar{\theta} &= \theta + g_0(x, \theta) = g(x, \theta) \pmod{2\pi},\end{aligned}\tag{4.2.1}$$

где  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $\theta \in \mathbb{T}^m$ ,  $n \geq 1$ ,  $m \geq 1$ , а гладкие функции  $f$  и  $g$  являются  $2\pi$ -периодическими по  $\theta$ .

Пусть  $\mathbb{K}$  — кольцо, описываемое выражением

$$\mathbb{K} = \left\{ (x, \theta) \mid \|x\| \leq \delta, \theta \in \mathbb{T}^m \right\},$$

Введем следующее обозначение: для векторнозначной или матричнозначной функции  $\varphi(x, \theta)$

$$\|\varphi\|_o = \sup_{(x, \theta) \in \mathbb{K}} \|\varphi(x, \theta)\|,$$

где  $\|\cdot\|$  — стандартная евклидова норма.

### Предположение 4.1. *Отображение*

$$\bar{x} = f(x, \theta)$$

является сжатием для любого фиксированного  $\theta$ , то есть

$$\left\| \frac{\partial f}{\partial x} \right\|_o < 1.\tag{4.2.2}$$

### Предположение 4.2. *Отображение*

$$\bar{\theta} = \theta + g_0(x, \theta), \pmod{2\pi}\tag{4.2.3}$$

является диффеоморфизмом для любого фиксированного  $x$ . В частности, из этого следует, что

$$1 \leq \left\| \left( \frac{\partial g}{\partial \theta} \right)^{-1} \right\|_o \leq C < \infty.\tag{4.2.4}$$

**Теорема 4.2 (Принцип кольца).** При сделанных выше предположениях, если

$$1 - \left\| \left( \frac{\partial g}{\partial \theta} \right)^{-1} \right\|_o \cdot \left\| \frac{\partial f}{\partial x} \right\|_o > 2 \sqrt{\left\| \left( \frac{\partial g}{\partial \theta} \right)^{-1} \right\|_o \cdot \left\| \frac{\partial g}{\partial x} \right\|_o \cdot \left\| \frac{\partial f}{\partial \theta} \left( \frac{\partial g}{\partial \theta} \right)^{-1} \right\|_o},\tag{4.2.5}$$

то диффеоморфизм (4.2.1) имеет  $m$ -мерный инвариантный тор в кольце  $\mathbb{K}$ , который содержит все  $\omega$ -предельные точки всех положительных полу-траекторий, расположенных в  $\mathbb{K}$ . Тор определяется графиком  $x = h^*(\theta)$ , где  $h^*$  —  $\mathbb{C}^1$ -гладкая  $2\pi$ -периодическая функция.

Доказательство. Согласно предположению 4.2 диффеоморфизм (4.2.1) можно представить в перекрестной форме

$$\begin{aligned}\bar{x} &= F(x, \bar{\theta}), \\ \theta &= G(x, \bar{\theta}), \pmod{2\pi}.\end{aligned}\tag{4.2.6}$$



Заметим, что

$$\begin{aligned} F(x, \bar{\theta}) &\equiv f(x, G(x, \bar{\theta})), \\ \bar{\theta} &\equiv g(x, G(x, \bar{\theta})). \end{aligned} \quad (4.2.7)$$

Из данной формулы следует, что производные функций  $F$  и  $G$  имеют следующие оценки:

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial F}{\partial x} \right\|_o &\leq \left\| \frac{\partial f}{\partial x} \right\|_o + \left\| \frac{\partial g}{\partial x} \right\|_o \cdot \left\| \frac{\partial f}{\partial \theta} \left( \frac{\partial g}{\partial \theta} \right)^{-1} \right\|_o, \\ \left\| \frac{\partial F}{\partial \bar{\theta}} \right\|_o &= \left\| \frac{\partial f}{\partial \theta} \left( \frac{\partial g}{\partial \theta} \right)^{-1} \right\|_o, \\ \left\| \frac{\partial G}{\partial x} \right\|_o &\leq \left\| \frac{\partial g}{\partial x} \right\|_o \cdot \left\| \left( \frac{\partial g}{\partial \theta} \right)^{-1} \right\|_o, \\ \left\| \frac{\partial G}{\partial \bar{\theta}} \right\|_o &= \left\| \left( \frac{\partial g}{\partial \theta} \right)^{-1} \right\|_o. \end{aligned} \quad (4.2.8)$$

Можно проверить, что на основании приведенных оценок и неравенства (4.2.5) получаем следующее неравенство:

$$\sqrt{\left\| \frac{\partial F}{\partial x} \right\|_o \cdot \left\| \frac{\partial G}{\partial \bar{\theta}} \right\|_o} + \sqrt{\left\| \frac{\partial F}{\partial \bar{\theta}} \right\|_o \cdot \left\| \frac{\partial G}{\partial x} \right\|_o} < 1. \quad (4.2.9)$$

В частности

$$\left\| \frac{\partial F}{\partial x} \right\|_o \cdot \left\| \frac{\partial G}{\partial \bar{\theta}} \right\|_o < 1.$$

В соответствие с предположением 4.2 для каждого фиксированного  $x$  отображение  $\theta = G(x, \bar{\theta})$  является диффеоморфизмом тора  $\mathbb{T}^m$  на себя и, следовательно, оно не может быть сжимающим. Таким образом, максимум нормы его матрицы Якоби обязательно больше 1:

$$\left\| \frac{\partial G}{\partial \bar{\theta}} \right\|_o \geq 1.$$

Из этого, в свою очередь, следует, что

$$\left\| \frac{\partial F}{\partial x} \right\|_o < 1.$$

Очевидно, что из формулы (4.2.9) получаем неравенство

$$\left\| \frac{\partial F}{\partial x} \right\|_o + \sqrt{\left\| \frac{\partial F}{\partial \bar{\theta}} \right\|_o \cdot \left\| \frac{\partial G}{\partial x} \right\|_o} < 1. \quad (4.2.10)$$

Введем обозначение

$$\mathcal{L} = \sqrt{\left\| \frac{\partial F}{\partial \bar{\theta}} \right\|_o \cdot \left( \left\| \frac{\partial G}{\partial x} \right\|_o \right)^{-1}} \quad (4.2.11)$$

(в частном случае, когда  $\frac{\partial G}{\partial x} \equiv 0$  в качестве значения  $\mathcal{L}$  выбирается просто достаточно большое число). Из (4.2.9) немедленно следует, что

$$\mathcal{L} \left\| \frac{\partial G}{\partial x} \right\|_o < 1, \quad (4.2.12)$$

$$\sup_{(x, \bar{\theta})} \left\{ \left\| \frac{\partial F}{\partial x} \right\|_o \cdot \left\| \frac{\partial G}{\partial \bar{\theta}} \right\|_o \right\} \leq \left( 1 - \mathcal{L} \left\| \frac{\partial G}{\partial x} \right\|_o \right) \left( 1 - \frac{1}{\mathcal{L}} \left\| \frac{\partial F}{\partial \bar{\theta}} \right\|_o \right), \quad (4.2.13)$$

$$\sup_{(x, \bar{\theta})} \left\{ \left\| \frac{\partial F}{\partial x} \right\|_o \cdot \left\| \frac{\partial G}{\partial \bar{\theta}} \right\|_o \right\} < \left( 1 - \mathcal{L} \left\| \frac{\partial G}{\partial x} \right\|_o \right)^2, \quad (4.2.14)$$

а из неравенства (4.2.10) получаем

$$\left\| \frac{\partial F}{\partial x} \right\|_o < 1 - \mathcal{L} \left\| \frac{\partial G}{\partial x} \right\|_o. \quad (4.2.15)$$

Дальнейшее доказательство строится только на этих неравенствах. Обозначим через  $H(\mathcal{L})$  пространство вектор-функций  $x = h(\theta)$ , для графика которых в кольце  $\mathbb{K}$  справедливо неравенство  $\|h\| \leq \eta_0$ , где  $h$  удовлетворяет условию Липшица:

$$\|h(\theta + \Delta\theta) - h(\theta)\| \leq \mathcal{L} \|\Delta\theta\|. \quad (4.2.16)$$

Пусть  $H(\mathcal{L})$  имеет обычную норму

$$\text{dist}(h_1, h_2) = \|h_1 - h_2\| = \sup_{\theta} \|h_1(\theta) - h_2(\theta)\|.$$

Хорошо известно, что  $H(\mathcal{L})$  замкнуто на банаховом пространстве ограниченных непрерывных функций  $h(\theta)$ .

**Лемма 4.10.** Если условия (4.2.12) и (4.2.13) выполняются, то отображение  $T$  порождает оператор  $\mathcal{T}: H(\mathcal{L}) \rightarrow H(\mathcal{L})$  (то есть образ графика липшицевой функции  $x = h(\theta)$  при отображении  $T$  представляет собой график функции  $\bar{x} = \tilde{h}(\bar{\theta})$ , который удовлетворяет условию Липшица при том же значении постоянной  $\mathcal{L}$ ).

Действительно, пусть  $h \in H(\mathcal{L})$ . В первую очередь необходимо доказать, что образ  $T\{x = h(\theta)\}$  является поверхностью вида  $\bar{x} = \tilde{h}(\bar{\theta})$  с некоторой однозначной функцией  $\tilde{h}$ . Другими словами, необходимо показать, что для всякого  $\bar{\theta}$  существует единственное значение  $\bar{x}$  (которое задает  $\tilde{h}(\bar{\theta})$ ), такое что  $(\bar{x}, \bar{\theta}) = T(h(\theta), \theta)$  при некотором значении  $\theta$ . Это эквивалентно (см. 4.2.6) существованию единственного решения следующего уравнения для  $\theta$  при любом значении  $\bar{\theta}$ :

$$\theta = G(h(\theta), \bar{\theta}). \quad (4.2.17)$$

При каждом фиксированном значении  $\bar{\theta}$  это уравнение можно рассматривать как уравнение на неподвижную точку отображения

$$\theta \mapsto G(h(\theta), \bar{\theta}) \quad (4.2.18)$$

тора в себя. Существование и единственность искомой неподвижной точки будет следовать из принципа Банаха, если мы докажем, что данное отображение является сжатием. Однако это является простым следствием условий (4.2.12) и (4.2.16): при фиксированном значении  $\bar{\theta}$  и произвольном  $\Delta\theta$  получаем, что

$$\|\Delta x\| \equiv \|h(\theta + \Delta\theta) - h(\theta)\| \leq \mathcal{L}\|\Delta\theta\|,$$

и

$$G(x + \Delta x, \bar{\theta}) - G(x, \bar{\theta}) = \left( \int_0^1 \frac{\partial G}{\partial x}(x + s\Delta x, \bar{\theta}) ds \right) \Delta x,$$

откуда

$$\|G(h(\theta + \Delta\theta), \bar{\theta}) - G(h(\theta), \bar{\theta})\| \leq \mathcal{L} \left\| \frac{\partial G}{\partial x} \right\| \|\Delta\theta\|.$$

На основании неравенства (4.2.12) заключаем, что рассматриваемое отображение действительно является сжатием.

Таким образом, для всякого  $\bar{\theta}$  существует единственное значение  $\theta$ , для которого выполняется неравенство (4.2.17). Поскольку неподвижная точка

сжимающего отображения непрерывно зависит от параметра (в данном случае  $\bar{\theta}$ ), величина  $\theta$  также непрерывно зависит от  $\bar{\theta}$ .

Подставляя величину  $\theta$  в первое равенство системы (4.2.6), получаем функцию  $\tilde{h} = \tilde{T}h$  вида

$$\bar{x} \equiv \tilde{h}(\bar{\theta}) = F(h(\theta(\bar{\theta})), \bar{\theta}). \quad (4.2.19)$$

Из уравнения видно, что функция  $\tilde{h}$  непрерывна. Теперь покажем, что  $\tilde{h}$  удовлетворяет условию Липшица. Достаточно доказать, что при каждом значении  $\bar{\theta}$  имеет место неравенство

$$\limsup_{\Delta\bar{\theta} \rightarrow 0} \frac{\|\Delta\bar{x}\|}{\|\Delta\bar{\theta}\|} \leq \mathcal{L}. \quad (4.2.20)$$

Для доказательства этого заметим, что согласно системе (4.2.6)

$$\begin{aligned} \Delta\bar{x} &= F_x \Delta x + F_{\bar{\theta}} \Delta\bar{\theta}, \\ \Delta\theta &= G_x \Delta x + G_{\bar{\theta}} \Delta\bar{\theta}, \end{aligned} \quad (4.2.21)$$

где

$$F_x = \int_0^1 \frac{\partial F}{\partial x}(x + s\Delta x, \bar{\theta} + s\Delta\bar{\theta}) ds,$$

и т. д. Мы полагаем, что точки  $(x, \theta)$  и  $(x + \Delta x, \theta + \Delta\theta)$  принадлежат  $\{x = h(\theta)\}$  (следовательно, точки  $(\bar{x}, \bar{\theta})$  и  $(\bar{x} + \Delta\bar{x}, \bar{\theta} + \Delta\bar{\theta})$  принадлежат  $\{\bar{x} = \tilde{h}(\bar{\theta})\}$ ). Таким образом,  $\|\Delta x\| \leq \mathcal{L}\|\Delta\theta\|$ . Подставляя это неравенство в систему (4.2.21), находим

$$\|\Delta\bar{x}\| \leq \mathcal{L} \left\{ \frac{1}{\mathcal{L}} \|F_{\bar{\theta}}\| + \frac{\|F_x\| \cdot \|G_{\bar{\theta}}\|}{1 - \mathcal{L}\|G_x\|} \right\} \|\Delta\bar{\theta}\|.$$

В пределе получаем

$$\limsup_{\Delta\bar{\theta} \rightarrow 0} \frac{\|\Delta\bar{x}\|}{\|\Delta\bar{\theta}\|} \leq \mathcal{L} \left\{ \frac{1}{\mathcal{L}} \left\| \frac{\partial F}{\partial \bar{\theta}} \right\| + \frac{\left\| \frac{\partial F}{\partial x} \right\| \cdot \left\| \frac{\partial G}{\partial \bar{\theta}} \right\|}{1 - \mathcal{L} \left\| \frac{\partial G}{\partial x} \right\|} \right\}. \quad (4.2.22)$$

Таким образом, согласно неравенству (4.2.13), функция  $\tilde{h}$  удовлетворяет условию Липшица, что и требовалось доказать.

Выше был определен оператор  $\mathcal{T}: H(\mathcal{L}) \rightarrow H(\mathcal{L})$ . Теперь покажем, что он является сжимающим. Поскольку  $H(\mathcal{L})$  — замкнутое подмножество банахова пространства, принцип Банаха гарантирует существование для оператора  $T$  на пространстве  $H(\mathcal{L})$  единственной неподвижной точки  $h^*$ . Таким образом, имеет место равенство  $\tilde{h}^* = h^*$ , из которого по определению оператора  $\tilde{T}$  следует, что образ поверхности  $\{x = h^*\theta\}$  при отображении  $T$  представляет собой ту же поверхность; то есть эта поверхность является искомым инвариантным многообразием (для завершения доказательства необходимо установить гладкость функции  $h^*$ ).

Пусть  $h_1$  и  $h_2$  представляют собой два элемента подпространства  $H(\mathcal{L})$ , а  $\tilde{h}_1$  и  $\tilde{h}_2$  — их образы, полученные под действием отображения  $\tilde{T}$ . При фиксированном  $\bar{\theta}$  рассмотрим точки  $(\bar{x}_1, \bar{\theta})$  и  $(\bar{x}_2, \bar{\theta})$ , в которых поверхность с постоянным значением параметра  $\bar{\theta}$  пересекает поверхности  $\{\bar{x} = \tilde{h}_1(\bar{\theta})\}$  и  $\{\bar{x} = \tilde{h}_2(\bar{\theta})\}$ , соответственно. Поскольку эти поверхности по определению являются образами поверхностей  $\{x = h_1(\theta)\}$  и  $\{x = h_2(\theta)\}$ , полученных при помощи отображения  $T$ , существуют такие точки  $(x_1 = h_1(\theta_1), \theta_1)$  и  $(x_2 = h_2(\theta_2), \theta_2)$ , что  $T(x_1, \theta_1) = (\bar{x}_1, \bar{\theta})$ , и  $T(x_2, \theta_2) = (\bar{x}_2, \bar{\theta})$ . В соответствие с системой (4.2.6)

$$\begin{cases} \bar{x}_1 = F(h_1(\theta_1), \bar{\theta}), \\ \theta_1 = G(h_1(\theta_1), \bar{\theta}), \end{cases} \quad \begin{cases} \bar{x}_2 = F(h_2(\theta_2), \bar{\theta}), \\ \theta_2 = G(h_2(\theta_2), \bar{\theta}), \end{cases}$$

откуда получаем

$$\|\theta_1 - \theta_2\| \leq \left\| \frac{\partial G}{\partial x} \right\|_{\circ} \|h_1(\theta_1) - h_2(\theta_2)\| \quad (4.2.23)$$

$$\|\bar{x}_1 - \bar{x}_2\| \leq \left\| \frac{\partial F}{\partial x} \right\|_{\circ} \|h_1(\theta_1) - h_2(\theta_2)\|.$$

Используя условие Липшица (4.2.16), находим, что

$$\begin{aligned} \|h_1(\theta_1) - h_2(\theta_2)\| &\leq \|h_1(\theta_1) - h_1(\theta_2)\| + \|h_1(\theta_2) - h_2(\theta_2)\| \\ &\leq \mathcal{L} \|\theta_1 - \theta_2\| + \text{dist}(h_1, h_2). \end{aligned}$$

Таким образом, неравенства (4.2.23) можно записать в виде

$$\|\theta_1 - \theta_2\| \leq \left\| \frac{\partial G}{\partial x} \right\|_{\circ} (\mathcal{L} \|\theta_1 - \theta_2\| + \text{dist}(h_1, h_2)),$$

и

$$\|\bar{x}_1 - \bar{x}_2\| \leq \left\| \frac{\partial F}{\partial x} \right\|_{\circ} (\mathcal{L} \|\theta_1 - \theta_2\| + \text{dist}(h_1, h_2)),$$

или

$$\|\theta_1 - \theta_2\| \leq \left\| \frac{\partial G}{\partial x} \right\|_{\circ} \left( 1 - \left\| \frac{\partial G}{\partial x} \right\|_{\circ} \mathcal{L} \right)^{-1} \cdot \text{dist}(h_1, h_2)$$

и, окончательно,

$$\|\tilde{h}_1(\bar{\theta}) - \tilde{h}_2(\bar{\theta})\| \equiv \|\bar{x}_1 - \bar{x}_2\| \leq \left( \frac{\left\| \frac{\partial F}{\partial x} \right\|_{\circ}}{1 - \left\| \frac{\partial G}{\partial x} \right\|_{\circ} \mathcal{L}} \right) \cdot \text{dist}(h_1, h_2).$$

Поскольку  $\bar{\theta}$  выбирается произвольно, из приведенного выше неравенства по определению следует, что

$$\text{dist}(\tilde{h}_1, \tilde{h}_2) \leq \left( \frac{\left\| \frac{\partial F}{\partial x} \right\|_{\circ}}{1 - \left\| \frac{\partial G}{\partial x} \right\|_{\circ} \mathcal{L}} \right) \cdot \text{dist}(h_1, h_2)$$

Таким образом, согласно неравенству (4.2.15), отображение  $\tilde{T}$  действительно является сжатием.

Было доказано существование и единственность инвариантного липшицева многообразия  $M^*: \{x = h^*(\theta)\}$ . Поскольку неподвижная точка оператора сжатия является пределом последовательных приближений, стартовых с произвольных начальных условий, для любой липшицевой функции  $h_0$  справедливо уравнение  $h^* = \lim \tilde{T}^k h_0$  или, что то же самое, образ положительных итераций отображения  $T$  любой липшицевой поверхности  $\{x = h_0(\theta)\}$  сходится к инвариантному многообразию  $M^*$ . Тем самым выполнено требование теоремы, что предельное множество прямых итераций всех точек кольца  $\mathbb{K}$  лежит на многообразии  $M^*$ .

Докажем гладкость многообразия  $M^*$ . Согласно системе (4.2.6), инвариантность многообразия  $\{x = h^*(\theta)\}$  означает, что при любом  $\bar{\theta}$

$$h^*(\bar{\theta}) = F(h^*(\bar{\theta}), \bar{\theta}), \quad (4.2.24)$$

где величина  $\theta$  неявно определяется при помощи уравнения

$$\theta = G(h^*(\bar{\theta}), \bar{\theta}). \quad (4.2.25)$$

Последнее равенство определяет отображение  $T^{-1}$  на инвариантном многообразии. При помощи аргументов, используемых в лемме 4.10, можно показать, что  $\theta$  — вполне определенная однозначная непрерывная функция от  $\bar{\theta}$ .

При формальном дифференцировании уравнений (4.2.24) и (4.2.25) производная  $\eta^* = \frac{dh^*}{d\theta}$  (если она существует) должна удовлетворять уравнению

$$\eta^*(\bar{\theta}) = \frac{\partial F}{\partial \theta} + \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \eta^*(\theta) \cdot \left( I - \frac{\partial G}{\partial x} \cdot \eta^*(\theta) \right)^{-1} \cdot \frac{\partial G}{\partial \theta}, \quad (4.2.26)$$

где все производные, входящие в правую часть уравнения, определяются в точке  $(x = h^*(\theta), \bar{\theta})$ , а  $\theta$  находится согласно формуле (4.2.25) как функция от  $\bar{\theta}$ . Докажем, что непрерывная функция  $\eta^*$ , удовлетворяющая этому равенству существует. Рассмотрим пространство  $H'(\mathcal{L})$  ограниченных ( $\|\eta\|_0 \leq \mathcal{L}$ ) непрерывных функций  $x = \eta(\theta)$ . Оно представляет собой замкнутое подмножество банахова пространства, состоящего из непрерывных функций, с нормой

$$\|\eta_1 - \eta_2\| = \text{dist}(\eta_1, \eta_2) = \sup_{\theta} \|\eta_1(\theta) - \eta_2(\theta)\|.$$

Рассмотрим отображение  $\eta \mapsto \tilde{\eta}$ , определенное на подмножестве  $H'(\mathcal{L})$ :

$$\tilde{\eta}(\bar{\theta}) = \frac{\partial F}{\partial \theta} + \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \eta(\theta) \cdot \left( I - \frac{\partial G}{\partial x} \cdot \eta(\theta) \right)^{-1} \cdot \frac{\partial G}{\partial \theta}. \quad (4.2.27)$$

Эта формула задает правило для вычисления  $\tilde{\eta}$  при заданной функции  $\eta$ : для произвольного значения  $\bar{\theta}$  в соответствие с формулой (4.2.25) определяется значение  $\theta$ , которое затем подставляется в правую часть уравнения (4.2.27).

Докажем, что под действием отображения, описываемого уравнением (4.2.27), подмножество  $H'(\mathcal{L})$  переходит в себя, и что указанное отображение является сжимающим. Это влечет существование и единственность решения  $\eta^*$  системы (4.2.26). Непрерывность функции  $\tilde{\eta}$  очевидна, поэтому следует лишь проверить, что она ограничивается постоянной  $\mathcal{L}$ , при условии, что  $\eta$  ограничивается той же постоянной. Поскольку

$$\left\| \frac{\partial G}{\partial x} \cdot \eta \right\| \leq \left\| \frac{\partial G}{\partial x} \right\|_0 \cdot \mathcal{L} < 1$$

(см. неравенство (4.2.12)), можно записать

$$\left( I - \frac{\partial G}{\partial x} \cdot \eta \right)^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} \left( \frac{\partial G}{\partial x} \cdot \eta \right)^k$$

откуда

$$\begin{aligned} \left\| \left( I - \frac{\partial G}{\partial x} \cdot \eta \right)^{-1} \right\| &\leq \sum_{k=0}^{+\infty} \left\| \frac{\partial G}{\partial x} \cdot \eta \right\|^k \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \left( \mathcal{L} \left\| \frac{\partial G}{\partial x} \right\|_0 \right)^k \\ &= \frac{1}{1 - \mathcal{L} \left\| \frac{\partial G}{\partial x} \right\|_0}. \end{aligned}$$

Используя эту оценку, из уравнения (4.2.27) получаем следующее неравенство:

$$\|\tilde{\eta}\| \leq \left\| \frac{\partial F}{\partial \theta} \right\|_0 + \frac{\left\| \frac{\partial F}{\partial x} \right\|_0 \cdot \mathcal{L} \cdot \left\| \frac{\partial G}{\partial \theta} \right\|_0}{1 - \mathcal{L} \left\| \frac{\partial G}{\partial x} \right\|_0}.$$

Согласно неравенству (4.2.13), находим, что

$$\|\tilde{\eta}\| \leq \mathcal{L}$$

то есть  $\tilde{\eta} \in H'(\mathcal{L})$  при условии, что  $\eta \in H'(\mathcal{L})$ .

Для доказательства того, что имеет место сжатие, следует учесть, что для любых функций  $\eta_1$  и  $\eta_2$  из подмножества  $H'(\mathcal{L})$  выполняется равенство

$$\begin{aligned} \tilde{\eta}_2(\bar{\theta}) - \tilde{\eta}_1(\bar{\theta}) &= \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \left( I - \eta_2(\theta) \cdot \frac{\partial G}{\partial x} \right)^{-1} \\ &\quad \times (\eta_2(\theta) - \eta_1(\theta)) \cdot \left( I - \frac{\partial G}{\partial x} \cdot \eta_1(\theta) \right)^{-1} \cdot \frac{\partial G}{\partial \theta}. \end{aligned}$$

Эта формула была получена с учетом того, что

$$\eta \left( I - \frac{\partial G}{\partial x} \cdot \eta \right)^{-1} = \eta + \eta \cdot \frac{\partial G}{\partial x} \cdot \eta + \dots = \left( I - \eta \cdot \frac{\partial G}{\partial x} \right)^{-1} \eta \quad (4.2.29)$$

откуда

$$\begin{aligned} & \eta_2 \left( I - \frac{\partial G}{\partial x} \cdot \eta_2 \right)^{-1} - \eta_1 \left( I - \frac{\partial G}{\partial x} \cdot \eta_1 \right)^{-1} \\ &= \left( I - \eta_2 \cdot \frac{\partial G}{\partial x} \right)^{-1} \eta_2 - \eta_1 \left( I - \frac{\partial G}{\partial x} \cdot \eta_1 \right)^{-1}. \end{aligned}$$

Затем используем тождество

$$\begin{aligned} & \left( I - \eta_2 \cdot \frac{\partial G}{\partial x} \right)^{-1} \eta_2 - \eta_1 \left( I - \frac{\partial G}{\partial x} \cdot \eta_1 \right)^{-1} \\ &= \left( I - \eta_2 \cdot \frac{\partial G}{\partial x} \right)^{-1} (\eta_2 - \eta_1) \left( I - \frac{\partial G}{\partial x} \cdot \eta_1 \right)^{-1}. \end{aligned}$$

Доказать тождество можно путем умножения на  $(I - \eta_2 \cdot \frac{\partial G}{\partial x})$  слева и на  $(I - \frac{\partial G}{\partial x} \cdot \eta_1)$  справа.

На основании формулы (4.2.28) получаем, что

$$\text{dist}(\tilde{\eta}_2, \tilde{\eta}_1) \leq \frac{\sup \left( \left\| \frac{\partial F}{\partial x} \right\| \cdot \left\| \frac{\partial G}{\partial \bar{\theta}} \right\| \right)}{\left( 1 - \mathcal{L} \left\| \frac{\partial G}{\partial x} \right\| \right)^2} \cdot \text{dist}(\eta_2, \eta_1),$$

откуда согласно неравенству (4.2.14) следует, что имеет место сжатие.

Мы доказали существование формальной производной  $\eta^*$ , однозначно определяемой формулой (4.2.26). Теперь покажем, что  $\eta^*(\theta) \equiv \frac{dh^*}{d\theta}$ . Проверка справедливости указанного равенства аналогична доказательству того, что следующая величина тождественно обращается в нуль:

$$z(\theta) = \limsup_{\Delta\theta \rightarrow 0} \frac{\|h^*(\theta + \Delta\theta) - h^*(\theta) - \eta^*(\theta)\Delta\theta\|}{\|\Delta\theta\|}. \quad (4.2.30)$$

Заметим, что функция  $z$  равномерно ограничена (поскольку функция  $\eta^*$  ограничена, а  $h^*$  удовлетворяет условию Липшица).

Выразим  $z(\bar{\theta})$  через  $z(\theta)$ . В первую очередь докажем, что

$$\begin{aligned} & h^*(\bar{\theta} + \Delta\bar{\theta}) - h^*(\bar{\theta}) \\ &= \frac{\partial F}{\partial x} \cdot (h^*(\theta + \Delta\theta) - h^*(\theta)) + \frac{\partial F}{\partial \bar{\theta}} \Delta\bar{\theta} + o(\Delta\bar{\theta}) + o(\Delta\theta) \end{aligned}$$

где согласно уравнению (4.2.25)  $\Delta\theta$  удовлетворяет равенству

$$\Delta\theta = \frac{\partial G}{\partial x} (h^*(\theta + \Delta\theta) - h^*(\theta)) + \frac{\partial G}{\partial \bar{\theta}} \Delta\bar{\theta} + o(\Delta\bar{\theta}) + o(\Delta\theta). \quad (4.2.32)$$

Заметим, что  $h^*$  удовлетворяет условию Липшица. В частности,

$$\limsup_{\Delta\bar{\theta} \rightarrow 0} \frac{\|\Delta\theta\|}{\|\Delta\bar{\theta}\|} \leq \frac{\left\| \frac{\partial G}{\partial \bar{\theta}} \right\|}{1 - \mathcal{L} \left\| \frac{\partial G}{\partial x} \right\|}. \quad (4.2.33)$$

Запишем выражение (4.2.32) в виде

$$\begin{aligned} \Delta\theta &= \left( I - \frac{\partial G}{\partial x} \eta^*(\theta) \right)^{-1} \left[ \frac{\partial G}{\partial x} (h^*(\theta + \Delta\theta) - h^*(\theta) - \eta^*(\theta)\Delta\theta) + \frac{\partial G}{\partial \bar{\theta}} \Delta\bar{\theta} \right] \\ &+ o(\Delta\bar{\theta}) + o(\Delta\theta). \end{aligned}$$

Теперь, используя уравнение (4.2.26), можно записать

$$\begin{aligned} h^*(\bar{\theta} + \Delta\bar{\theta}) - h^*(\bar{\theta}) - \eta^*(\bar{\theta})\Delta\bar{\theta} &= \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \left( I + \eta^*(\theta) \left( I - \frac{\partial G}{\partial x} \eta^*(\theta) \right)^{-1} \frac{\partial G}{\partial x} \right) \\ &\cdot (h^*(\theta + \Delta\theta) - h^*(\theta) - \eta^*(\theta)\Delta\theta) + o(\Delta\bar{\theta}), \end{aligned}$$

или (см. формулу (4.2.29))

$$\begin{aligned} & h^*(\bar{\theta} + \Delta\bar{\theta}) - h^*(\bar{\theta}) - \eta^*(\bar{\theta})\Delta\bar{\theta} \\ &= \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \left( I - \eta^*(\theta) \frac{\partial G}{\partial x} \right)^{-1} (h^*(\theta + \Delta\theta) - h^*(\theta) - \eta^*(\theta)\Delta\theta) + o(\Delta\bar{\theta}). \end{aligned}$$

Следовательно, согласно формулам (4.2.30) и (4.2.33),

$$z(\bar{\theta}) \leq \frac{\sup_{(x,\theta)} \left\{ \left\| \frac{\partial F}{\partial x} \right\| \cdot \left\| \frac{\partial G}{\partial \theta} \right\| \right\}}{\left( 1 - \mathcal{L} \left\| \frac{\partial G}{\partial x} \right\| \right)^2} z(\theta). \quad (4.2.34)$$

В данной формуле коэффициент перед  $z(\theta)$  строго меньше 1. Напомним, что для любой точки на инвариантном многообразии  $M^*$  величина  $\theta$  однозначно определяется через  $\bar{\theta}$ , то есть можно рассматривать бесконечную отрицательную полутраекторию любой точки на многообразии  $M^*$ , и она будет оставаться на указанном многообразии. Но если в некоторой точке величина  $z$  не равна нулю, на основании неравенства (4.2.34) при отрицательных итерациях она будет неограниченно расти. Поскольку данное утверждение противоречит равномерной ограниченности  $z(\theta)$ , данная функция должна быть тождественно равна нулю повсюду на многообразии  $M^*$ . Отсюда следует гладкость инвариантного многообразия, что и требовалось доказать.

Внимательное изучение доказательства показывает, что условие, в соответствии с которым  $\theta$  является угловой переменной, практически не использовалось (оно было необходимо лишь в самом начале при выводе формул (4.2.9) и (4.2.10) на основании предположений, выдвинутых в теореме). Используемые аргументы применимы также в общем случае. Во избежание дальнейшего повторения просто сформулируем результат.

**Теорема 4.3.** Пусть  $X$  и  $Y$  — выпуклые замкнутые подмножества, принадлежащие некоторым банаховым пространствам. Положим, что отображение  $T$  определено в перекрестной форме на множестве  $X \times Y$ :

$$\begin{aligned} \bar{x} &= F(x, \bar{y}), \\ y &= G(x, \bar{y}), \end{aligned} \quad (4.2.35)$$

на основании чего две точки  $(x, y)$  и  $(\bar{x}, \bar{y})$  из подмножества  $X \times Y$  связаны отображением  $T$  только в том случае, если имеют место равенства (4.2.35). Пусть  $F$  и  $G$  — гладкие функции, удовлетворяющие двум следующим условиям:

$$\sqrt{\sup_{(x,\bar{y}) \in X \times Y} \left\{ \left\| \frac{\partial F}{\partial x} \right\| \cdot \left\| \frac{\partial G}{\partial \bar{y}} \right\| \right\}} + \sqrt{\left\| \frac{\partial F}{\partial \bar{y}} \right\| \cdot \left\| \frac{\partial G}{\partial x} \right\|} < 1 \quad (4.2.36)$$

и

$$\left\| \frac{\partial F}{\partial x} \right\| \circ + \sqrt{\left\| \frac{\partial F}{\partial \bar{\theta}} \right\| \cdot \left\| \frac{\partial G}{\partial x} \right\|} < 1. \quad (4.2.37)$$

Тогда отображение  $T$  имеет инвариантное  $\mathbb{C}^1$ -гладкое многообразие  $M^*$ , которое содержит  $\omega$ -предельные точки любой положительной полутраектории отображения  $T$ .

Заметим, что, в принципе, однозначности отображения  $T$  не предполагается: оно может иметь и несколько различных пар  $(\bar{x}, \bar{y})$ , соответствующих одному значению  $(x, y)$  в формуле (4.2.35). Таким образом, точки из множества  $X \times Y$  могут иметь более одной орбиты, а согласно теореме,  $\omega$ -предельные множества всех включены в многообразии  $M^*$ .

Также нет необходимости в том, чтобы значения  $(\bar{x}, \bar{y})$  гладко зависели от  $(x, y)$ . Тем не менее, из приведенного выше доказательства следует, что обратное отображение  $T^{-1}$  на многообразии  $M^*$  является однозначным и гладким; оно неявно определяется при помощи уравнения

$$y = G(h^*(y), \bar{y}), \quad (4.2.38)$$

где  $x = h^*(y)$  — уравнение многообразия  $M^*$ .

Производная  $\eta^*$  функции  $h^*$  удовлетворяет соотношению

$$\eta^*(\bar{y}) = \frac{\partial F}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \eta^*(y) \cdot \left( I - \frac{\partial G}{\partial x} \cdot \eta^*(y) \right)^{-1} \cdot \frac{\partial G}{\partial \bar{y}} \quad (4.2.39)$$

(просто переписаны формулы (4.2.24) и (4.2.26)). Производная  $\eta^*$  является функцией, график которой представляет собой инвариантное многообразие отображения, записанного в перекрестной форме:

$$\begin{aligned} \bar{\eta} &= \mathcal{F}(\eta, \bar{y}), \\ y &= \mathcal{G}(\bar{y}), \end{aligned} \quad (4.2.40)$$

где функция  $\mathcal{G}$  в неявном виде задается уравнением (4.2.38), а функция  $\mathcal{F}$  определяется правой частью (4.2.39). К этому отображению можно применить теорему 4.3 (заметим, что  $\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \eta} \equiv 0$ ), в таком случае если

$$\sup \left\{ \left\| \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \eta} \right\| \cdot \left\| \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \bar{y}} \right\| \right\} < 1, \quad (4.2.41)$$

а

$$\sup \left\{ \left\| \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \eta} \right\| \right\} < 1, \quad (4.2.42)$$

то инвариантное многообразие  $\eta = \eta^*(y)$  является *единственным* и гладким. Таким образом, производная  $\eta^*$  является гладкой функцией от  $y$  и, следовательно, в данном случае  $h^* \in C^2$ .

Запишем приведенные выше условия, определяющие  $C^2$ -гладкость многообразия  $M^*$  через исходные функции  $F$  и  $G$ . В первую очередь заметим, что формулы для  $\mathcal{F}$  содержат первые производные функций  $F$  и  $G$ . Следовательно, чтобы функция  $\mathcal{F}$  была гладкой необходимо, чтобы  $F$  и  $G$  были, по крайней мере,  $C^2$ -гладкими. Относительно производной  $\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \eta}$  напомним, что аналогичные оценки уже были выполнены (в несколько иной форме, см. уравнение (4.2.28)), поэтому во избежание повторения просто приведем полученный результат:

$$\left\| \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \eta} \right\| \leq \frac{\left\| \frac{\partial F}{\partial x} \right\| \cdot \left\| \frac{\partial G}{\partial y} \right\|}{\left( 1 - \mathcal{L} \left\| \frac{\partial G}{\partial x} \right\| \right)^2}.$$

Здесь  $\mathcal{L}$  представляет собой постоянную Липшица — верхнюю границу для нормы производной  $\eta^*$ . По построению (см. (4.2.11))

$$\mathcal{L} = \sqrt{\left\| \frac{\partial F}{\partial \theta} \right\| \left( \left\| \frac{\partial G}{\partial x} \right\| \right)^{-1}}.$$

Таким образом,

$$\left\| \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \eta} \right\| \leq \frac{\left\| \frac{\partial F}{\partial x} \right\| \cdot \left\| \frac{\partial G}{\partial y} \right\|}{\left( 1 - \sqrt{\left\| \frac{\partial G}{\partial x} \right\| \cdot \left\| \frac{\partial F}{\partial \theta} \right\|} \right)^2}. \quad (4.2.43)$$

Непосредственно из уравнения (4.2.38) для производной  $\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial y}$  получаем сле-

дующую оценку:

$$\left\| \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial y} \right\| \leq \frac{\left\| \frac{\partial G}{\partial y} \right\|}{\left( 1 - \sqrt{\left\| \frac{\partial G}{\partial x} \right\| \cdot \left\| \frac{\partial F}{\partial \theta} \right\|} \right)^2}. \quad (4.2.44)$$

Подставляя эти два неравенства в формулу (4.2.41), получаем следующее дополнительное достаточное условие  $C^2$ -гладкости многообразия  $M^*$  (условие (4.2.42), в отличие от условий теоремы 4.3, не накладывает новых ограничений):

$$\frac{\sup \left\{ \left\| \frac{\partial F}{\partial x} \right\| \cdot \left\| \frac{\partial G}{\partial y} \right\|^2 \right\}}{\left( 1 - \sqrt{\left\| \frac{\partial G}{\partial x} \right\| \cdot \left\| \frac{\partial F}{\partial \theta} \right\|} \right)^3} < 1.$$

или

$$\sqrt[3]{\sup \left\{ \left\| \frac{\partial F}{\partial x} \right\| \cdot \left\| \frac{\partial G}{\partial y} \right\|^2 \right\}} + \sqrt{\left\| \frac{\partial G}{\partial x} \right\| \cdot \left\| \frac{\partial F}{\partial \theta} \right\|} < 1. \quad (4.2.45)$$

Процедуру, приведенную выше, можно повторить для получения достаточных условий  $C^3$ -гладкости (путем подстановки неравенств (4.2.43) и (4.2.44) в формулу (4.2.45)), и т. д. По индукции, приходим к теореме.

**Теорема 4.4..** Пусть функции  $F$  и  $G$  теоремы 4.3 являются  $C^r$ -гладкими ( $r \geq 1$ ), положим также, что они удовлетворяют следующему дополнительному условию:

$$\sqrt[q+1]{\sup_{(x, \bar{y}) \in X \times Y} \left\{ \left\| \frac{\partial F}{\partial x} \right\| \cdot \left\| \frac{\partial G}{\partial y} \right\|^q \right\}} + \sqrt{\left\| \frac{\partial F}{\partial y} \right\| \cdot \left\| \frac{\partial G}{\partial x} \right\|} < 1 \quad (4.2.46)$$

при некотором целом  $q \leq r$ . В таком случае инвариантное многообразие  $M^*$  является, по крайней мере,  $C^q$ -гладким.

Теорема была сформулирована при помощи перекрестного отображения, при этом гладкость самого отображения  $T$  не требуется. Более того,

исследование доказательства показывает, что теорема выполняется даже если допустить, что функции  $F$  и  $G$  (определяющие перекрестное отображение) имеют особенности на конечном числе поверхностей  $\{y = \text{const}\}$  (или на конечном числе гладких поверхностей трансверсальных ко всякой поверхности  $x = h(y)$ , где  $\|h'(y)\| \leq \mathcal{L}$ ) при условии, что

- производные  $\frac{\partial F}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial G}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial F}{\partial y}$ , а также все производные  $\frac{\partial^k F}{\partial y^k}$  ( $k \leq q$ ) являются непрерывными всюду на множестве  $X \times Y$ ;
- на поверхностях особенностей выполнено равенство

$$\lim \left\| \frac{\partial^{p_0+k_0} F}{\partial x^{k_0} \partial y^{p_0}} \right\| \cdot \left\| \frac{\partial^{p_1+k_1} G}{\partial x^{k_1} \partial y^{p_1}} \right\| \cdot \dots \cdot \left\| \frac{\partial^{p_s+k_s} G}{\partial x^{k_s} \partial y^{p_s}} \right\| = 0$$

при любых целочисленных величинах  $p_0 \geq 0$ ,  $p_1 \geq 1, \dots, p_s \geq 1$  и  $k_0 \geq 1, k_1 \geq 0, \dots, k_s \geq 0$  таких, что  $k_0 + \dots + k_s \leq s \leq q$  и  $p_0 + \dots + p_s \leq q$ .

Возвращаясь к принципу кольца, из теоремы 4.4 получаем следующий результат (см. оценки (4.2.7)–(4.2.8) для производных перекрестного и исходного отображений).

**Теорема 4.5.** Пусть отображение (4.2.1) является  $\mathbb{C}^r$  ( $r \geq 2$ )-гладким диффеоморфизмом, удовлетворяющим предположениям 4.1, 4.2 и неравенству

$$\begin{aligned} & \sqrt[q+1] \left( \left\| \frac{\partial f}{\partial x} \right\|_0 + \left\| \frac{\partial g}{\partial x} \right\|_0 \left\| \frac{\partial f}{\partial \theta} \left( \frac{\partial g}{\partial \theta} \right)^{-1} \right\|_0 \right) \cdot \left\| \left( \frac{\partial g}{\partial \theta} \right)^{-1} \right\|_0^q \\ & + \sqrt{\left\| \left( \frac{\partial g}{\partial \theta} \right)^{-1} \right\|_0 \left\| \frac{\partial g}{\partial x} \right\|_0 \left\| \frac{\partial f}{\partial \theta} \left( \frac{\partial g}{\partial \theta} \right)^{-1} \right\|_0} < 1, \end{aligned} \quad (4.2.47)$$

где  $2 \leq q \leq r$ . Тогда инвариантный тор, определяемый теоремой 4.2 (теорема выполняется на основании условия (4.2.47)), является, по крайней мере,  $\mathbb{C}^q$ -гладким.

В следующем разделе основное внимание уделяется случаю, когда размерность  $t$  второго уравнения системы (4.2.1) равна единице. Сделаем

лишь несколько замечаний для случая систем большей размерности. По предположению, отображение (4.2.3) (соответствующее фиксированному значению  $x$ ) является диффеоморфизмом. Его можно включить в следующее семейство

$$\bar{\theta} = \theta + \varepsilon g(x, \theta). \quad (4.2.48)$$

Если  $\varepsilon = 1$ , получаем исходное отображение, а если  $\varepsilon = 0$  — тождественное отображение. Следовательно, отображение (4.2.3) является гомотопным тождественному. Однако среди всех диффеоморфизмов тора встречаются диффеоморфизмы негомотопные тождественному.

Рассмотрим тор  $\mathbb{T}^m$  как единичный куб

$$\{\theta \mid 0 \leq \theta_j \leq 1, \quad (j = 1, \dots, m)\}$$

с отождествленными точками

$$(\theta_1, \dots, \theta_{j-1}, 0, \theta_{j+1}, \dots, \theta_m) \equiv (\theta_1, \dots, \theta_{j-1}, 1, \theta_{j+1}, \dots, \theta_m).$$

Примером диффеоморфизма тора, негомотопного относительно тождества, служит следующее отображение:

$$\bar{\theta} = A\theta \pmod{1}, \quad (4.2.49)$$

где  $A$  — матрица с целочисленными элементами (отличная от единичной), для которой  $\det |A| = \pm 1$ . Примером такого диффеоморфизма является отображение

$$\bar{\theta} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \theta \pmod{1},$$

проиллюстрированное на рис. 4.2.1.

Отображение (4.2.49) называется алгебраическим автоморфизмом тора. В данном случае для диффеоморфизма вида

$$\begin{aligned} \bar{x} &= f(x, \theta), \\ \bar{\theta} &= A\theta + g_0(x, \theta) = g(x, \theta) \pmod{1}, \end{aligned} \quad (4.2.50)$$

где  $f$  и  $g$  — периодические функции, период которых по  $\theta$  равен 1, принцип кольца является верным, если в кольце  $\mathbb{K}$  выполняются следующие условия:

- (1) Отображение

$$\bar{x} = f(x, \theta)$$

является сжимающим при  $\|x\| \leq r_0$ , и



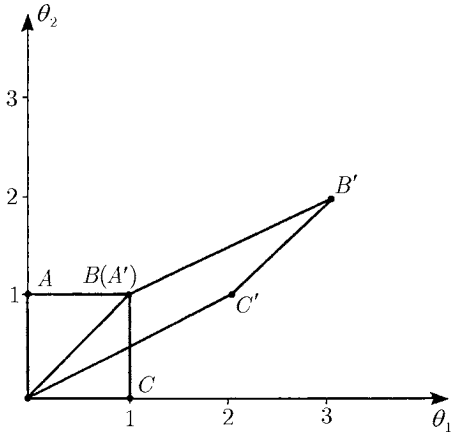


Рис. 4.2.1. Пример действия диффеоморфизма тора, не являющегося гомотопным относительно тождества

(2) Отображение

$$\bar{\theta} = A\theta + g_0(x, \theta) = g(x, \theta) \pmod{1}$$

является диффеоморфизмом тора, и

(3) Отображение (4.2.50) удовлетворяет условиям (4.2.5) или, для обеспечения большей гладкости, условию (4.2.47).

Доказательство этого утверждения полностью повторяет доказательство теоремы 4.2 или 4.5.

Отображение (4.2.50) при ограничении на тор  $\mathbb{T}^m: x = h(\theta)$  можно записать в виде

$$\bar{\theta} = A\theta + g_0(h(\theta), \theta) \pmod{1}. \tag{4.2.51}$$

Приложение общего принципа кольца к исследованию бифуркаций рассматривается во второй части книги. Заметим, что в случае, когда  $m = 1$ , а  $A = -1$ , отображение (4.2.51) представляет собой неориентируемое отображение окружности вида

$$\bar{\theta} = -\theta + g_0(\theta) \pmod{1}, \tag{4.2.52}$$

которое является отображением Пуанкаре для некоторых потоков на бутылке Клейна.

### 4.3. Теорема о сохранении инвариантного тора

Рассмотрим семейство систем

$$\begin{aligned} \dot{x} &= X(x) + p(x, \theta, \mu), \\ \dot{\theta} &= 1, \end{aligned} \tag{4.3.1}$$

где  $X$  и  $p - \mathbb{C}^r$  ( $r \geq 1$ )-гладкие функции, а функция  $p$  является  $2\pi$ -периодической по  $\theta$ ; следовательно,  $\theta$  и  $\theta + 2\pi$  отождествлены.

Положим, что функция  $p$  обращается в нуль при  $\mu = 0$ , и соответствующая автономная система

$$\dot{x} = X(x), \tag{4.3.2}$$

имеет устойчивую периодическую траекторию  $L$  с периодом  $\tau$ .

**Теорема 4.6.** При вышеприведенных предположениях, система (4.3.1) имеет  $\mathbb{C}^r$ -гладкий двумерный инвариантный тор при всех достаточно малых значениях  $\mu$ .

Доказательство. В малой окрестности траектории  $L$  вместо координаты  $x$  введем нормальные координаты  $(y, \theta_0)$  (см. систему (3.11.20)). В новых координатах семейство систем принимает вид

$$\begin{aligned} \dot{y} &= \Lambda y + F_0(\theta_0, y) + F_1(\theta_0, y, \theta, \mu), \\ \dot{\theta}_0 &= \Omega_0 + b_0(\theta_0, y) + b_1(\theta_0, y, \theta, \mu), \\ \dot{\theta} &= 1. \end{aligned} \tag{4.3.3}$$

где

$$F_0(\theta_0, 0) = 0, \quad F'_{0y}(\theta_0, 0) = 0, \quad b_0(\theta_0, 0) = 0, \tag{4.3.4}$$

а  $\Omega_0 = 2\pi/\tau$ .

Функции в правой части системы (4.3.3) являются периодическими и имеют период, равный  $2\pi$  и по  $\theta$ , и по  $\theta_0$ , либо (см. условия (3.11.22)) они являются антипериодическими<sup>2</sup>:

$$\begin{aligned} F(\theta_0 + 2\pi, \sigma y, \theta, \mu) &= \sigma F(\theta, y, \theta, \mu) \\ b(\theta_0 + 2\pi, \sigma y, \theta, \mu) &= b(\theta, y, \theta, \mu) \end{aligned} \tag{4.3.5}$$

<sup>2</sup>Введены обозначения  $F = F_0 + F_1$  и  $b = b_0 + b_1$ .

где  $\sigma$  — инволюция, меняющая знак некоторой переменной  $y$ ; в случае периодических функций  $\sigma$  — тождественное отображение. По построению (см. раздел 3.11), точки  $(y, \theta_0)$  и  $(\sigma y, \theta_0 + 2\pi)$  соответствуют одной и той же точке  $x$ .

Рассмотрим диффеоморфизм сечения  $\theta = 0$ , определяемый сдвигом по времени на  $2\pi$  вдоль траекторий системы (мы отождествляем значения  $\theta = 0$  и  $\theta = 2\pi$ ). В силу непрерывной зависимости от параметра, при малой величине  $\mu$  данное отображение является  $\mathbb{C}^r$ -близким к отображению за время  $2\pi$  автономной системы (4.3.2) (что соответствует  $F_1 = 0$  и  $b_1 = 0$  в системе (4.3.3)). Таким образом, отображение имеет вид

$$\begin{aligned}\bar{y} &= f(y, \theta_0, \mu) = e^{2\pi\Lambda}y + f_0(y, \theta_0) + f_1(y, \theta_0, \mu), \\ \bar{\theta}_0 &= g(y, \theta_0, \mu) = \theta_0 + \omega_0 + g_0(y, \theta_0, \mu),\end{aligned}\quad (4.3.6)$$

где правые части либо периодические, либо антипериодические по  $\theta_0$  функции;  $\omega_0 = 2\pi\Omega_0$ . Кроме того, (см. формулу (4.3.4))

$$\begin{aligned}f_0(0, \theta_0) &= 0, & f'_{0y}(0, \theta_0) &= 0, & f_1(y, \theta_0, 0) &= 0, \\ g_0(0, \theta_0) &= 0, & g_1(y, \theta_0, 0) &= 0.\end{aligned}\quad (4.3.7)$$

Проверим выполнение условий принципа кольца (см. предыдущий раздел). Величину  $\theta_0$  пока не будем рассматривать как угловую переменную, но положим, что  $\theta_0 \in (-\infty, +\infty)$ ; очевидно, заключение теоремы 4.2 о существовании инвариантной кривой  $y = h(\theta_0)$  остается неизменным.

В первую очередь необходимо найти такое значение  $\delta$ , чтобы полоса  $\|y\| \leq \delta$  отображалась в себя. Заметим, что согласно формуле (4.3.6) в пределах такой полосы величина  $\|f'_{0y}\|$  является малой при любом достаточно малом значении  $\delta$ . Таким образом, на основании формул (4.3.6) и (4.3.7) при  $\mu = 0$  получаем неравенство

$$\|\bar{y}\| \leq (\|e^{2\pi\Lambda}\| + \varepsilon)\|y\|$$

где при малом значении  $\delta$  величина  $\varepsilon$  может быть произвольно мала. По предположению, периодическая траектория  $L : \{y = 0\}$  является устойчивой, то есть все собственные значения матрицы  $\Lambda$  лежат строго слева от мнимой оси (см. раздел 3.12). Следовательно,  $\|e^{2\pi\Lambda}\| < 1$ , и при  $\mu = 0$  полоса  $K : \|y\| \leq \delta$  отображается в себя при любом достаточно малом значении  $\delta$ . Вследствие непрерывности, это утверждение остается верным при всех достаточно малых значениях  $\mu$ .

Теперь необходимо проверить выполняются ли в кольце  $K$  неравенства (4.2.2), (4.2.4), (4.2.5) и (4.2.47) (при  $q = r$ ). Поскольку данные неравенства являются строгими, а величины  $\mu$  и  $\delta$  малы, достаточно проверить, что указанные условия выполняются только при  $y = 0$ ,  $\mu = 0$ . Получаем выражения

$$\left\| \frac{\partial f}{\partial y} \right\|_{y=0, \mu=0} = \|e^{2\pi\Lambda}\| < 1, \quad \left( \frac{\partial g}{\partial \theta_0} \right)_{y=0, \mu=0}^{-1} = 1, \quad \left. \frac{\partial f}{\partial \theta_0} \right|_{y=0, \mu=0} = 0,$$

непосредственно из которых следует, что условия теорем 4.2 и 4.5 выполняются.

Таким образом, было установлено существование единственной притягивающей инвариантной  $\mathbb{C}^r$ -гладкой кривой  $y = h(\theta_0, \mu)$  при всех достаточно малых значениях  $\mu$ . В данном случае,  $\theta_0 \in (-\infty, +\infty)$ . Поскольку правая часть системы (4.3.6) (анти)периодическая, кривая  $y = \sigma h(\theta_0 + 2\pi, \mu)$  также является инвариантной кривой этого отображения. В силу ее единственности получаем

$$\sigma h(\theta_0 + 2\pi, \mu) = h(\theta_0, \mu). \quad (4.3.8)$$

Напомним, что по построению, точки  $(y, \theta_0)$  и  $(\sigma y, \theta_0 + 2\pi)$  должны быть отождествлены в связи с тем, что в исходных координатах  $x$  они соответствуют одной и той же точке. Таким образом, соотношение (4.3.8) показывает, что инвариантная кривая  $y = h(\theta_0, \mu)$  гомеоморфна окружности.

Была найдена устойчивая инвариантная окружность для отображения поперечного сечения  $\theta = 0 \pmod{2\pi}$  системы (4.3.1) за время  $2\pi$ . Объединение траекторий, начинающихся на этой окружности, является двумерным устойчивым инвариантным тором, что и требовалось доказать.

**Замечание.** Несложно проверить, что приведенное выше доказательство без каких-либо изменений остается верным для случая, когда функция  $p(x, \theta, \mu)$  в системе (4.3.1) лишь непрерывно зависит от  $\theta$ . В таком случае, инвариантный тор на пересечении с любым сечением  $\theta = \text{const}$  является  $\mathbb{C}^r$ -гладким.

Аналогичным образом можно рассмотреть общий случай, когда автономная система (4.3.2) имеет произвольную грубую периодическую орбиту,  $m$  мультипликаторов которой лежат внутри единичной окружности, а  $n$  — вне ее. Система (4.3.1) вблизи траектории  $L$  записывается в нормальных координатах в виде (4.3.3), при этом  $m$  собственных значений матрицы  $\Lambda$  лежат строго слева от мнимой оси, а  $n$  — строго справа от нее. Пусть  $y =$

$= (u, v)$ , где  $u \in \mathbb{R}^m$  представляет собой проекцию на устойчивое собственное подпространство матрицы  $\Lambda$ , а  $v \in \mathbb{R}^n$  — проекцию на неустойчивое собственное подпространство. При  $\mu = 0$  система записывается как

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \Lambda^s u + o(u, v), & \dot{v} &= \Lambda^u v + o(u, v), \\ \dot{\theta}_0 &= \Omega_0 + O(u, v), & \dot{\theta} &= 1 \end{aligned}$$

где спектр матрицы  $\Lambda^s$  лежит строго слева от мнимой оси, а спектр матрицы  $\Lambda^u$  — строго справа от нее. Отображение  $\{\theta = 0\} \rightarrow \{\theta = 2\pi\}$  за время  $2\pi$  имеет вид

$$\begin{aligned} \bar{u} &= e^{2\pi\Lambda^s} u + o(u, v), \\ \bar{v} &= e^{2\pi\Lambda^u} v + o(u, v), \\ \bar{\theta}_0 &= \theta_0 + \omega_0 + O(u, v). \end{aligned}$$

при  $\mu = 0$ .

При малых значениях  $u$  и  $v$  нетрудно заметить, что условия теоремы 4.4 выполняются для указанного отображения (в неравенстве (4.2.46) следует брать  $x = u$  и  $y = (v, \theta_0)$ ) и обратного ему отображения (в данном случае в неравенстве (4.2.46)  $x = v$ , а  $y = (u, \theta_0)$ ). В силу непрерывности, это остается верным при всех малых значениях  $\mu$ . Таким образом, при всех малых значениях  $\mu$  существуют два гладких инвариантных многообразия: многообразие  $M_\mu^u : u = h^u(v, \theta_0, \mu)$ , притягивающее все прямые итерации отображения, и отталкивающее многообразие  $M_\mu^s : v = h^s(u, \theta_0, \mu)$ , притягивающее все обратные итерации. Траектории, которые остаются в малой окрестности траектории  $L$  при всех прямых и обратных итерациях отображения, принадлежат инвариантному циклу  $L_\mu = M_\mu^u \cap M_\mu^s$ . По построению,  $\omega$ -предельное множество любой точки многообразия  $M_\mu^u$  и  $\alpha$ -предельное множество любой точки многообразия  $M_\mu^s$  принадлежит инвариантной окружности  $L_\mu$ . Возвращаясь от отображения сечения к исходной системе, приходим к следующему результату.

**Теорема 4.7.** *Если периодическая орбита  $L$  автономной системы (4.3.2) является седлом,  $m$  мультипликаторов которого лежат внутри, а  $n$  вне единичной окружности, то при всех достаточно малых значениях  $\mu$  система (4.3.1) имеет  $\mathbb{C}^r$ -гладкий двумерный инвариантный тор седлового типа с  $(m+2)$ -мерным устойчивым и  $(n+2)$ -неустойчивым инвариантными многообразиями.*

Существование инвариантных многообразий в теореме 4.4 устанавливается при помощи принципа Банаха сжимающих отображений. Следовательно, инвариантная окружность  $L_\mu$  непрерывно зависит от  $\mu$ .<sup>3</sup> При  $\mu = 0$  инвариантная окружность задается уравнением  $y = 0$ ; следовательно, диффеоморфизм на  $L_\mu$  имеет вид (см. систему (4.3.6))

$$\bar{\theta}_0 = \theta_0 + \omega_0 + g^*(\theta_0, \mu) \pmod{2\pi},$$

где функция  $g^*(\theta_0, \mu) \equiv g_0(h(\theta_0, \mu), \theta_0, \mu)$  обращается в нуль при  $\mu = 0$ .

Очевидно, что изучение неавтономных возмущений в окрестности грубой периодической траектории сводится к исследованию диффеоморфизма окружности. Теория таких диффеоморфизмов рассматривается в следующем разделе.

Исследуем семейство систем

$$\begin{aligned} \dot{x} &= X(x) + p(x, \theta, \mu), \\ \dot{\theta} &= \Omega, \end{aligned} \tag{4.3.9}$$

где  $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_k)$  имеет размерность  $k$ , а  $p$  —  $\mathbb{C}^r$ -гладкая  $2\pi$ -периодическая функция по каждому аргументу  $\theta_j$ ; вектор  $\Omega = (\Omega_1, \dots, \Omega_k)$  состоит из линейно независимых частот.

Положим, что при  $\mu = 0$  автономная система

$$\dot{x} = X(x) \tag{4.3.10}$$

имеет грубое положение равновесия  $O$ . Вблизи точки  $O$  отображение Пуанкаре сечения  $\theta_k = 0 \pmod{2\pi}$  в себя имеет вид

$$\begin{aligned} \bar{x} &= e^{2\pi A} x + o(x) + \dots, \\ \bar{\theta}_j &= \theta_j + \omega_j \pmod{2\pi} \quad (j = 1, \dots, k-1) \end{aligned}$$

где  $\omega_j = 2\pi \frac{\Omega_j}{\Omega_k}$ ; матрица  $A$  — матрица линеаризации системы (4.3.10) в точке  $O$ ; через многоточие обозначены члены, которые при  $\mu = 0$  обращаются в нуль.

<sup>3</sup>Если правые части уравнений являются гладкими относительно параметра  $\mu$ , то инвариантная кривая также гладко зависит от  $\mu$ ; для доказательства достаточно в теореме 4.4 включить параметр  $\mu$  в координаты  $y$ .

Используя принцип кольца, можно доказать, что при всех достаточно малых значениях  $\mu$  система (4.3.9) имеет  $k$  мерный инвариантный тор  $\mathbb{T}^k$  близкий к тору при  $x = 0$ . Очевидно, что устойчивость тора определяется устойчивостью положения равновесия относительно системы (4.3.10).

Тор имеет вид  $x = h(\theta, \mu)$  (где  $h = 0$  при  $\mu = 0$ ). Следовательно, движение на торе описывается исключительно вторым уравнением системы (4.3.9) и является квазипериодическим с базисом частот  $\Omega$ .

Положим, что система (4.3.10) имеет грубую периодическую орбиту  $L$  с периодом  $\frac{2\pi}{\Omega_0}$ . В данном случае при  $\mu = 0$  система (4.3.9) имеет  $(k + 1)$ -мерный инвариантный тор  $\mathbb{T}_0^{k+1} = L \times \mathbb{T}^k$ . Если частоты  $\Omega_0, \Omega_1, \dots, \Omega_k$  образуют базис, то этот тор представляет собой минимальное множество. В противном случае тор расслаивается на семейство  $k$ -мерных торов.

Аналогично теореме 4.6, можно построить отображение Пуанкаре сечения  $\theta_k = 0 \pmod{2\pi}$  в себя вдоль траекторий вблизи тора  $\mathbb{T}_0^{k+1}$ . Применяя принцип кольца можно доказать, что при всех достаточно малых значениях  $\mu$  данное отображение имеет  $\mathbb{C}^r$ -гладкий инвариантный тор  $\mathbb{T}_\mu^k$ . Следовательно, система (4.3.9) имеет  $(k + 1)$ -мерный  $\mathbb{C}^r$ -гладкий инвариантный тор  $\mathbb{T}_\mu^{k+1}$ .

Отображение на торе  $\mathbb{T}_\mu^k$  имеет вид

$$\begin{aligned} \bar{\theta}_0 &= \theta_0 + \omega_0 + g^*(\theta_0, \dots, \theta_{k-1}, \mu), \\ \bar{\theta}_1 &= \theta_1 + \omega_1, \\ &\vdots \\ \bar{\theta}_{k-1} &= \theta_{k-1} + \omega_{k-1}, \end{aligned} \quad (4.3.11)$$

где каждое уравнение берется по модулю  $2\pi$ , а  $\omega_j = 2\pi \frac{\Omega_j}{\Omega_k}$ , ( $j = 0, \dots, k - 1$ ).

Положим, что существует дополнительный малый параметр  $\alpha$ , при котором первое уравнение системы (4.3.11) имеет вид

$$\bar{\theta}_0 = \theta_0 + \omega_0 + g_0^*(\theta_0, \mu) + g_1^*(\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_{k-1}, \mu, \alpha), \pmod{2\pi}, \quad (4.3.12)$$

где  $g_1^* = 0$  при  $\alpha = 0$ . Согласно предположению, при  $\alpha = 0$  выражение (4.3.12) представляет собой диффеоморфизм окружности

$$\bar{\theta} = \theta_0 + \omega_0 + g_0^*(\theta, \mu) \pmod{2\pi}. \quad (4.3.13)$$

Допустим, существует интервал  $\mu \in [\mu_1, \mu_2]$ , на котором диффеоморфизм (4.3.13) имеет только грубые периодические точки (см. раздел 4.4). Тогда при помощи принципа кольца можно доказать, что при всех достаточно малых значениях  $\alpha$  каждая устойчивая периодическая траектория диффеоморфизма (4.3.13) соответствует устойчивому  $(k - 1)$ -мерному тору диффеоморфизма (4.3.11).

Запишем систему (4.3.9) в виде неавтономной квазипериодической системы

$$\dot{x} = X(x) + p(x, \Omega_1 t, \dots, \Omega_k t, \mu),$$

с базисом частот  $(\Omega_1, \dots, \Omega_k)$ . Как было показано, в данном случае при всех малых значениях  $\mu$  положение равновесия системы (4.3.10) соответствует устойчивому квазипериодическому решению с тем же базисом частот. Устойчивая периодическая орбита  $L$  системы (4.3.10) соответствует устойчивой квазипериодической «трубке» в пространстве  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$ , гомеоморфной<sup>4</sup> бесконечному  $(k + 1)$ -мерному цилиндру.

Если функция  $p$  имеет вид

$$p(x, \Omega_1 t, \dots, \Omega_k t, \mu) = p_0(x, \Omega_k t, \mu) + p_1(x, \Omega_1 t, \dots, \Omega_k t, \mu, \alpha)$$

где функция  $p_1$  обращается в нуль при  $\alpha = 0$ , и выполняется предположение, сделанное относительно отображения (4.3.13), то на этой трубке существует устойчивое квазипериодическое решение с тем же базисом частот  $(\Omega_1, \dots, \Omega_k)$ . Однако, в целом, нельзя исключать случая, когда структура траекторий на трубке является гораздо менее тривиальной.

#### 4.4. Основы теории диффеоморфизмов окружности. Задачи синхронизации

Ориентируемый диффеоморфизм окружности имеет вид

$$\bar{\theta} = \theta + g(\theta) \pmod{2\pi}, \quad (4.4.1)$$

где  $g(\theta)$  — периодическая функция  $\theta$  с периодом  $2\pi$ . Уравнение (4.4.1) можно записать как

$$\bar{\theta} = \theta + \tau + g_0(\theta) \pmod{2\pi}, \quad (4.4.2)$$

<sup>4</sup>А также эквиморфной. Эквиморфизм представляет собой равномерно непрерывный гомеоморфизм.

где  $g_0(\theta)$  также является периодической функцией, среднее значение которой равно нулю.

Наиболее простой случай соответствует  $g_0(\theta) \equiv 0$ . При этом

$$\bar{\theta} = \theta + \tau \pmod{2\pi}, \quad (4.4.3)$$

и, следовательно, такой диффеоморфизм является вращением на угол  $\tau$ . Очевидно, что если величина  $\tau$  соизмерима с  $2\pi$ , то есть  $\tau = 2\pi p/q$ , то все точки, лежащие на этой окружности, являются периодическими с периодом  $q$ . В случае, если величина  $\tau$  не соизмерима с  $2\pi$ , периодических точек не существует, а траектория любой точки окружности всюду плотная на окружности  $\mathbb{S}^1$ . В последнем случае окружность представляет собой минимальное множество.

В общем случае вопрос о динамике системы (4.4.1) решается при помощи теории Пуанкаре–Данжуа.

Диффеоморфизм (4.4.1) можно рассматривать не как отображение окружности, а как отображение  $\mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$ . В таком контексте указанное отображение называется *поднятием*, а  $\mathbb{R}^1$  — *накрытием* окружности  $\mathbb{S}^1$ . Пусть  $\{\theta_j\}_{j=0}^{\infty}$  — полутраектория начальной точки  $\theta_0$ . Пуанкаре показал, что существует предел

$$\omega = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\theta_j}{2\pi j},$$

не зависящий от выбора начальной точки  $\theta_0$ . Величина  $\omega$  называется *числом вращения Пуанкаре*.

**Теорема 4.8. (Пуанкаре).** *Если число вращения  $\omega$  является рациональным, то множество неблуждающих точек состоит из периодических точек, имеющих равные периоды. Если число  $\omega$  иррациональное, то неблуждающее множество не содержит периодических точек.*

Заметим, что Пуанкаре доказал верность этого утверждения для случая, когда диффеоморфизм (4.4.1) является гомеоморфизмом.

Следующий вопрос касается структуры неблуждающего множества в случае иррационального числа вращения.

**Теорема 4.9. (Пуанкаре).** *Пусть диффеоморфизм (4.4.1) является гомеоморфизмом с иррациональным числом вращения. Тогда его минимальное множество может представлять собой либо окружность  $\mathbb{S}^1$ , либо конечное или бесконечное объединение минимальных множеств, структура которых аналогична канторову дисконтинууму.*

**Теорема 4.10. (Данжуа).**<sup>5</sup> *Если диффеоморфизм (4.4.1) является  $\mathbb{C}^r$  ( $r \geq 2$ )-гладким, а число вращения иррациональным, то указанный диффеоморфизм топологически сопряжен с отображением*

$$\bar{\theta} = \theta + \omega \pmod{2\pi}. \quad (4.4.4)$$

Из теоремы Данжуа следует, что в данном случае окружность представляет собой минимальное множество. Для случая, когда диффеоморфизм (4.4.1) является лишь  $\mathbb{C}^1$ -гладким, Данжуа привел примеры того, что неблуждающее множество является минимальным множеством, структура которого аналогична канторову дисконтинууму. Именно поэтому выше особое внимание мы уделили необходимости доказательства, по крайней мере,  $\mathbb{C}^2$ -гладкости инвариантных кривых.

Теперь рассмотрим однопараметрическое семейство диффеоморфизмов

$$\bar{\theta} = \theta + g(\theta, \mu) \pmod{2\pi}, \quad (4.4.5)$$

непрерывно зависящих от параметра  $\mu$ . Очевидно, что число вращения  $\omega(\mu)$  определено для каждого значения  $\mu$ .

**Теорема 4.11.** *Число вращения  $\omega(\mu)$  является непрерывной функцией от параметра  $\mu$ .*

Пуанкаре, а позже Крылов и Боголюбов определенно знали этот результат, явное доказательство которого было дано Майером. В связи с этим следует привести следующий результат, полученный Эрманом [34]: если семейство гладко зависит от параметра  $\mu$ , и

$$g'_\mu(\theta, \mu) > 0 \quad (4.4.6)$$

для всех  $\theta \in \mathbb{S}^1$  и  $\mu$  из некоторого интервала  $\Delta$ , то  $\omega(\mu)$  — строго монотонная функция для каждого значения  $\mu \in \Delta$  при котором указанная функция является иррациональной.

Обозначим через  $B$  пространство всех диффеоморфизмов вида (4.4.5). Расстояние между любыми двумя такими диффеоморфизмами определяем следующим образом. Пусть  $T_1$  задается при помощи уравнения

$$\bar{\theta} = \theta + g_1(\theta, \mu) \pmod{2\pi},$$

<sup>5</sup> Данжуа доказал верность этого утверждения при условии, что  $g'(\theta)$  имеет ограниченную вариацию, что имеет место при  $g(\theta) \in \mathbb{C}^2$ .

а  $T_2$  — при помощи уравнения

$$\bar{\theta} = \theta + g_2(\theta, \mu) \pmod{2\pi}.$$

Тогда,

$$\text{dist}(T_1, T_2) = \max_{\theta} \left\{ |g_1(\theta) - g_2(\theta)| + |g'_1(\theta) - g'_2(\theta)| \right\}.$$

**Теорема 4.12. (Майер).** *Диффеоморфизмы, периодические точки которых грубы, являются всюду плотными в пространстве  $B$ .*

Из данной теоремы следует, что в пространстве  $B$  любая окрестность диффеоморфизма с иррациональным числом вращения Пуанкаре содержит диффеоморфизм с рациональным числом вращения. С другой стороны, если диффеоморфизм (4.4.1) имеет грубую периодическую траекторию, она сохраняется при достаточно малых гладких возмущениях исходной системы. Следовательно, близкие диффеоморфизмы будут иметь равные числа вращения. На основании этого, в случае однопараметрического семейства диффеоморфизмов существует интервал  $[\mu^-, \mu^+]$ , для всех величин  $\mu$  из которого функция  $\omega(\mu)$  является постоянной и принимает рациональные значения.

При условии (4.4.6) де Мелу и Пью [46] в дополнении к результату, полученному Эрманом, показали, что функция  $\omega(\mu)$  является монотонной для значений параметра  $\mu$ , лежащих справа от  $\mu^-$  и слева от  $\mu^+$ .

Следует также учесть, что для любого типичного семейства диффеоморфизмов окружности (в данном случае не устанавливается точное значение этого понятия) при каждом значении  $\mu$ , лежащем в интервале монотонности функции  $\omega(\mu)$ , прообраз рационального числа вращения  $p/q$  представляет собой интервал  $[\mu_{p/q}^-, \mu_{p/q}^+]$ , где  $\mu_{p/q}^- \neq \mu_{p/q}^+$ , а прообраз иррационального числа вращения является точкой. В силу этой особенности график функции  $\omega(\mu)$ , как правило, называют «дьявольской лестницей».

Случай, когда функция  $\omega(\mu)$  является монотонной, приводится на рис. 4.4.1. Такая функция является постоянной на тех интервалах, где она принимает рациональные значения, а прообразы иррациональных значений функции  $\omega$  образуют нигде не плотное множество  $S$ , возможно, отличной от нуля лебеговой мерой.

Как было замечено ранее, цель большинства задач синхронизации состоит в нахождении областей пространства параметров, для которых имеют

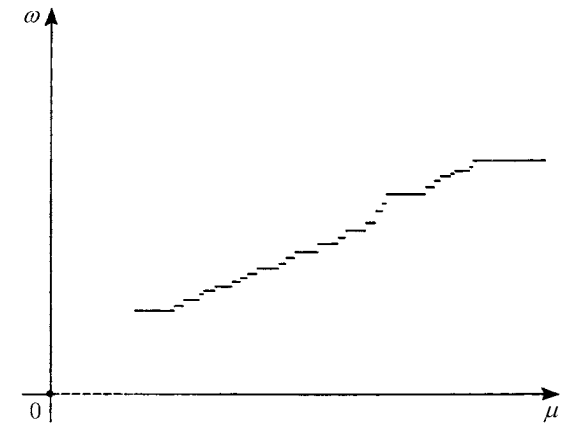


Рис. 4.4.1. Эскиз «дьявольской лестницы»

место устойчивые периодические колебания. Теперь мы можем показать, что в общем случае существует счетное множество таких областей синхронизации. Однако из этого не следует, что все они наблюдаемы. Этот факт широко известен для квазилинейных задач. Например, в случае генератора синусоидальных колебаний Ван-дер-Поля под действием малой внешней периодической силы, соответствующая модель описывается уравнением

$$\ddot{x} + \varepsilon(x^2 - 1)\dot{x} + \omega_0^2 x = \mu A \sin \omega t,$$

где  $0 < \mu \ll 1$ . Тщательный анализ показывает, что легко наблюдаемы лишь резонансы вида  $(1 : 1)$ ;  $(1 : 2)$ ;  $(1 : 3)$ ;  $(2 : 3)$ . Используя метод усреднения, можно доказать, что другие интервалы синхронизации имеют размер порядка  $e^{-1/\mu}$ . Порядки наблюдаемых резонансов в сильно нелинейных системах могут быть различны. Этот результат подтвердили многочисленные эксперименты по исследованию задачи о возникновении турбулентности.

Таким образом, можно обнаружить лишь конечное число видимых областей синхронизации (в данном случае не рассматривается диапазон экспериментальных наблюдений). Оставшуюся часть области параметров, в которой существует двумерный инвариантный тор, как правило, относят к области модуляции и биений. Используя терминологию теории динамических систем, режимы модуляции можно назвать устойчивым тором, имеющим либо непериодическую траекторию, либо устойчивую периодическую

траекторию с довольно большим периодом<sup>6</sup>. Уместно напомнить, что системы с непериодическим поведением траекторий на торе, в общем случае, не образуют области на пространстве параметров.

Здесь мы сталкиваемся со случаем, когда математическая интерпретация задачи синхронизации по существу отличается от широкоиспользуемой в нелинейной динамике трактовки. Причина этого состоит в том, что в традиционном качественном анализе используется понятие иррациональных чисел, что является чисто математической абстракцией. В заключение заметим, что приведенный выше результат является не единственным примером того, как математическая формализация задачи, базирующаяся на понятии иррациональных чисел, не согласуется со здравым смыслом, лежащим в основе любых эмпирических методов или компьютерных экспериментов<sup>7</sup>.

<sup>6</sup>Боголюбов и Митропольский предложили относить оба случая к многочастотному режиму.

<sup>7</sup>Аналогичная ситуация имеет место при численном изучении автономной системы, на которую действует квазипериодическая внешняя сила, когда понятие базиса независимых частот играет ключевую роль.

## ГЛАВА 5

# Центральное многообразие. Локальный случай

Многие физические системы можно реалистично смоделировать при помощи систем ОДУ. Как правило, такие системы зависят от конечного числа управляющих параметров. Путем подбора параметров можно объяснить не только известное поведение модели, но также спрогнозировать новые явления, если такие существуют. В большинстве случаев между прогнозами, полученными путем моделирования, и реальными явлениями должно обеспечиваться как качественное, так и количественное (достаточно точное) соответствие. При изучении систем большой размерности возникают трудности как математического, так и численного характера, хотя существует ряд частных случаев с четко определенной методикой решения.

Рассмотрим семейство динамических систем

$$\dot{x} = X(x, \mu), \quad (5.0.1)$$

где  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_p)$ , а  $X$  —  $\mathbb{C}^r$ -гладкая относительно всех своих аргументов функция, определенная на некоторой области  $D \times U$ , где  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  и  $U \subseteq \mathbb{R}^p$ . Здесь  $x$  является вектором фазовых переменных, а  $\mu$  — вектором параметров. Положим, что при  $\mu = \mu^0$  семейство (5.0.1) имеет экспоненциально устойчивую неподвижную точку  $O_0(x = x_0)$ . Следовательно, корни характеристического уравнения

$$\det |A_0 - \lambda I| = 0$$

соответствующей линеаризованной системы

$$\dot{\xi} = A_0 \xi,$$

лежат слева от мнимой оси. В приведенном выше выражении

$$A_0 = \frac{\partial X(x_0, \mu^0)}{\partial x}.$$

Поскольку  $\det |A_0| \neq 0$ , согласно теореме о неявной функции, существует малая величина  $\delta > 0$  такая, что при  $|\mu - \mu^0| < \delta$ , система (5.0.1) имеет неподвижную точку  $O_\mu(x = x(\mu))$ , близкую к точке  $O_0$ . Кроме того, неподвижная точка  $O_\mu$  также является устойчивой для всех малых значений  $|\mu - \mu_0| < \delta_0 \leq \delta$  в связи с тем, что корни характеристического уравнения

$$\det |A(\mu) - \lambda I| = 0,$$

являются непрерывными функциями от  $\mu$ , где

$$A(\mu) = \frac{\partial X(x(\mu), \mu)}{\partial x}.$$

Рассмотрим произвольную величину  $\mu^1$ , удовлетворяющую условию  $|\mu^1 - \mu^0| < \delta_0$ . Используя приведенные выше доводы, можно найти новую окрестность  $|\mu - \mu^1| < \delta_1$ , в которой система (5.0.1) имеет устойчивое положение равновесия и так далее. В итоге в пространстве параметров можно построить максимальное открытое множество  $G$ , которое называется *областью устойчивости* положения равновесия  $O_\mu$ . Такая процедура построения области устойчивости аналогична построению поверхности Римана аналитической функции при помощи метода Вейерштрасса. Может оказаться, что область устойчивости имеет разветвленную структуру.

Граница  $\Gamma$  области устойчивости  $G$  соответствует случаю, когда несколько характеристических показателей положения равновесия  $O_\mu$ , скажем  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ , лежат на мнимой оси, тогда как остальные собственные значения  $\lambda_{m+1}, \dots, \lambda_n$ , как и прежде, располагаются в открытой левой полуплоскости. Таким образом, вблизи бифуркационного положения равновесия при некоторой фиксированной величине параметра на границе  $\Gamma$ , система имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{y} &= Ay + f(x, y), \\ \dot{x} &= Bx + g(x, y), \end{aligned} \quad (5.0.2)$$

где  $x \in \mathbb{R}^m$ ,  $y \in \mathbb{R}^{n-m}$ ,  $\text{spectr } A = \{\lambda_{m+1}, \dots, \lambda_n\}$ , в связи с чем  $\text{Re } \lambda_j < 0$  ( $j = m+1, \dots, n$ ),  $\text{spectr } B = \{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}$ , в связи с чем  $\text{Re } \lambda_i = 0$  ( $i = 1, \dots, m$ );  $f$  и  $g \in \mathbb{C}^r$ -гладкие функции, которые вместе с их первыми производными обращаются в нуль в начале координат.

Для описания поведения траекторий вблизи точки  $O_\mu$  недостаточно анализа только линеаризованной системы, необходимо также учитывать

нелинейные члены. Ляпунов назвал такие случаи *критическими* и получил для них ряд условий устойчивости положения равновесия.

Современный подход к изучению критических случаев не ограничивается только решением задачи устойчивости. Он также включает в себя поиск причин потери устойчивости положения равновесия и исследование того, что происходит за границей области устойчивости  $\Gamma$ . Ответить на эти вопросы можно лишь в том случае, если рассматриваемая система зависит от некоторого параметра  $\mu$ :

$$\begin{aligned} \dot{y} &= Ay + f(x, y, \mu), \\ \dot{x} &= Bx + g(x, y, \mu), \end{aligned} \quad (5.0.3)$$

где  $\mu$  принимает значения близкие к некоторой критической величине параметра  $\mu^*$  (далее полагаем, что  $\mu^* = 0$ ). Все указанные задачи составляют основу *теории локальных бифуркаций*, главным результатом которой является *теорема о центральном многообразии*, сформулированная Плиссом [52] и Келли [37].

**Теорема 5.1. (О центральном многообразии).** Пусть в системе (5.0.3)  $f, g \in \mathbb{C}^r$ , где  $1 \leq r < \infty$ . Тогда, существует окрестность  $U$  положения равновесия  $O$ , которая при всех достаточно малых значениях  $\mu$  содержит  $\mathbb{C}^r$ -гладкое<sup>1</sup> инвариантное центральное многообразие  $W^C$ , задаваемое уравнением

$$y = \psi(x, \mu), \quad (5.0.4)$$

где

$$\psi(0, 0) = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x}(0, 0) = 0.$$

Все траектории, не выходящие за пределы окрестности  $U$  во все моменты времени, принадлежат центральному многообразию.

Существование центрального многообразия позволяет свести решение задач, связанных с критическими случаями, к исследованию  $m$ -мерной системы

$$\dot{x} = Bx + g(x, \psi(x, \mu), \mu). \quad (5.0.5)$$

<sup>1</sup>Следует заметить, что если  $f, g \in \mathbb{C}^\infty$ , то в достаточно малой окрестности  $U$  положения равновесия  $O$  гладкость центрального многообразия  $W^C$  может быть сколь угодно велика. Однако с увеличением гладкости многообразия  $W^C$ , окрестность  $U$  уменьшается, в принципе, даже в случае, когда исходное семейство имеет бесконечную гладкость,  $\mathbb{C}^\infty$ -гладкого центрального многообразия может не существовать.



Ее размерность равна количеству характеристических показателей, лежащих в критический момент времени на мнимой оси, и *не зависит от размерности исходной системы* ( $\dim = n$ ), которая может быть неограниченно большой. Поскольку традиционная теория занимается, главным образом, исследованием бифуркаций, соответствующих значениям  $m = 1, 2, 3$  или  $m = 4$ , редукция произвольной системы (5.0.5) большой размерности к системе (5.1.3) меньшей размерности — исключительное продвижение.

Следует вновь подчеркнуть, что центральное инвариантное многообразие обладает лишь конечной гладкостью, так, даже в случае, если исходные системы являются аналитическими, соответствующая приведенная система теряет аналитическую структуру. Следовательно, неявные результаты, полученные при исследовании аналитических систем малой размерности, нельзя непосредственно использовать для изучения критических случаев. *Неединственность* центрального многообразия также может стать причиной возникновения ряда трудностей.

Логическая схема теории центрального многообразия рассматривается в разделе 5.1 (доказательства представлены в разделе 5.4). Исследование также затрагивает другой геометрический объект — *сильно устойчивое инвариантное слоение*. Его существование позволяет локально привести систему (путем  $\mathbb{C}^{r-1}$ -гладкой замены переменных) к более простой и удобной *треугольной* форме

$$\begin{aligned} \dot{y} &= (A + F(x, y, \mu)) y, \\ \dot{x} &= Bx + G(x, \mu), \end{aligned} \quad (5.0.6)$$

где  $G(x, \mu) \equiv g(x, \psi(x, \mu), \mu)$ , а  $F \in \mathbb{C}^{r-1}$ ,  $F(0, 0, 0) = 0$ . Следовательно, поведение «критических» переменных  $x$  в малой окрестности негрубого положения равновесия не зависит от других переменных и описывает поведение на центральном многообразии. Для переменных  $y$  имеет место экспоненциальное сжатие (поскольку спектр матрицы  $A$  лежит строго слева от мнимой оси. Сравните с разделом 2.6).

Аналог теоремы о центральном многообразии является верным и в общем случае, то есть при рассмотрении положения равновесия, несколько характеристических показателей которого лежат справа от мнимой оси. Таким образом, в этом случае качественное исследование локальных бифуркаций также можно свести к изучению системы меньшей размерности. Однако заметим, что в общем случае гладкое приведение всей системы к треугольной форме типа (5.0.6) не всегда возможно (соответствующее преобразование координат имеет гладкость только  $\mathbb{C}^0$ ).

Эта же схема приемлема для изучения поведения решений на границе существования *периодических траекторий*, но с одним значительным ограничением. Для периодических траекторий, в отличие от положений равновесия, устойчивость или существование границ может быть двух различных типов, а именно:

- 1) Бифуркационная периодическая траектория существует, когда параметр лежит на границе;
- 2) Бифуркационная периодическая траектория не существует на границе.

Для положений равновесия границы второго типа не существуют, в то же время известно, что периодические траектории могут исчезать при достижении границы бифуркации: это происходит либо стягиванием к положению равновесия, либо поглощением гомоклинической петли, либо посредством более сложного явления — «катастрофы голубого неба». В первой части этой книги границы второго типа рассматриваться не будут.

Поскольку рассматривается лишь первый случай, мы можем построить сечение потока, проходящее через критическую периодическую траекторию (которая по предположению существует) и изучим поведение траекторий соответствующего отображения Пуанкаре, вблизи бифуркационной неподвижной точки. Теперь теорию центрального многообразия можно использовать так же, как в случае положений равновесия.

Доказательство теоремы о центральном многообразии, приведенное в данной главе, основывается на изучении некоторых краевых задач (разделы 5.2 и 5.3), как и в разделе 2.8 для доказательства существования и гладкости устойчивого и неустойчивого многообразий положения равновесия седлового типа. В главе разработан единый подход, как для положений равновесия, так и для периодических траекторий. Более того, наше доказательство будет включать все другие теоремы о локальном инвариантном многообразии, представленные в данной книге, а также теоремы об инвариантных слоениях.

Заметим, что помимо динамических приложений теорем об инвариантных многообразиях, полученные результаты можно использовать косвенным образом, например, при приведении системы вблизи точки седлового типа к специальной форме. Для этого необходимо выделить сильно устойчивое и неустойчивое многообразия седла. Этот вопрос подробно рассматривается в приложении А.

## 5.1. Приведение к центральному многообразию

Рассмотрим  $n$ -мерную систему дифференциальных уравнений в малой окрестности негрубого положения равновесия  $O$ . В частности, изучим случай, когда несколько характеристических показателей точки  $O$  лежат на мнимой оси, а остальные имеют отрицательные действительные части:

$$\operatorname{Re} \lambda_1 = \dots = \operatorname{Re} \lambda_m = 0, \quad \operatorname{Re} \lambda_{m+1} < 0, \dots, \operatorname{Re} \lambda_n < 0.$$

Вблизи положения равновесия  $O$  систему можно записать в виде

$$\begin{aligned} \dot{y} &= Ay + f(x, y), \\ \dot{x} &= Bx + g(x, y), \end{aligned} \quad (5.1.1)$$

где  $x \in \mathbb{R}^m$ ,  $y \in \mathbb{R}^{n-m}$ ,  $\operatorname{spectr} A = \{\lambda_{m+1}, \dots, \lambda_n\}$ ,  $\operatorname{spectr} B = \{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}$ , а  $f$  и  $g$  —  $\mathbb{C}^r$ -гладкие функции, которые вместе с их первыми производными обращаются в нуль в начале координат.

Включим систему в семейство, зависящее от некоторого множества параметров  $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_p)$ , а именно:

$$\begin{aligned} \dot{y} &= Ay + f(x, y, \mu), \\ \dot{x} &= Bx + g(x, y, \mu). \end{aligned} \quad (5.1.2)$$

**Теорема 5.2.** Система (5.1.2), где функции  $f$  и  $g$  вместе с их первыми производными по  $(x, y)$  непрерывны по  $\mu$ , а  $f(0, 0, 0) = 0$ ,  $g(0, 0, 0) = 0$ ,  $(f, g)'_{(x, y)}(0, 0, 0) = 0$ , при любых малых  $\mu$  имеет  $m$ -мерное  $\mathbb{C}^r$ -гладкое инвариантное локальное центральное многообразие  $W_{loc}^C: y = \psi(x, \mu)$  (в данном случае функция  $\psi$  вместе со всеми ее производными по  $x$  непрерывно зависит от  $\mu$ ), для которого при  $\mu = 0$  ( $\psi(0, 0) = 0$ ,  $\frac{\partial \psi}{\partial x}(0, 0) = 0$ ) в точке  $O$  касательным является пространство  $x$ . При любом значении  $\mu$  центральное многообразие содержит все траектории, которые остаются в малой окрестности точки  $O$  во все моменты времени.

Доказательство данной теоремы приводится в разделе 5.4. Заметим, что в случае, когда правая часть системы (5.1.2) гладко зависит от  $\mu$ , центральное многообразие также гладко зависит от  $\mu$ . В частности, если функции  $f$  и  $g$  являются  $\mathbb{C}^r$ -гладкими относительно  $(x, y, \mu)$ , то можно положить, что

функция  $\psi$  (график которой  $y = \psi(x, \mu)$  представляет собой многообразие  $W_{loc}^C$ ) также является  $\mathbb{C}^r$ -гладкой относительно  $(x, \mu)$ . Гладкость функции следует из теоремы 5.2, если к системе (5.1.2) формально добавить уравнение

$$\dot{\mu} = 0.$$

Если обозначить пару значений  $(x, \mu)$  через новую переменную  $x$ , то вид расширенной системы будет аналогичен беспараметрической системе (5.1.1). Следовательно, в данном случае можно применить теорему о центральном многообразии, в результате чего получаем центральное многообразие, которое  $\mathbb{C}^r$ -гладко зависит от новой переменной  $x$ , то есть оно является  $\mathbb{C}^r$ -гладким относительно  $(x, \mu)$ . Зачастую, этот прием позволяет исключить зависимость системы от параметра  $\mu$ . Таким образом, в дальнейшем мы опускаем зависимость от  $\mu$  в тех случаях, когда она не является существенной.

Следует напомнить, что центральное многообразие  $W^C$  не обязательно является  $\mathbb{C}^\infty$ -гладким, даже если система имеет гладкость  $\mathbb{C}^\infty$ . Конечно, если исходная система является  $\mathbb{C}^\infty$ -гладкой, то указанное многообразие имеет гладкость  $\mathbb{C}^r$  при любом конечном значении  $r$ . Следовательно, в данном случае при любом значении  $r$  можно применить теорему о центральном многообразии, согласно которой

*Если исходная система является  $\mathbb{C}^\infty$ -гладкой, то при любом конечном значении  $r$  существует окрестность  $U_r$  начала координат, где многообразие  $W_{loc}^C$  является  $\mathbb{C}^r$ -гладким.*

Однако, в принципе, эти окрестности могут сжиматься до нуля при  $r \rightarrow +\infty$ . Чтобы показать это, заметим, что при изменении параметра  $\mu$  положение равновесия  $O$  может оставаться неизменным, но характеристические показатели положения равновесия  $O$ , лежащие на мнимой оси при  $\mu = 0$ , могут сместиться при  $\mu \neq 0$ , скажем, влево. Эти показатели соответствуют ведущим собственным значениям связанной линеаризованной системы. Следовательно, при ненулевом значении  $\mu$ , центральное многообразие совпадает с некоторым ведущим многообразием, имеющим, в целом, лишь конечную гладкость (см. главу 2).

При  $\mu = 0$  выполняется следующее достаточное условие гладкости.

*Если каждая траектория на центральном многообразии  $W^C$   $\mathbb{C}^\infty$ -гладкой системы при  $\mu = 0$  стремится к положению равновесия*

О либо при  $t \rightarrow +\infty$ , либо при  $t \rightarrow -\infty$ , то центральное многообразие является  $\mathbb{C}^\infty$ -гладким.

Чтобы доказать это, рассмотрим точку  $P \in W^C$ . Пусть  $V$  — небольшая часть многообразия  $W^C$ , содержащая  $P$ . Согласно предположению, для всякого значения  $r$  можно подобрать такую достаточно малую  $V$ , что сдвиг  $V_t$  по времени  $t$  вдоль траекторий системы при некотором конечном значении  $t$  лежит в окрестности  $U_r$ . Поскольку центральное многообразие является инвариантным,  $V_t$  остается подмножеством центрального многообразия. Следовательно,  $V_t$  имеет гладкость  $\mathbb{C}^r$ , поскольку она лежит в  $U_r$  по определению окрестности  $U_r$ . Теперь заметим, что исходная часть  $V$  есть сдвиг  $V_t$  по времени на  $(-t)$ . Сдвиг вдоль траекторий  $\mathbb{C}^\infty$ -гладкой системы является  $\mathbb{C}^\infty$ -гладким отображением. Таким образом,  $V$  представляет собой  $\mathbb{C}^r$ -гладкую поверхность. Вывод: для любой точки  $P \in W_{loc}^C$  при любом конечном значении  $r$  существует окрестность точки  $P$ , в которой многообразие  $W_{loc}^C$  является  $\mathbb{C}^r$ -гладким, откуда следует  $\mathbb{C}^\infty$ -гладкость многообразия  $W^C$ .

Как было сказано ранее, главное применение теоремы о центральном многообразии заключается в том, что при исследовании локальных бифуркаций негрубого положения равновесия  $O$  (то есть при изучении множества траекторий, никогда не выходящих за пределы малой окрестности точки  $O$ , и зависимости этого множества от параметра  $\mu$ ) систему можно ограничить на центральное многообразие  $W^C$

$$\dot{x} = Bx + g(x, \psi(x)). \quad (5.1.3)$$

В данном случае существует неопределенность, вызванная тем, что центральное многообразие определяется системой неоднозначно. Поэтому понятие приведения системы к центральному многообразию требует логического анализа.

Пусть  $N$  представляет собой множество траекторий, которые во все моменты времени (от  $-\infty$  до  $+\infty$ )<sup>2</sup> остаются в малой окрестности точки  $O$ . Положим, что существуют два различных центральных многообразия:  $W_{loc}^{C1}: y = \psi_1(x)$  и  $W_{loc}^{C2}: y = \psi_2(x)$ . На основании теоремы о центральном многообразии оба многообразия должны содержать множество  $N$ , то есть

$$N \subseteq W_{loc}^{c1} \cap W_{loc}^{c2}.$$

<sup>2</sup>В отличие от случая устойчивого равновесия, когда  $N = \{O\}$ , наличие нуля, или чисто мнимых характеристических показателей может сделать структуру множества  $N$  совершенно нетривиальной.

Иными словами, если при некотором значении  $x$  траектория точки  $(x, \psi_1(x))$  никогда не выходит за пределы некоторой малой окрестности точки  $O$ , то  $\psi_2(x) = \psi_1(x)$ , то есть функция  $\psi$  является однозначной при всех  $x$ , соответствующих точкам множества  $N$ . По сути, выполняется следующее более общее утверждение.

**Теорема 5.3.** Для любых двух центральных многообразий  $y = \psi_1(x)$  и  $y = \psi_2(x)$  при каждом  $x_0$  таком, что для некоторого  $y_0$  точка  $(x_0, y_0) \in N$ , функция  $\psi_1$  вместе со всеми своими производными совпадает с  $\psi_2$ :

$$\left. \frac{d^k \psi_1}{dx^k} \right|_{x=x_0} = \left. \frac{d^k \psi_2}{dx^k} \right|_{x=x_0}, \quad k = 0, \dots, r.$$

Применяя эту теорему к точке  $O$  (которая по определению принадлежит множеству  $N$ ), получаем следующий результат:

*Все производные функции  $\psi$ , график которых определяет центральное многообразие, определены однозначно в начале координат.*

Следовательно, не смотря на то, что центральное многообразие не является единственным, ряд Тейлора приведенной системы определен однозначно.

Аналогом этого утверждения является теорема о гладкой сопряженности.

**Теорема 5.4. (О гладкой сопряженности).** Для любых двух локальных центральных многообразий  $W^{C1}$  и  $W^{C2}$  существует  $\mathbb{C}^{r-1}$  замена переменных  $x$ , отображающая траектории приведенной системы

$$\dot{x} = Bx + g(x, \psi_1(x))$$

на траектории другой приведенной системы

$$\dot{x} = Bx + g(x, \psi_2(x)).$$

Эта теорема утверждает, что в динамике на центральных многообразиях одной и той же системы нет существенных различий. Мы видим, что система на центральном многообразии представляет собой достаточно хорошо определенный объект. Разложение приведенной системы в ряд Тейлора

можно выполнить различными способами. Инвариантность многообразия  $y = \psi(x)$  согласно системе (5.1.1) означает, что

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} (Bx + g(x, \psi(x))) = A\psi(x) + f(x, \psi(x)). \quad (5.1.4)$$

Путем разложения функций, входящих в уравнение, в формальный ряд по степеням  $x$  из данного уравнения можно последовательно найти все коэффициенты ряда Тейлора функции  $\psi$  (сравните с разделом 2.7). Таким образом, можно вычислить разложение в ряд Тейлора правой части приведенной системы (5.1.3).

Другой метод основан на вычислении формальных нормальных форм. Напомним (см. раздел 2.9), что в вычислении метод нормальных форм предлагает алгоритм построения полиномиальной замены переменных, позволяющей исключить из ряда Тейлора правых частей произвольной системы ОДУ вблизи положения равновесия все нерезонансные мономы до определенного порядка. В данном случае (система (5.1.1)) любой моном  $x_1^{k_1} \cdot \dots \cdot x_m^{k_m}$ , входящий в функцию  $f$ , является нерезонансным, поскольку резонансная зависимость  $\lambda_j = k_1 \lambda_1 + \dots + k_m \lambda_m$  не может иметь места при  $j > m$ : по предположению  $\operatorname{Re} \lambda_1 = \dots = \operatorname{Re} \lambda_m = 0$ , но  $\operatorname{Re} \lambda_j < 0$ . Аналогично, любой моном, входящий в функцию  $g$ , является нерезонансным, если он содержит переменные  $y$ . Таким образом, можно найти полиномиальную замену координат, приводящую систему (5.1.1) к виду

$$\begin{aligned} \dot{y} &= (A + F(x, y))y + o(\|x, y\|^r), \\ \dot{x} &= Bx + G(x) + o(\|x, y\|^r), \end{aligned} \quad (5.1.5)$$

где  $F$  и  $G$  — некоторые полиномы порядка  $(r - 1)$  и  $r$ , соответственно;  $F(0, 0) = 0$ ,  $G(0) = 0$ ,  $G'(0) = 0$ ; члены  $o(\|x, y\|^r)$  вместе с их производными до порядка  $r$  обращаются в нуль в начале координат. Из уравнения (5.1.4) следует, что если система приводится к виду (5.1.5), центральное многообразие определяется выражением

$$y = 0 + o(\|x\|^{r-1}),$$

откуда получаем, что

$$\dot{x} = Bx + G(x)$$

является приближением  $r$ -го порядка системы на многообразии  $W_{loc}^C$ .

Результаты, полученные при помощи нормальной формы, включает следующая теорема о редукции.

**Теорема 5.5. (теорема о редукции).** *Существует  $\mathbb{C}^{r-1}$ -гладкое преобразование координат ( $\mathbb{C}^1$ -близкое к тождеству вблизи начала координат), приводящее систему (5.1.1) к виду<sup>3</sup>*

$$\begin{aligned} \dot{y} &= (A + F(x, y))y, \\ \dot{x} &= Bx + G(x), \end{aligned} \quad (5.1.6)$$

где  $F \in \mathbb{C}^{r-1}$ ,  $G \in \mathbb{C}^r$

$$F(0, 0) = 0, \quad G(0, 0) = 0, \quad G'(0) = 0.$$

В данном случае поверхность  $\{y = 0\}$  является инвариантным центральным многообразием, следовательно, многообразие  $W_{loc}^C$  было *распрямлено*, как в главе 2. Распрямление центрального многообразия, конечно, представляет собой  $\mathbb{C}^r$ -преобразование. Один порядок гладкости теряется, так как, по сути, благодаря теореме достигнуто большее: локальная эволюция переменных  $x$  теперь полностью не зависит от  $y$ . Заметим, что несмотря на то, что преобразование координат является  $\mathbb{C}^{r-1}$ -гладким, функция  $G$  является  $\mathbb{C}^r$ -гладкой: она просто совпадает с нелинейной частью ограничения (5.1.3) исходной системы на  $\mathbb{C}^r$ -гладкое центральное многообразие. Таким образом, для любой траектории системы (5.1.6) поведение переменных  $x$  аналогично поведению указанных переменных на центральном многообразии. Для переменных  $y$  при  $t \rightarrow +\infty$  имеет место экспоненциальное сжатие в точку  $y = 0$ . Последнее утверждение можно проверить в точности следуя рассуждениям, используемым при доказательстве асимптотической экспоненциальной устойчивости положений равновесия в главе 2. Поскольку вблизи точки  $O$  функция  $F$  является малой, и все собственные значения матрицы  $A$  лежат строго слева от мнимой оси, из первого уравнения системы (5.1.6) следует, что в малой окрестности точки  $O$  выполняется неравенство

$$\frac{d\|y\|}{dt} \leq -\lambda\|y\|$$

на основании чего очевидно экспоненциальное сжатие в точку  $y = 0$ .

Доказательство теоремы о редукции приводится в разделе 5.4. Заметим, что теорема 5.4 о гладкой сопряженности следует непосредственно из

<sup>3</sup>Обратите внимание на различие между системой (5.1.5) и данной формулой: функции  $F$  и  $G$  в последней системе больше не являются полиномами.

теоремы 5.5, а именно: если система (5.1.6) имеет центральное многообразие, отличное от  $\{y = 0\}$ , то приведенная система, как и прежде, задается тем же вторым уравнением системы (5.1.6); то есть для системы, представленной в *треугольной форме* (5.1.6) ограничения на любые два центральные многообразия являются тривиально сопряженными. Вследствие того, что преобразование координат, приводящее систему к этой форме, является  $\mathbb{C}^{r-1}$ -гладким, в случае, когда система не приведена к такой форме, имеет место  $\mathbb{C}^{r-1}$ -сопряженность.

Приведем геометрическую интерпретацию теоремы 5.5. Очевидно, что если система представлена в треугольной форме (5.1.6), то сдвиг по времени  $t$  любой поверхности  $\{x = \text{const}\}$  при любом значении  $t$  (до тех пор, пока траектории остаются в малой окрестности точки  $O$ ) принадлежит поверхности того же вида. Следовательно, *слоение* малой окрестности положения равновесия  $O$  на поверхности, имеющие постоянное значение  $x$ , является *инвариантным* относительно системы (5.1.6). Замена координат, приводящая систему (5.1.6) к исходному виду (5.1.1), отображает поверхности  $\{x = \text{const}\}$  в поверхности вида

$$x = \xi + \eta(y, \xi), \quad (5.1.7)$$

где  $\xi$  — координата  $x$  пересечения поверхности с центральным многообразием;  $\mathbb{C}^{r-1}$ -гладкая функция  $\eta$  вместе с ее первыми производными обращается в нуль в начале координат (заметим, что  $\eta \equiv 0$  на всем многообразии  $W^C$ ).

Поскольку преобразование, отображающее поверхности  $\{x = \text{const}\}$  в поверхности, задаваемые уравнением (5.1.7), является диффеоморфизмом, уравнение (5.1.7) определяет слоение малой окрестности начала координат на поверхности, соответствующие фиксированному значению  $\xi$ . Следовательно, для каждой точки  $(x, y)$  существует единственное значение  $\xi$ , при котором поверхность, соответствующая заданному значению  $\xi$ , проходит через точку  $(x, y)$ . Такая поверхность называется *листом* слоения: каждая точка в малой окрестности положения равновесия  $O$  может принадлежать лишь одному листу. Поскольку листы параметризованы при помощи точек на многообразии  $W_{loc}^C$ , центральное многообразие является *базой* слоения. В связи с тем, что слоение  $\{x = \text{const}\}$  инвариантно относительно системы (5.1.6), его образ (то есть слоение, определяемое уравнением (5.1.7)) является инвариантным слоением системы (5.1.1): при произвольном значении  $t$  сдвиг по времени  $t$  любого листа лежит в одном листе того же слоения до тех пор, пока траектория остается в малой окрестности положения равновесия  $O$ . После выпрямления центрального многообразия приведение к

треугольной форме (5.1.6) выполняется непосредственно путем преобразования  $x \mapsto \xi(x, y)$  (обратного, к (5.1.7)): переменная  $x$  заменяется координатой  $x$  проекции точки вдоль листов инвариантного слоения на центральное многообразие. Инвариантность слоения означает, что эволюция новой координаты  $x = \xi$  не зависит от  $y$ . Таким образом, в теореме 5.5, по существу, устанавливается существование слоения вида (5.1.7), трансверсального центральному многообразию и инвариантного относительно системы (5.1.1). Мы будем называть его *сильно устойчивым слоением* и обозначать как  $\mathcal{F}^{ss}$ . Докажем, что слоение *однозначно* определено во всех точках, траектории которых не выходят за пределы малой окрестности положения равновесия  $O$  при всех *положительных* значениях времени; то есть

*Для любых двух сильно устойчивых инвариантных слоений  $\mathcal{F}_1^{ss}$  и  $\mathcal{F}_2^{ss}$ , и произвольной точки  $P$ , траектория которой остается в малой окрестности положения равновесия  $O$  при всех положительных значениях времени, лист слоения  $\mathcal{F}_1^{ss}$ , проходящий через точку  $P$ , совпадает с соответствующим листом слоения  $\mathcal{F}_2^{ss}$ .*

Поскольку функция  $\eta$ , определяющая слоение, является  $\mathbb{C}^{r-1}$ -гладкой, проекция на центральное многообразие вдоль листов слоения является  $\mathbb{C}^{r-1}$  отображением. Более того, для любой трансверсальной листам поверхности, проекция на другую трансверсаль является  $\mathbb{C}^{r-1}$ -диффеоморфизмом. Другими словами,  $\mathcal{F}^s$  является  $\mathbb{C}^{r-1}$ -гладким слоением.

Заметим, что при любом фиксированном значении  $\xi$  функция  $\eta$  является, по сути,  $\mathbb{C}^r$ -гладкой по  $y$  (доказательство приводится в разделе 5.4). Иначе говоря, каждый лист слоения является  $\mathbb{C}^r$ -гладкой поверхностью. Особое значение  $\xi = 0$  соответствует листу, проходящему через точку  $O$ . Поскольку точка  $O$  представляет собой положение равновесия, она не смещается при сдвиге по времени; следовательно, под действием сдвига по времени  $t$  лист точки  $O$  отображается в себя при любом значении  $t$ . Следовательно,  $\mathbb{C}^r$ -гладкая поверхность  $x = \eta(y; 0)$  является *инвариантным многообразием* системы (5.1.1). Это многообразие в точке  $O$  направлено по касательной к оси  $y$ ; оно является единственным и называется *сильно устойчивым инвариантным многообразием*  $W^{ss}$ .

Если система непрерывно зависит от параметра  $\mu$ , то слоение  $F^{ss}$  также непрерывно зависит от указанного параметра (то есть функция  $\eta$  в уравнении (5.1.7) является непрерывной по  $\mu$ , как будет показано ниже). Если зависимость от параметра  $\mu$  является гладкой, то функция  $\eta$  является  $\mathbb{C}^{r-1}$ -гладкой по  $(y; \xi, \mu)$ . Таким образом, листы слоения  $F^{ss}$   $\mathbb{C}^{r-1}$ -гладко

зависят от  $\mu$ . В частности, при изменении значения  $\mu$  от нуля может существовать положение равновесия  $O_\mu$ , гладко зависящее от  $\mu$ . В данном случае лист слоения  $F^{ss}$ , проходящий через точку  $O_\mu$ , является однозначно определенным. Он представляет собой инвариантное многообразие, а если положение точки  $O_\mu$  является  $\mathbb{C}^k$  функцией параметра  $\mu$ , где  $0 \leq k \leq r-1$ , то сильно устойчивое многообразие  $\mathbb{C}^k$ -гладко зависит от  $\mu$ . Заметим, что вообще, это утверждение перестает выполняться при  $k = r$ .

Теперь рассмотрим более общий случай, когда характеристические показатели положения равновесия располагаются и справа от мнимой оси. Система вблизи точки  $O$  принимает вид

$$\begin{aligned} \dot{y} &= Ay + f(x, y, z), \\ \dot{z} &= Cz + h(x, y, z), \\ \dot{x} &= Bx + g(x, y, z), \end{aligned} \quad (5.1.8)$$

где  $x \in \mathbb{R}^m$ ,  $y \in \mathbb{R}^k$ ,  $z \in \mathbb{R}^{n-m-k}$ ; собственные значения матрицы  $A$  лежат слева от мнимой оси, собственные значения матрицы  $B$  равны нулю или являются чисто мнимыми, а собственные значения матрицы  $C$  лежат справа от мнимой оси;  $\mathbb{C}^r$ -функции  $f$ ,  $h$  и  $g$  вместе с их первыми производными обращаются в нуль в начале координат. Правые части системы могут зависеть от некоторого параметра  $\mu$  либо непрерывно (в таком случае гладкие многообразия, которые будут рассматриваться ниже, непрерывно зависят от  $\mu$ ), либо гладко. В последнем случае параметр  $\mu$  включается в число «центральных» переменных  $x$  с тем, чтобы исследуемые далее многообразия и слоения имели гладкость по  $\mu$ , равную гладкости по  $x$ .

Теория центрального многообразия в данном случае основывается на следующей теореме.

**Теорема 5.6. (О центральном устойчивом многообразии).** *В малой окрестности положения равновесия  $O$  существует  $(m+k)$ -мерное инвариантное центральное устойчивое многообразие  $W_{loc}^{sC} : z = \psi^{sC}(x, y)$  класса  $\mathbb{C}^r$ , которое содержит точку  $O$  и касательно в этой точке к подпространству  $\{z = 0\}$ . Многообразие  $W_{loc}^{sC}$  включает все траектории, остающиеся в малой окрестности точки  $O$  при всех положительных значениях времени. Хотя центральное устойчивое многообразие определено неоднозначно, для любых двух многообразий  $W_1^{sC}$  и  $W_2^{sC}$  функции  $\psi_1^{sC}$  и  $\psi_2^{sC}$  имеют в точке  $O$  (и в каждой точке, траектория которой остается в малой окрестности точки  $O$  при всех значениях  $t \geq 0$ ) одинаковое разложение в ряд Тейлора.*

Доказательство теоремы приводится в разделе 5.4. Заметим, что если система является  $\mathbb{C}^\infty$ -гладкой, центральное устойчивое многообразие имеет, в целом, только конечную гладкость: при любом конечном значении  $r$  существует окрестность  $U_r$  точки  $O$ , в которой многообразие  $W^{sC}$  является  $\mathbb{C}^r$ -гладким. Аналогично вышеуказанному можно заключить, что

*Если система является  $\mathbb{C}^\infty$ -гладкой, а любая траектория многообразия  $W_{loc}^{sC}$  стремится к положению равновесия  $O$  при  $t \rightarrow +\infty$ , то многообразие  $W_{loc}^{sC}$  является  $\mathbb{C}^\infty$ -гладким.*

При обращении времени  $t \rightarrow -t$  матрицы  $A$ ,  $B$  и  $C$  переходят в  $-A$ ,  $-B$  и  $-C$ , соответственно. Таким образом, часть спектра характеристических показателей, соответствующая переменным  $z$ , теперь находится слева от мнимой оси, а часть спектра, соответствующая переменным  $y$  — справа от нее. К системе полученной из системы (5.1.8) путем обращения времени снова можно применить теорему о центральном устойчивом многообразии и получить следующую теорему о *центральном неустойчивом многообразии*:

**Теорема 5.7. (О центральном неустойчивом многообразии).** *В малой окрестности положения равновесия  $O$  существует  $(n-k)$ -мерное  $\mathbb{C}^r$ -гладкое инвариантное многообразие  $W_{loc}^{uC} : y = \psi^{uC}(x, z)$ , содержащее точку  $O$  и касательное в этой точке к подпространству  $\{y = 0\}$ . Центральное неустойчивое многообразие включает все траектории, остающиеся в малой окрестности точки  $O$  при всех отрицательных значениях времени. Для любых двух многообразий  $W_1^{uC}$  и  $W_2^{uC}$  функции  $\psi_1^{uC}$  и  $\psi_2^{uC}$  имеют в точке  $O$  (и в каждой точке, траектория которой остается в малой окрестности точки  $O$  при всех значениях  $t \leq 0$ ) одинаковое разложение в ряд Тейлора. В случае, когда система является  $\mathbb{C}^\infty$ -гладкой, центральное неустойчивое многообразие имеет, в целом, только конечную гладкость, но если каждая траектория многообразия  $W_{loc}^{uC}$  стремится к положению равновесия при  $t \rightarrow -\infty$ , то многообразие  $W_{loc}^{uC}$  является  $\mathbb{C}^\infty$ -гладким.*

Пересечение центрального устойчивого и центрального неустойчивого многообразий является  $\mathbb{C}^r$ -гладким  $m$ -мерным инвариантным *центральным* многообразием  $W_{loc}^C = W_{loc}^{sC} \cap W_{loc}^{uC}$ , определяемым уравнением вида  $(y, z) = \psi^C(x)$ . По построению, центральное многообразие содержит множество  $N$  всех траекторий, остающихся в малой окрестности точки  $O$  при всех значениях времени  $t \in (-\infty, +\infty)$ . Кроме того, функция  $\psi^C$  вместе со всеми ее производными однозначно определена во всех точках множе-

ства  $N$ . В частности, разложение в ряд Тейлора функции  $\psi^C$  в точке  $O$  однозначно определяется системой.

Система (5.1.8), ограниченная на центральное устойчивое многообразие, имеет вид

$$\begin{aligned}\dot{y} &= Ay + f(x, y, \psi^{sC}(x, y)), \\ \dot{x} &= Bx + g(x, y, \psi^{sC}(x, y)),\end{aligned}\quad (5.1.9)$$

аналогичный системе (5.1.1). Следовательно, в данном случае применима теорема 5.5, а именно:

*На многообразии  $W_{loc}^{sC}$  существует  $\mathbb{C}^{r-1}$ -гладкое инвариантное слоение  $\mathcal{F}^{ss}$  с  $\mathbb{C}^r$ -гладкими листами, трансверсальными многообразию  $W^C$ ; для каждой точки, траектория которой стремится к положению равновесия  $O$  при  $t \rightarrow +\infty$ , соответствующий лист однозначно определяется системой.*

На центральном неустойчивом многообразии система приводится к виду, аналогичному системе (5.1.1), при помощи обращения времени. Отсюда следует существование на многообразии  $W_{loc}^{uC}$  сильно неустойчивого инвариантного слоения:

*На многообразии  $W_{loc}^{uC}$  существует  $\mathbb{C}^{r-1}$ -гладкое инвариантное слоение  $\mathcal{F}^{uu}$  с  $\mathbb{C}^r$ -гладкими листами, трансверсальными многообразию  $W^C$ ; для каждой точки, траектория которой стремится к положению равновесия  $O$  при  $t \rightarrow -\infty$  соответствующий лист слоения  $\mathcal{F}^{uu}$  является однозначно определенным.*

Заметим, что эти слоения нельзя продолжить за пределы центрального устойчивого или, соответственно, центрального неустойчивого многообразия без потери гладкости. Вообще, инвариантные слоения малой окрестности точки  $O$ , трансверсальные к центральному устойчивому или центральному неустойчивому многообразиям, не являются гладкими (принадлежат лишь к классу гладкости  $\mathbb{C}^0$ , см. работу Шошиташвилли [70]). Следовательно, проекция центрального устойчивого многообразия на другое, или одного центрального неустойчивого многообразия на другое вдоль листов соответствующего инвариантного слоения может представлять собой негладкое отображение. Таким образом, между ограничениями одной и той же системы на различные центральные устойчивые многообразия (или на различные центральные неустойчивые многообразия) нет гладкой сопряженности (только  $\mathbb{C}^0$ ).

Тем не менее, в общем случае (когда характеристические показатели располагаются по обе стороны мнимой оси) для *центральных* многообразий все же выполняется теорема 5.4 о гладкой сопряженности. Чтобы доказать это, заметим, что если имеют место два различных центральных многообразия  $W_1^C$  и  $W_2^C$ , то по построению существуют две пары центральных устойчивых и центральных неустойчивых многообразий:

$$W_1^C = W_1^{sC} \cap W_1^{uC} \quad \text{и} \quad W_2^C = W_2^{sC} \cap W_2^{uC}.$$

Пересечение  $W_0^C = W_1^{sC} \cap W_2^{uC}$  также представляет собой центральное многообразие (по определению). Система на многообразии  $W_0^C$  является  $\mathbb{C}^{r-1}$ -сопряженной с системой на многообразии  $W_1^C$  при помощи проекции вдоль листов сильно устойчивого слоения многообразия  $W_1^{sC}$ , тогда как система на многообразии  $W_2^C$  является  $\mathbb{C}^{r-1}$ -сопряженной с системой на многообразии  $W_0^C$  при помощи проекции вдоль листов сильно неустойчивого слоения многообразия  $W_2^{uC}$ . Суперпозиция этих двух проекций (из  $W_2^C$  на  $W_0^C$ , а затем на  $W_1^C$ ) дает  $\mathbb{C}^{r-1}$ -гладкое преобразование, отображающее траектории системы, принадлежащей многообразию  $W_2^C$ , на траектории системы многообразия  $W_1^C$  (поскольку слоения, вдоль которых выполняется проецирование, являются инвариантными); то есть между системами, лежащими на многообразиях  $W_2^C$  и  $W_1^C$  существует  $\mathbb{C}^{r-1}$ -сопряженность.

Таким образом, в данном случае при изучении локальных бифуркаций систему также можно ограничить на центральное многообразие. Более того, между динамикой на различных центральных многообразиях одной системы не существует значительной разницы.

Распрямление центрального устойчивого и центрального неустойчивого многообразий, а также распрямление сильно устойчивого и сильно неустойчивого инвариантных слоений на этих многообразиях приводит к следующей теореме, аналогичной теореме 5.5.

**Теорема 5.8.** *При помощи  $\mathbb{C}^{r-1}$ -гладкого преобразования систему (5.1.8) можно локально привести к виду*

$$\begin{aligned}\dot{y} &= (A + F(x, y, z))y, \\ \dot{z} &= (C + H(x, y, z))z, \\ \dot{x} &= Bx + G_0(x) + G_1(x, y, z)y + G_2(x, y, z)z,\end{aligned}\quad (5.1.10)$$

где  $G_0$  —  $\mathbb{C}^r$ -гладкая функция, которая вместе с ее первой производной обращается в нуль при  $x = 0$ ;  $F$  и  $H$  являются  $\mathbb{C}^{r-1}$ -функциями, кото-

рые обращаются в нуль в начале координат;  $G_{1,2} \in \mathbb{C}^{r-1}$ ; функция  $G_1$  тождественно обращается в нуль при  $z = 0$ , а функция  $G_2$  — при  $y = 0$ .

Здесь локальное центральное неустойчивое многообразие определяется как  $\{y = 0\}$ , локальное центральное устойчивое многообразие — как  $\{z = 0\}$ , а локальное центральное многообразие — как  $\{y = 0, z = 0\}$ . Сильно устойчивое слоение состоит из поверхностей  $\{x = \text{const}, z = 0\}$ , а листы сильно неустойчивого слоения имеют вид  $\{x = \text{const}, y = 0\}$ .

Аналогичную теорию можно использовать для исследования негрубых периодических траекторий. Изучение динамики в малой окрестности периодической траектории сводится к рассмотрению отображения Пуанкаре на малом сечении; точка  $O$  пересечения траектории с этим сечением является неподвижной точкой отображения Пуанкаре.

Пусть система имеет размерность  $(n + 1)$ , таким образом, сечение является  $n$ -мерным. Пусть  $m$  мультипликаторов периодической траектории лежат на единичной окружности,  $k$  мультипликаторов лежат строго внутри единичной окружности, а остальные  $(n - m - k)$  мультипликаторов строго больше 1 по абсолютной величине. Отображение Пуанкаре вблизи неподвижной точки  $O$  записывается в виде

$$\begin{aligned}\bar{y} &= Ay + f(x, y, z), \\ \bar{z} &= Cz + h(x, y, z), \\ \bar{x} &= Bx + g(x, y, z),\end{aligned}\tag{5.1.11}$$

где  $x \in \mathbb{R}^m$ ,  $y \in \mathbb{R}^k$ ,  $z \in \mathbb{R}^{n-m-k}$ ; собственные значения матрицы  $A$  лежат внутри единичной окружности, собственные значения матрицы  $B$  равны 1 по абсолютной величине, а собственные значения матрицы  $C$  лежат вне единичной окружности;  $f$ ,  $h$  и  $g$  —  $\mathbb{C}^r$ -гладкие функции, которые вместе с их первыми производными обращаются в нуль в начале координат. Положим, что правые части отображения (а также их производные) могут непрерывно зависеть от некоторых параметров  $\mu$ . В данном случае многообразие и слоения, рассматриваемые ниже, вместе со всеми их производными будут непрерывно зависеть от  $\mu$ . Если отображение гладко зависит от  $\mu$ , параметры можно формально рассматривать как переменные  $x$ , при этом к системе (5.1.11) добавляется тривиальное уравнение  $\bar{\mu} = \mu$ . В таком случае гладкость рассматриваемых ниже инвариантных многообразий и слоений относительно  $\mu$  равносильна гладкости относительно  $x$ .

Теорему о центральном многообразии можно сформулировать следующим образом.

**Теорема 5.9. (О центральном многообразии. Общий случай).** В малой окрестности положения равновесия  $O$  существуют  $\mathbb{C}^r$ -гладкое инвариантное центральное устойчивое многообразие  $W_{loc}^{sC}: z = \psi^{sC}(x, y)$  размерности  $(m + k)$  и центральное неустойчивое многообразие  $W_{loc}^{uC}: y = \psi^{uC}(x, y)$  размерности  $(n - k)$ , содержащие точку  $O$  и касательные к подпространствам  $\{z = 0\}$  и  $\{y = 0\}$ , соответственно. Многообразия  $W_{loc}^{sC}$  включает множество  $N^+$  всех точек, прямые итерации которых, полученные под действием отображения (5.1.11), остаются в малой окрестности точки  $O$ . Многообразие  $W_{loc}^{uC}$  включает множество  $N^-$  — всех точек, обратные итерации которых никогда не покидают малую окрестность положения равновесия  $O$ . Пересечение многообразий  $W_{loc}^{sC}$  и  $W_{loc}^{uC}$  является  $\mathbb{C}^r$ -гладким инвариантным  $m$ -мерным центральным многообразием  $W_{loc}^C: (y, z) = \psi^C(x)$ , касательным в точке  $O$  к пространству  $x$  и содержащим множество  $N = N^+ \cap N^-$ , состоящее из всех точек, итерации которых (как прямые, так и обратные) никогда не покидают малую окрестность точки  $O$ . Разложения в ряд Тейлора в начале координат (и в каждой точке множеств  $N^-, N^+$  или  $N$ , соответственно) функций  $\psi^{uC}$ ,  $\psi^{sC}$  и  $\psi^C$  однозначно определяется системой. На многообразиях  $W_{loc}^{sC}$  и  $W_{loc}^{uC}$  существуют, соответственно, сильно устойчивое и сильно неустойчивое  $\mathbb{C}^{r-1}$ -гладкие инвариантные слоения  $\mathcal{F}^{ss}$  и  $\mathcal{F}^{uu}$  с  $\mathbb{C}^r$ -гладкими  $k$ -мерными (соответственно,  $(n - m - k)$ -мерными) листами, трансверсальными многообразию  $W_{loc}^C$ . Листы слоения  $\mathcal{F}^{ss}$  однозначны в каждой точке множества  $N^+$ , а листы слоения  $\mathcal{F}^{uu}$  однозначны в каждой точке множества  $N^-$ . Путем проецирования вдоль листов сильно устойчивого и сильно неустойчивого инвариантных слоений получаем, что ограничения одного и того же отображения на различные центральные многообразия являются  $\mathbb{C}^{r-1}$ -сопряженными.

Доказательство теоремы приводится в разделе 5.4. Вновь заметим, что даже в случае, когда рассматриваемая система является  $\mathbb{C}^\infty$ -гладкой, инвариантные многообразия имеют, в целом, лишь конечную гладкость. Тем не менее,

*Если система является  $\mathbb{C}^\infty$ -гладкой, а прямые итерации каждой траектории многообразия  $W_{loc}^{sC}$  стремятся к положению равновесия  $O$ , то  $W_{loc}^{sC} \in \mathbb{C}^\infty$ ;*



Если обратные итерации любой траектории многообразия  $W_{loc}^{uC}$  стремятся к положению равновесия  $O$ , то  $W_{loc}^{uC} \in \mathbb{C}^\infty$ ; и  
 Если либо прямые, либо обратные итерации каждой траектории многообразия  $W_{loc}^C$  стремятся к положению равновесия  $O$ , то  $W_{loc}^C \in \mathbb{C}^\infty$ .

При распрямлении инвариантных многообразий и инвариантных слоений получаем теорему, полностью аналогичную теореме 5.8:

**Теорема 5.10.** При помощи  $\mathbb{C}^{r-1}$ -гладкого преобразования систему (5.1.11) можно локально привести к виду

$$\begin{aligned}\bar{y} &= (A + F(x, y, z))y, \\ \bar{z} &= (C + H(x, y, z))z, \\ \bar{x} &= Bx + G_0(x) + G_1(x, y, z)y + G_2(x, y, z)z,\end{aligned}\tag{5.1.12}$$

где  $G_0 \in \mathbb{C}^r$ -функция, которая вместе с ее первой производной обращается в нуль при  $x = 0$ ;  $F$  и  $H$  являются  $\mathbb{C}^{r-1}$ -функциями, обращающимися в нуль в начале координат;  $G_{1,2} \in \mathbb{C}^{r-1}$ ;  $G_1$  тождественно обращается в нуль при  $z = 0$ , а  $G_2$  — при  $y = 0$ .

Здесь локальное центральное неустойчивое многообразие задается как  $\{y = 0\}$ , локальное центральное устойчивое многообразие — как  $\{z = 0\}$ , а локальное центральное многообразие — как  $\{y = 0, z = 0\}$ . Сильно устойчивое слоение состоит из поверхностей  $\{x = \text{const}, z = 0\}$ , а листы сильно неустойчивого слоения имеют вид  $\{x = \text{const}, y = 0\}$ .

В частном случае, когда все мультипликаторы лежат вне единичной окружности, можно принять, что  $z = 0$  тождественно, а система (5.1.12) принимает вид

$$\begin{aligned}\bar{y} &= (A + F(x, y))y, \\ \bar{x} &= Bx + G(x),\end{aligned}\tag{5.1.13}$$

где функция  $F \in \mathbb{C}^{r-1}$  обращается в нуль в начале координат, а функция  $G \in \mathbb{C}^r$  вместе со своей первой производной обращается в нуль при  $x = 0$ .

## 5.2. Краевая задача

В данном разделе мы начинаем доказательство теорем о центральном многообразии. Используемый при доказательстве метод основан на обоб-

щении краевой задачи, рассмотренной в главе 2 (см. работы Шашкова и Тураева [52]). Поскольку полученные результаты применяются при доказательстве теорем об инвариантном многообразии, не рассматриваемых в теории центрального многообразия, мы приведем формулировки в достаточно общем виде.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}\dot{z} &= Az + f(z, v, \mu, t), \\ \dot{v} &= Bv + g(z, v, \mu, t),\end{aligned}\tag{5.2.1}$$

где  $z \in \mathbb{R}^n$ ,  $v \in \mathbb{R}^m$ ,  $t$  представляет время, а  $\mu$  — вектор параметров. Допустим, что функции  $f$  и  $g$  являются  $\mathbb{C}^r$ -гладкими ( $r \geq 1$ ) относительно переменных  $(z, v)$  и непрерывно зависят от  $(\mu, t)$  вместе со всеми их производными (особый интерес представляет случай, когда функции  $f$  и  $g$  являются  $\mathbb{C}^r$ -гладкими относительно всех своих аргументов  $(z, v, \mu, t)$ ). Положим, что для матриц  $A$  и  $B$  выполняются следующие условия:

$$\begin{aligned}\text{spectr } A &= \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}, \quad \text{spectr } B = \{\beta_1, \dots, \beta_m\}, \\ \max_{i=1, \dots, n} \text{Re } \alpha_i &< \alpha < \beta < \min_{j=1, \dots, m} \text{Re } \beta_j;\end{aligned}\tag{5.2.2}$$

то есть в комплексной плоскости существует полоска (полоска  $\alpha \leq \text{Re } (\cdot) \leq \beta$ ), разделяющая спектры матриц  $A$  и  $B$ . Из условий (5.2.2) следует, что в соответствующем (жордановом) базисе выполняются условия

$$\begin{aligned}\|e^{As}\| &\leq e^{\alpha s}, \\ \|e^{-Bs}\| &\leq e^{-\beta s},\end{aligned}\tag{5.2.3}$$

где  $s \geq 0$  (см. лемму 2.1). Необходимо также, чтобы для некоторой достаточно малой постоянной  $\xi$  (точную величину этой постоянной можно получить из доказательств теорем, приведенных ниже) выполнялось условие

$$\left\| \frac{\partial(f, g)}{\partial(z, v)} \right\| < \xi\tag{5.2.4}$$

Положим также, что все производные функций  $f$  и  $g$  являются равномерно ограниченными при всех значениях  $z$  и  $v$ . Из последних условий следует, что нелинейная часть мало влияет на поведение, определяемое линейной

частью системы (разделением спектра). Чтобы подчеркнуть это свойство, будем называть системы, удовлетворяющие формулам (5.2.1)–(5.2.4) *глобально дихотомическими*.

Такие системы возникают при изучении положений равновесия и периодических траекторий. Например, если спектр характеристических показателей положения равновесия разделен таким образом, что в комплексной плоскости  $n$  характеристических показателей лежит слева от прямой  $\operatorname{Re}(\cdot) = \alpha$ , а остальные  $m$  показателей — справа от прямой  $\operatorname{Re}(\cdot) = \beta$ , то вблизи такого положения равновесия система локально записывается в виде

$$\begin{aligned} \dot{z} &= Az + f(z, v, \mu), \\ \dot{v} &= Bv + g(z, v, \mu), \end{aligned} \quad (5.2.5)$$

где переменная  $z$  принадлежит малой окрестности начала координат в пространстве  $\mathbb{R}^n$ , переменная  $v$  принадлежит малой окрестности начала координат в пространстве  $\mathbb{R}^m$ , а  $\mu$  — некоторый вектор параметров. Здесь матрицы  $A$  и  $B$  удовлетворяют условиям (5.2.2), а функции  $f$  и  $g$  — следующим:

$$f(0, 0, 0) = 0, \quad g(0, 0, 0) = 0, \quad \left. \frac{\partial(f, g)}{\partial(z, v)} \right|_{(z, v, \mu)=0} = 0. \quad (5.2.6)$$

Конечно, последнее неравенство, входящее в формулу (5.2.6), подразумевает выполнение неравенства (5.2.4) при произвольно малом значении  $\xi$  в достаточно малой окрестности точки  $O$ .

Различие между системами (5.2.1) и (5.2.5) заключается в том, что нелинейная часть является малой лишь вблизи начала координат, тогда как линейная часть системы (5.2.1) преобладает во всем пространстве  $\mathbb{R}^{n+m}$ . Следующий весьма полезный прием позволяет перейти от локальной системы (5.2.5) к ее глобальному варианту (5.2.1). Рассмотрим систему

$$\begin{aligned} \dot{z} &= Az + \tilde{f}(z, v, \mu) \\ \dot{v} &= Bv + \tilde{g}(z, v, \mu), \end{aligned} \quad (5.2.7)$$

где  $\mathbb{C}^r$ -гладкие функции  $\tilde{f}, \tilde{g}$  задаются выражениями

$$\begin{aligned} \tilde{f}(z, v) &= f \left( z \chi \left( \frac{\|(z, v)\|}{\rho} \right), v \chi \left( \frac{\|(z, v)\|}{\rho} \right) \right) \\ \tilde{g}(z, v) &= g \left( z \chi \left( \frac{\|(z, v)\|}{\rho} \right), v \chi \left( \frac{\|(z, v)\|}{\rho} \right) \right). \end{aligned} \quad (5.2.8)$$

Здесь  $\rho$  является малой положительной величиной, а функция  $\chi(u) \in \mathbb{C}^\infty$  по предположению должна иметь следующие свойства:

$$\chi(u) = \begin{cases} 1, & \text{при } u \leq \frac{1}{2} \\ 0, & \text{при } u \geq 1 \end{cases}, \quad \text{и } 0 \geq \frac{d\chi}{du} \geq -3, \quad 1 \geq \chi \geq 0 \quad (5.2.9)$$

(существование таких функций хорошо известно).

Из формул (5.2.6), (5.2.8) и (5.2.9) следует, что функции  $\tilde{f}$  и  $\tilde{g}$  удовлетворяют неравенству (5.2.4) при всех значениях  $(z, v) \in \mathbb{R}^{n+m}$  и малой  $\mu$ . Кроме того при достаточно малом  $\rho$  постоянная  $\xi$  может быть произвольно мала. Таким образом, система (5.2.7) является глобально дихотомической и совпадает с системой (5.2.5) при  $\|(z, v)\| \leq \rho/2$ . Следовательно, пока траектории системы (5.2.7) остаются в  $\rho/2$  окрестности начала координат, они совпадают с траекториями системы (5.2.5).

Вблизи периодической траектории  $L$  система дифференциальных уравнений имеет вид (см. главу 3)

$$\begin{aligned} \dot{z} &= Az + f(z, v, \mu, t) \\ \dot{v} &= Bv + g(z, v, \mu, t), \end{aligned} \quad (5.2.10)$$

В данной системе  $f$  и  $g$  — периодические функции времени  $t$ , период которых равен  $\tau$  или  $2\tau$ , где  $\tau$  является периодом траектории  $L$ . Собственные значения матриц  $A$  и  $B$  равны отношениям логарифмов квадратов мультипликаторов траектории  $L$  к удвоенному периоду траектории  $L$ . Следовательно, условие (5.2.2), при помощи которого разделяются спектры этих матриц, также разделяет мультипликаторы:  $m$  мультипликаторов должны быть меньше  $e^{\alpha\tau}$  по абсолютной величине, а абсолютные величины остальных  $n$  мультипликаторов — больше  $e^{\beta\tau}$ , где  $\tau$  — период траектории  $L$ .

В данном случае траектория  $L$  определяется как  $\{z = 0, v = 0\}$ , а функции  $f$  и  $g$  вместе с их первыми производными по  $(z, v)$  обращаются в нуль

при  $(z, v) = 0$ . Условие (5.2.4) выполняется для малых значений  $(z, v)$ , на основании чего в результате замены функций  $(f, g)$  на  $(\tilde{f}, \tilde{g})$ , выполняемой по формулам (5.2.8), получаем систему типа (5.2.1), которая удовлетворяет условию (5.2.4) при всех значениях  $(z, v)$  и локально совпадает с системой (5.2.9).

Вернемся к общей формулировке и рассмотрим для системы (5.2.1) следующую краевую задачу:

$$z(0) = z^0, \quad v(\tau) = v^1, \quad (5.2.11)$$

при любых значениях  $\tau > 0$ ,  $z_0$  и  $v_1$ . Геометрически эту задачу можно интерпретировать как нахождение траектории системы (5.2.1), которая начинается на поверхности  $\{z = z_0\}$ , а заканчивается на поверхности  $\{v = v_1\}$  в момент  $t = \tau$ . Как отмечено выше, если решение краевой задачи остается в области  $\|(z, v)\| \leq \rho/2$  при  $t \in [0, \tau]$ , то оно одновременно является решением той же краевой задачи для локальной системы (5.2.5) или (5.2.10).

**Теорема 5.11.** *Краевая задача (5.2.11) для системы (5.2.1) имеет единственное решение<sup>4</sup>*

$$z(t) = z^*(t; z^0, v^1, \tau, \mu), \quad v(t) = v^*(t; z^0, v^1, \tau, \mu) \quad (5.2.12)$$

при любых значениях  $(z^0, v^1, \tau)$ .

**Доказательство.** Рассматриваемая краевая задача аналогична изученной в главе 2 (формально, раздел 2.8 посвящен случаю, когда  $\alpha < 0 < \beta$ ), а ее доказательство почти дословно повторяет доказательство теоремы 2.9. Отличие данного случая заключается в том, что при доказательстве сходимости последовательных приближений используется не обычная, а так называемая  $\gamma$ -норма. Рассмотрим пространство  $H$  непрерывных функций  $(z(t), v(t))$ , определенных на отрезке  $t \in [0, \tau]$ . Положим, что пространство  $H$  имеет следующую норму:

$$\|(z(t), v(t))\|_\gamma = \sup_{t \in [0, \tau]} \{ \|(z(t), v(t))\| e^{-\gamma t} \}, \quad (5.2.13)$$

<sup>4</sup>Заметим, что решение краевой задачи (5.2.11) для системы (5.2.1) существует даже за пределами малой окрестности нуля. Следовательно, теорему нельзя непосредственно применить к локальным системам (5.2.5) или (5.2.10); то есть, чтобы гарантировать то, что решение краевой задачи остается ограниченным малой постоянной, необходимы дополнительные оценки.

где

$$\alpha < \gamma < \beta. \quad (5.2.14)$$

Очевидно, что  $H$  является полным метрическим пространством.

Рассмотрим интегральный оператор  $T: H \rightarrow H$ , который отображает функцию  $(z(t), v(t))$  на функцию  $(\bar{z}(t), \bar{v}(t))$  в соответствии со следующей формулой:

$$\begin{aligned} \bar{z}(t) &= e^{At} z^0 + \int_0^t e^{A(t-s)} f(z(s), v(s), \mu, s) ds, \\ \bar{v}(t) &= e^{-B(\tau-t)} v^1 - \int_t^\tau e^{-B(s-t)} g(z(s), v(s), \mu, s) ds. \end{aligned} \quad (5.2.15)$$

Несложно проверить, что если решение краевой задачи (5.2.11) существует, то оно представляет собой неподвижную точку интегрального оператора  $T$ , и наоборот (сравните с теоремой 2.9).

Очевидно, что оператор  $T$  является гладким (согласно разделу 3.15). Производная функции  $(\bar{z}(t), \bar{v}(t))$  по  $(z(t), v(t))$  есть линейный оператор  $T': (\Delta z(t), \Delta v(t)) \mapsto (\Delta \bar{z}(t), \Delta \bar{v}(t))$ , где

$$\begin{aligned} \Delta \bar{z}(t) &= \int_0^t e^{A(t-s)} f'_{(z,v)}(z(s), v(s)) \cdot (\Delta z(s), \Delta v(s)) ds \\ \Delta \bar{v}(t) &= - \int_t^\tau e^{-B(s-t)} g'_{(z,v)}(z(s), v(s)) \cdot (\Delta z(s), \Delta v(s)) ds. \end{aligned} \quad (5.2.16)$$

В соответствии с принципом Банаха (абстрактный вариант теоремы 3.26), для доказательства того, что оператор  $T$  имеет единственную неподвижную точку, достаточно показать, что  $\|T'\| \leq K < 1$  при любых значениях  $(z(s), v(s)) \in H$ .

Для этого необходимо подставить формулы (5.2.3), (5.2.4), (5.2.13) в

систему (5.2.16). Получаем неравенства

$$\begin{aligned} \|\Delta \bar{z}(t)\| &\leq \int_0^t e^{\alpha(t-s)} \xi \|(\Delta z, \Delta v)\|_{\gamma} e^{\gamma s} ds \\ \|\Delta \bar{v}(t)\| &\leq \int_t^{\tau} e^{-\beta(s-t)} \xi \|(\Delta z, \Delta v)\|_{\gamma} e^{\gamma s} ds. \end{aligned} \quad (5.2.17)$$

Из формул (5.2.13), (5.2.14) и (5.2.17) находим, что

$$\begin{aligned} \|(\Delta \bar{z}, \Delta \bar{v})\|_{\gamma} &= \sup_{t \in [0, \tau]} \{ \max(\|\Delta \bar{z}(t)\|, \|\Delta \bar{v}(t)\|) e^{-\gamma t} \} \\ &\leq \xi \max\left(\frac{1}{\gamma - \alpha}, \frac{1}{\beta - \gamma}\right) \times \|(\Delta z, \Delta v)\|_{\gamma}. \end{aligned} \quad (5.2.18)$$

Пусть величина  $\xi$  настолько мала, что

$$\xi \max\left(\frac{1}{\gamma - \alpha}, \frac{1}{\beta - \gamma}\right) < 1.$$

В соответствие с формулой (5.2.18) интегральный оператор  $T$  является в  $\gamma$ -норме сжимающим.

Таким образом, согласно принципу Банаха сжимающих отображений, начиная с произвольного значения  $(z^{(0)}(t), v^{(0)}(t))$ , последовательность приближений

$$(z^{(n+1)}(t), v^{(n+1)}(t)) = T(z^n(t), v^n(t))$$

сходится в единственную неподвижную точку  $(z^*(t), v^*(t))$  оператора  $T$ , которая в то же время представляет собой решение краевой задачи (5.2.11) для системы (5.2.1), что и требовалось доказать.

Заметим, что решение  $(z^*(t), v^*(t))$  также зависит от  $\{z^0, v^1, \tau, \mu\}$ . Поскольку интегральный оператор  $T$ , определяемый формулой (5.2.15), является непрерывным относительно этих параметров, решение непрерывно зависит от  $\{z^0, v^1, \tau, \mu\}$  (как неподвижная точка сжимающего оператора, см. теорему 3.25). Более того, на основании теоремы 3.27 решение краевой задачи является  $\mathbb{C}^r$ -функцией от  $\{z^0, v^1\}$ , поскольку оператор  $T$  является

$\mathbb{C}^r$ -гладким и  $\mathbb{C}^r$ -гладко зависит от  $\{z^0, v^1\}$ ; если правые части системы являются  $\mathbb{C}^r$ -гладкими относительно всех переменных, включая  $t$  и  $\mu$ , то решение также гладко зависит от  $\{t, \tau, \mu\}$ .

Производные функций  $(z^*, v^*)$  по  $z^0, v^1$  и  $\mu$  находятся как неподвижные точки оператора, полученного путем формального дифференцирования системы (5.2.15); то есть они определяются как решения краевых задач для соответствующих уравнений в вариациях, граничные условия которых получают при помощи формального дифференцирования граничных условий (5.2.11) (более подробно этот вопрос рассматривается в разделе 2.8). Например, при решении краевой задачи

$$Z(0) = I, \quad V(\tau) = 0, \quad (5.2.19)$$

( $I$  — единичная матрица) для системы уравнений в вариациях

$$\begin{aligned} \dot{Z} &= AZ + f'_z(z^*, v^*, \mu, t)Z + f'_v(z^*, v^*, \mu, t)V, \\ \dot{V} &= BV + g'_z(z^*, v^*, \mu, t)Z + g'_v(z^*, v^*, \mu, t)V, \end{aligned} \quad (5.2.20)$$

получаем производную функции  $(z^*, v^*)$  по  $z^0$ :

$$Z^* = \frac{\partial z^*}{\partial z^0}, \quad V^* = \frac{\partial v^*}{\partial z^0}.$$

Решая другую краевую задачу

$$Z(0) = 0, \quad V(\tau) = I \quad (5.2.21)$$

для системы (5.2.20), получаем производную функции  $(z^*, v^*)$  по  $v^1$ . Если функции  $f$  и  $g$  являются гладкими относительно параметра  $\mu$ , то производные  $(Z^*, V^*) = (\partial z^*/\partial \mu, \partial v^*/\partial \mu)$  представляют собой решения краевой задачи

$$Z(0) = 0, \quad V(\tau) = 0 \quad (5.2.22)$$

для системы неоднородных уравнений в вариациях

$$\begin{aligned} \dot{Z} &= AZ + f'_z(z^*, v^*, \mu, t)Z + f'_v(z^*, v^*, \mu, t)V + f'_\mu(z^*, v^*, \mu, t), \\ \dot{V} &= BV + g'_z(z^*, v^*, \mu, t)Z + g'_v(z^*, v^*, \mu, t)V + g'_\mu(z^*, v^*, \mu, t). \end{aligned} \quad (5.2.23)$$

Очевидно, что система (5.2.20) или (5.2.23) является глобально дихотомической, поскольку основная составляющая правых частей системы определяется теми же матрицами  $A$  и  $B$ , следовательно, условие (5.2.2) разделения спектров продолжает выполняться; оставшаяся часть правой части

$$\begin{aligned} F &= f'_z(z^*, v^*, \mu, t)Z + f'_v(z^*, v^*, \mu, t)V \\ G &= g'_z(z^*, v^*, \mu, t)Z + g'_v(z^*, v^*, \mu, t)V, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} F &= f'_z(z^*, v^*, \mu, t)Z + f'_v(z^*, v^*, \mu, t)V + f'_\mu(z^*, v^*, \mu, t) \\ G &= g'_z(z^*, v^*, \mu, t)Z + g'_v(z^*, v^*, \mu, t)V + g'_\mu(z^*, v^*, \mu, t). \end{aligned}$$

В обоих случаях

$$\frac{\partial(F, G)}{\partial(Z, V)} = \frac{\partial(f, g)}{\partial(z, v)},$$

следовательно, условие (5.2.4), определяющее малость производных, выполняется при том же значении  $\xi$ . Таким образом, существование (и единственность) решений краевых задач (5.2.19), (5.2.21) и (5.2.22) следует непосредственно из теоремы 5.11.

Теперь по индукции можно проверить, что уравнения в вариациях высшего порядка также принадлежат к указанному классу глобально дихотомических систем. Следовательно, существование и единственность решений (которые представляют собой производные функции  $(z^*, v^*)$  высшего порядка) соответствующих краевых задач также определяются теоремой 5.11.

Производные функции  $(z^*, v^*)$  по времени  $t$  определяются непосредственно при помощи системы (5.2.1). Поскольку функция  $(z^*, v^*)$  является решением системы (5.2.1), выполняются тождества

$$\frac{\partial z^*}{\partial t} \equiv \dot{z}^* = Az^* + f(z^*, v^*, \mu, t)$$

и

$$\frac{\partial v^*}{\partial t} \equiv \dot{v}^* = Bz^* + g(z^*, v^*, \mu, t).$$

Производные высшего порядка, включающие время, получают путем многократного применения указанных тождеств. Производные по  $\tau$  можно вычислить при помощи следующей леммы.

**Лемма 5.1..** *Решение  $(z^*, v^*)$  краевой задачи (5.2.11) удовлетворяет неравенствам*

$$\frac{\partial(z^*, v^*)}{\partial v^1} \frac{\partial v^*}{\partial t} \Big|_{t=\tau} + \frac{\partial(z^*, v^*)}{\partial \tau} \equiv 0, \quad (5.2.24)$$

$$\frac{\partial(z^*, v^*)}{\partial \tau} + \frac{\partial(z^*, v^*)}{\partial t} - \frac{\partial(z^*, v^*)}{\partial z^0} \frac{\partial z^*}{\partial t} \Big|_{t=0} \equiv 0. \quad (5.2.25)$$

Эти неравенства позволяют выразить производные по  $\tau$  через производные по другим переменным. Данная лемма доказывается следующим образом. Напомним, что единственное решение рассматриваемой краевой задачи представляет собой траекторию системы (5.2.1), пересекающую поверхность  $\{z = z^0\}$  при  $t = 0$ , а поверхность  $\{v = v^1\}$  при  $t = \tau$ . Обозначим эту траекторию через  $(z^*(t; z^0, v^1, \tau, \mu), v^*(t; z^0, v^1, \tau, \mu))$ .

В момент  $t = \tau + \delta$  траектория пересекает поверхность  $\{v = v^*(\tau + \delta; z^0, v^1, \tau, \mu)\}$ . По определению, можно записать

$$\begin{aligned} z^*(t; z^0, v^1, \tau, \mu) &\equiv z^*(t; z^0, v^*(\tau + \delta; z^0, v^1, \tau, \mu), \tau + \delta, \mu), \\ v^*(t; z^0, v^1, \tau, \mu) &\equiv v^*(t; z^0, v^*(\tau + \delta; z^0, v^1, \tau, \mu), \tau + \delta, \mu). \end{aligned}$$

Дифференцируя это тождество по  $\delta$  при  $\delta = 0$ , получаем формулу (5.2.24). Из аналогичного тождества

$$\begin{aligned} z^*(t; z^0, v^1, \tau, \mu) &\equiv z^*(t + \delta; z^*(-\delta; z^0, v^1, \tau, \mu), v^1, \tau + \delta, \mu), \\ v^*(t; z^0, v^1, \tau, \mu) &\equiv v^*(t + \delta; z^*(-\delta; z^0, v^1, \tau, \mu), v^1, \tau + \delta, \mu). \end{aligned}$$

следует формула (5.2.25).

С помощью следующей теоремы можно дать оценки производным решения краевой задачи. Производные вектор-функции  $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_q) \in \mathbb{R}^q$  по вектор-аргументу  $x = (x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p$  обозначим следующим образом:

$$\frac{\partial^{|s|} \phi}{\partial x^s} \equiv \left( \frac{\partial^{s_1 + \dots + s_p} \phi_1}{\partial x_1^{s_1} \dots \partial x_p^{s_p}}, \dots, \frac{\partial^{s_1 + \dots + s_p} \phi_q}{\partial x_1^{s_1} \dots \partial x_p^{s_p}} \right)$$

где мультииндекс  $s = (s_1, \dots, s_p)$  состоит из неотрицательных целых чисел, а через  $|s|$  обозначается последовательность  $s_1 + \dots + s_p$ .

**Теорема 5.12.** *Решение  $(z^*, v^*)$  краевой задачи (5.2.11) для системы (5.2.1) (здесь  $C$  — положительная постоянная, не зависящая от  $(z^0, v^1, \mu, \tau)$ , но зависящая от порядка дифференцирования  $k = |k_1| + |k_2| + |k_3|$ ) имеет следующие оценки:*

1. Если  $0 < \alpha < \beta$ , то

$$(a) \left\| \frac{\partial^{|k_1|+|k_2|+|k_3|}(z^*, v^*)}{\partial (z^0, \mu)^{k_1} \partial (v^1, \tau)^{k_2} \partial t^{k_3}} \right\| \leq \begin{cases} C & \text{если } |k_1| = |k_2| = 0 \\ C e^{|k_1|\alpha t} & \text{если } |k_2| = 0 \\ \text{и } |k_1|\alpha < \beta, & \\ C e^{\beta(t-\tau) + |k_1|\alpha\tau} & \text{если } |k_2| \neq 0 \\ \text{или } |k_1|\alpha > \beta. & \end{cases} \quad (5.2.26)$$

2. Если  $\alpha < 0 < \beta$ , то

$$(a) \left\| \frac{\partial^{|k_1|+|k_2|+|k_3|}(z^*, v^*)}{\partial (z^0)^{k_1} \partial (v^1, \tau)^{k_2} \partial (t, \mu)^{k_3}} \right\| \leq \begin{cases} C & \text{если } |k_1| = |k_2| = 0 \\ C e^{\alpha t} & \text{если } |k_2| = 0 \\ \text{и } |k_1| \neq 0, & \\ C e^{\beta(t-\tau)} & \text{если } |k_1| = 0 \\ \text{и } |k_2| \neq 0, & \\ C e^{\alpha t + \beta(t-\tau)} & \text{если } |k_1| \neq 0 \\ \text{и } |k_2| \neq 0. & \end{cases} \quad (5.2.27)$$

3. Если  $\alpha < \beta < 0$ , то

$$(a) \left\| \frac{\partial^{|k_1|+|k_2|+|k_3|}(z^*, v^*)}{\partial (z^0)^{k_1} \partial (v^1, \tau, \mu)^{k_2} \partial t^{k_3}} \right\| \leq \begin{cases} C & \text{если } |k_1| = |k_2| = 0 \\ C e^{|k_2|\beta(t-\tau)} & \text{если } |k_1| = 0 \\ \text{и } \alpha < |k_2|\beta, & \\ C e^{\alpha t - |k_2|\beta\tau} & \text{если } |k_1| \neq 0 \\ \text{или } \alpha > |k_2|\beta. & \end{cases} \quad (5.2.28)$$

**Доказательство.** Заметим, что краевая задача (5.2.11) является симметричной относительно обращения времени, т. е. относительно преобразования:

$$t \rightarrow \tau - t, \quad \alpha \rightarrow -\beta, \quad \beta \rightarrow -\alpha, \quad z \rightarrow v, \quad v \rightarrow z, \quad z^0 \rightarrow v^1, \quad v^1 \rightarrow z^0. \quad (5.2.29)$$

Следовательно, в силу приведенного выше правила и замены переменных  $k_1 \leftrightarrow k_2$ , оценки 1(b), 2(b) и 3(b) следуют из оценок 3(a), 2(a) и 1(a), соответственно.

Заметим также, что в случаях  $\beta > \alpha > 0$  и  $\alpha < \beta < 0$  параметр  $\mu$  можно включить в число переменных  $z$  или  $v$ , соответственно, добавляя уравнения  $\dot{\mu} = 0$  к системе (5.2.1) и условия  $\mu(0) = \mu$  (в случае, когда  $\beta > \alpha > 0$ ) или  $\mu(\tau) = \mu$  (в случае, когда  $0 > \beta > \alpha$ ) к граничным условиям (5.2.11). Следовательно, производные, включающие  $\mu$  необходимо рассматривать отдельно только в случае, когда  $\alpha < 0 < \beta$ .

Чтобы получить оценки для производных по времени  $t$  заметим, что непосредственно из системы (5.2.1) следует, что

$$\frac{\partial^{|k_1|+|k_2|+|k_3|+|k_4|+|k_5|} z^*}{\partial (z^0)^{k_1} \partial (v^1)^{k_2} \partial \mu^{k_3} \partial \tau^{k_4} \partial t^{k_5+1}} = \frac{\partial^{|k_1|+|k_2|+|k_3|+|k_4|+|k_5|} (Az^* + f(z^*, v^*, \mu, t))}{\partial (z^0)^{k_1} \partial (v^1)^{k_2} \partial \mu^{k_3} \partial \tau^{k_4} \partial t^{k_5}},$$

$$\frac{\partial^{|k_1|+|k_2|+|k_3|+|k_4|+|k_5|} v^*}{\partial (z^0)^{k_1} \partial (v^1)^{k_2} \partial \mu^{k_3} \partial \tau^{k_4} \partial t^{k_5+1}} = \frac{\partial^{|k_1|+|k_2|+|k_3|+|k_4|+|k_5|} (Bv^* + g(z^*, v^*, \mu, t))}{\partial (z^0)^{k_1} \partial (v^1)^{k_2} \partial \mu^{k_3} \partial \tau^{k_4} \partial t^{k_5}}. \quad (5.2.30)$$

На основании данных формул можно заключить, что если оценки, приведенные в теореме, выполняются для производных по  $(z^0, v^1, \mu, \tau)$ , то дополнительное дифференцирование по  $t$  не вызывает в них никаких изменений (кроме, возможно, изменения величины постоянной  $C$ ).

Производные по  $\tau$  выражаются через порядок производных согласно зависимости (5.2.24). Очевидно, что дифференцирование по  $\tau$  при фиксированном значении  $t$  должно дать те же оценки, что и дифференцирование по  $v^1$ .

Таким образом, в случае, когда  $\alpha < \beta < 0$  или  $0 < \alpha < \beta$  достаточно доказать справедливость оценок (5.2.26) или (5.2.28) для производных  $\frac{\partial^{|k_1|+|k_2|}(z^*, v^*)}{\partial (z^0)^{k_1} \partial (v^1)^{k_2}}$ ; в случае, когда  $\alpha < 0 < \beta <$ , достаточно доказать спра-

ведливость оценок (5.2.27) для производных  $\frac{\partial^{|k_1|+|k_2|+|k_3|}(z^*, v^*)}{\partial (z^0)^{k_1} \partial (v^1)^{k_2} \partial \mu^{k_3}}$ . Действи-

тельно, в случае  $\alpha < \beta < 0$  вычисления производных не требуется, поскольку при помощи обращения времени согласно правилу (5.2.29) данный случай можно привести к случаю, когда  $0 < \alpha < \beta$ . Для двух других случаев —  $0 < \alpha < \beta$  и  $\alpha < 0 < \beta$  — вычисления аналогичны, поэтому доказательство приводится только для наиболее сложного случая, когда  $0 < \alpha < \beta$  (оценки

для первых производных в случае, когда  $\alpha < 0 < \beta$  представлены в работе Шильникова [67]). Остается лишь доказать, что

$$\frac{\partial^{|k_1|+|k_2|}(z^*, v^*)}{\partial (z^0)^{k_1} \partial (v^1)^{k_2}} \leq \begin{cases} C(k) e^{|k_1|\alpha t} & \text{если } |k_2| = 0 \\ & \text{и } |k_1|\alpha < \beta, \\ C(k) e^{\beta(t-\tau)+|k_1|\alpha\tau} & \text{если } |k_2| \neq 0 \\ & \text{или } |k_1|\alpha > \beta, \end{cases} \quad (5.2.31)$$

где  $0 < \alpha < \beta$ , а  $1 \leq k \equiv |k_1| + |k_2| \leq r$ . Используем индукцию по  $k$ , начиная с  $k = 1$ . Для первых производных оценки (5.2.31) принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial(z^*, v^*)}{\partial z^0} &\leq C e^{\alpha t} \\ \frac{\partial(z^*, v^*)}{\partial v^1} &\leq C e^{-\beta(\tau-t)}. \end{aligned} \quad (5.2.32)$$

Поскольку первая оценка является симметричной второй относительно обращения времени (5.2.29), достаточно доказать лишь справедливость первого неравенства, входящего в формулу (5.2.32).

Как указано выше, производную  $(Z^*, V^*) \equiv \frac{\partial(z^*, v^*)}{\partial z^0}$  можно найти как единственное решение краевой задачи  $Z(0) = I$ ,  $V(\tau) = 0$ , связанной с системой уравнений в вариациях (5.2.20). Существование такого решения обеспечивается теоремой 5.11 (см. замечания после теоремы). Кроме того, это решение является неподвижной точкой интегрального оператора

$$\begin{cases} \bar{Z}(t) = e^{At} + \int_0^t e^{A(t-s)} [f'_z(z^*(s), v^*(s), \mu, s)Z(s) + f'_v(z^*(s), v^*(s), \mu, s)V(s)] ds, \\ \bar{V}(t) = - \int_t^\tau e^{-B(s-t)} [g'_z(z^*(s), v^*(s), \mu, s)Z(s) + g'_v(z^*(s), v^*(s), \mu, s)V(s)] ds \end{cases} \quad (5.2.33)$$

который получают путем формального дифференцирования интегрального оператора (5.2.15) и который является, по сути, интегральным оператором

типа (5.2.15) для системы уравнений в вариациях (5.2.20). Неподвижная точка есть предел итераций  $(Z^{n+1}(t), V^{n+1}(t)) = (Z^n(t), V^n(t))$ , рассчитываемых по формуле (5.2.33), начиная с произвольной начальной точки  $(Z^{(0)}(t), V^{(0)}(t))$ . Следовательно, чтобы получить оценку, определяемую первым неравенством формулы (5.2.32), достаточно доказать, что если данная оценка выполняется для  $(Z, V)$ , то значения  $(\bar{Z}, \bar{V})$  в системе (5.2.33) удовлетворяют тому же условию при той же постоянной  $C$  (в данном случае очевидно, что все итерации, а также их пределы, удовлетворяют той же оценке).

Возьмем такую величину  $\tilde{\alpha} < \alpha$ , чтобы спектр матрицы  $A$  оставался слева от прямой  $\text{Re}(\cdot) = \tilde{\alpha}$  (см. формулу (5.2.2)). Неравенства (5.2.3) можно изменить таким образом, чтобы

$$\|e^{As}\| \leq e^{\tilde{\alpha}s}, \quad \text{при } s \geq 0.$$

Поскольку  $\|(f, g)'_{z,v}\|$  ограничивается некоторой малой  $\xi$  (см. неравенство (5.2.4)), из системы (5.2.33) следует, что

$$\begin{aligned} \|\bar{Z}(t)\| &\leq e^{\alpha t} + \xi \int_0^t e^{\tilde{\alpha}(t-s)} \|(Z(s), V(s))\| ds, \\ \|\bar{V}(t)\| &\leq \xi \int_t^\tau e^{-\beta(s-t)} \|(Z(s), V(s))\| ds. \end{aligned}$$

Теперь искомый результат очевиден: интегрирование приведенных выше неравенств показывает, что если

$$\|(Z(t), V(t))\| \leq C e^{\alpha t}, \quad (5.2.34)$$

то

$$\|\bar{Z}(t)\| \leq \left(1 + C \frac{\xi}{\alpha - \tilde{\alpha}}\right) e^{\alpha t}, \quad \|\bar{V}(t)\| \leq C \frac{\xi}{\beta - \alpha} e^{\alpha t}.$$

Таким образом, если величина  $\xi$  достаточно мала, а  $C$  достаточно велика, то  $\|(\bar{Z}(t), \bar{V}(t))\|$  удовлетворяет неравенству (5.2.34) при том же значении постоянной  $C$ .

Теорема была доказана для случая, когда  $k = 1$ . Можно приступить к нахождению оценок для производных высшего порядка. Положим, что теорема выполняется для всех производных, порядок которых меньше или

равен некоторой величине  $q \geq 1$ . Докажем справедливость оценок (5.2.31) для производных порядка  $k = |k_1| + |k_2| = q + 1$ .

Введем обозначение

$$(Z_{k_1, k_2}, V_{k_1, k_2}) = \frac{\partial^k(z, v)}{\partial (z^0)^{k_1} \partial (v^1)^{k_2}}.$$

Для  $k \geq 2$  производные  $(Z_{k_1, k_2}^*, V_{k_1, k_2}^*)$  решения  $(z^*, v^*)$  краевой задачи (5.2.11) удовлетворяют уравнению

$$\begin{cases} Z_{k_1, k_2}^*(t) = \int_0^t e^{A(t-s)} \frac{\partial^k f(z^*, v^*, \mu, s)}{\partial (z^0)^{k_1} \partial (v^1)^{k_2}} ds, \\ V_{k_1, k_2}^*(t) = - \int_t^\tau e^{-B(s-t)} \frac{\partial^k g(z^*, v^*, \mu, s)}{\partial (z^0)^{k_1} \partial (v^1)^{k_2}} ds. \end{cases} \quad (5.2.35)$$

Напомним формулу

$$\frac{\partial^{|p|} \phi(\psi(x))}{\partial x^p} = \sum_{i=1}^{|p|} \frac{\partial^i \phi}{\partial \psi^i} \sum_{\substack{j_1 + \dots + j_i = p \\ |j_1| \geq 1, \dots, |j_i| \geq 1}} C_{j_1, \dots, j_i} \frac{\partial^{|j_1|} \psi}{\partial x_1^{j_1}} \dots \frac{\partial^{|j_i|} \psi}{\partial x_i^{j_i}}$$

для нахождения производных сложных функций. Здесь  $\phi$  и  $\psi$  — некоторые вектор-функции,  $p$  и  $j_1, \dots, j_i$  — мультииндексы, а через  $\frac{\partial^i \phi}{\partial \psi^i}$  обозначен вектор всех производных  $i$ -го порядка функции  $\phi$  по  $\psi$ ; несущественные постоянные множители  $C_{j_1, \dots, j_i}$  не зависят от вида функций  $\phi$  и  $\psi$ . С учетом этой формулы из системы (5.2.35) следует, что  $(Z_{k_1, k_2}^*, V_{k_1, k_2}^*)$  является

неподвижной точкой интегрального оператора

$$\begin{aligned} \bar{Z}_{k_1, k_2}(t) &= \int_0^t e^{A(t-s)} f'_{z, v}(z^*(s), v^*(s), \mu, s)(Z_{k_1, k_2}(s), V_{k_1, k_2}(s)) ds + \\ &+ \sum_{i=2}^k \int_0^t e^{A(t-s)} \frac{\partial^i f}{\partial (z, v)^i} \Big|_{(z^*(s), v^*(s))} \times \\ &\times \sum_j C_{j_1, \dots, j_i}(Z_{j_{11}, j_{12}}^*(s), V_{j_{11}, j_{12}}^*(s)) \dots (Z_{j_{i1}, j_{i2}}^*(s), V_{j_{i1}, j_{i2}}^*(s)) ds \\ \bar{V}_{k_1, k_2}(t) &= - \int_t^\tau e^{-B(s-t)} g'_{z, v}(z^*(s), v^*(s), \mu, s)(Z_{k_1, k_2}(s), V_{k_1, k_2}(s)) ds - \\ &- \sum_{i=2}^k \int_t^\tau e^{-B(s-t)} \frac{\partial^i g}{\partial (z, v)^i} \Big|_{(z^*(s), v^*(s))} \times \\ &\times \sum_j C_{j_1, \dots, j_i}(Z_{j_{11}, j_{12}}^*(s), V_{j_{11}, j_{12}}^*(s)) \dots (Z_{j_{i1}, j_{i2}}^*(s), V_{j_{i1}, j_{i2}}^*(s)) ds \end{aligned} \quad (5.2.36)$$

где внутренняя сумма берется по всем мультииндексам  $j$  таким, что  $j_{11} + \dots + j_{i1} = k_1$ ,  $j_{12} + \dots + j_{i2} = k_2$ , а  $|j_{p1}| + |j_{p2}| \geq 1$  при всех  $p = 1, \dots, i$ .

Чтобы получить оценки (5.2.31) для производных  $(Z_{k_1, k_2}^*, V_{k_1, k_2}^*)$  следуем процедуре, используемой для первых производных. Достаточно проверить, что если  $(Z_{k_1, k_2}(s), V_{k_1, k_2}(s))$  удовлетворяет данным оценкам, то  $(\bar{Z}_{k_1, k_2}(t), \bar{V}_{k_1, k_2}(t))$  также удовлетворяет им с той же постоянной  $C(q + 1)$ .

Заметим, что вторые интегралы, входящие в формулу (5.2.36), включают лишь производные, порядок которых меньше или равен  $q = k - 1$ : поскольку  $|j_1| + \dots + |j_i| = k$ , в случае, если  $|j_p| = k$  при некотором значении  $p = 1, \dots, i$ , все другие значения  $j$  должны быть равны нулю. Однако это не так (сумма берется по мультииндексам, отличным от нуля). Следовательно, в соответствии с индуктивным предположением, для производных  $(Z_{j_{p1}, j_{p2}}^*(s), V_{j_{p1}, j_{p2}}^*(s))$ , входящих в формулу (5.2.36), выполняются оценки (5.2.31). В частности, если  $|k_2| = 0$  (мы не дифференцируем по  $v^1$ ), а  $|k_1| \alpha < \beta$ , то  $j_{p2} \equiv 0$ , а  $|j_{p1}| \alpha < \beta$  при всех значениях  $p = 1, \dots, i$ . Таким



образом, в данном случае

$$\|(Z_{j_{p1}, j_{p2}}^*(s), V_{j_{p1}, j_{p2}}^*(s))\| \leq C(q)e^{|j_{p1}|\alpha s}, \quad (5.2.37)$$

и

$$\prod_{p=1}^i \|(Z_{j_{p1}, j_{p2}}^*(s), V_{j_{p1}, j_{p2}}^*(s))\| \leq C(q)^i e^{(|j_{i1}| + \dots + |j_{i1}|)\alpha s} = C(q)^i e^{|k_1|\alpha s}. \quad (5.2.38)$$

Если  $|k_2| \neq 0$ , то, по крайней мере, один из индексов  $j_{p2}$  отличен от нуля, а соответствующий член произведения оценивается как

$$\|(Z_{j_{p'1}, j_{p'2}}^*(s), V_{j_{p'1}, j_{p'2}}^*(s))\| \leq C(q)e^{-\beta(\tau-s) + |j_{p'1}|\alpha\tau}. \quad (5.2.39)$$

Все остальные члены имеют оценку

$$\|(Z_{j_{p1}, j_{p2}}^*(s), V_{j_{p1}, j_{p2}}^*(s))\| \leq C(q)e^{|j_{p1}|\alpha\tau} \quad (5.2.40)$$

(сравните с оценкой (5.2.31): было положено, что  $\alpha > 0$ , а  $t \leq \tau$ , вследствие чего  $e^{|j_{p1}|\alpha t} \leq e^{|j_{p1}|\alpha\tau}$ ; также допущено, что  $\beta > 0$ , вследствие чего  $e^{-\beta(\tau-t)} \leq 1$ ). Из данных оценок следует, что

$$\begin{aligned} \prod_{p=1}^i \|(Z_{j_{p1}, j_{p2}}^*(s), V_{j_{p1}, j_{p2}}^*(s))\| &\leq C(q)^i e^{-\beta(\tau-s)} e^{(|j_{i1}| + \dots + |j_{i1}|)\alpha\tau} \\ &= C(q)^i e^{-\beta(\tau-s) + |k_1|\alpha\tau}. \end{aligned} \quad (5.2.41)$$

Наконец, если  $|k_2| = 0$ , а  $|k_1|\alpha > \beta$ , то для некоторых мультииндексов  $j$  эти произведения оцениваются в соответствие с (5.2.38), а для остальных — согласно (5.2.41). Заметим, что если  $|k_1|\alpha > \beta$ , то  $e^{-\beta(\tau-s) + |k_1|\alpha\tau} > e^{|k_1|\alpha s}$  при  $s \leq \tau$ ; то есть в данном случае оценка (5.2.41) ограничивает сверху оценку (5.2.38). Следовательно, если  $|k_2| = 0$ , а  $|k_1|\alpha > \beta$ , то все произведения во вторых интегралах формулы (5.2.36) удовлетворяют оценке (5.2.41), как и в случае, когда  $|k_2| \neq 0$ . Напомним, что все производные функций  $f$  и  $g$  являются равномерно ограниченными. Таким образом, из

приведенных рассуждений следует, что

$$\begin{aligned} \|\bar{Z}_{k_1, k_2}(t)\| &\leq \int_0^t \xi e^{\alpha(t-s)} \|Z_{k_1, k_2}(s)\| ds + \\ &+ \begin{cases} C^*(q) \int_0^t e^{\alpha(t-s)} e^{|k_1|\alpha s} ds & \text{если } |k_2| = 0 \text{ и } |k_1|\alpha < \beta, \\ C^*(q) \int_0^t e^{\alpha(t-s)} e^{-\beta(\tau-s) + |k_1|\alpha\tau} ds & \text{если } |k_2| \neq 0 \text{ или } |k_1|\alpha > \beta, \end{cases} \\ \|\bar{V}_{k_1, k_2}(t)\| &\leq \int_t^\tau \xi e^{-\tilde{\beta}(s-t)} \|V_{k_1, k_2}(s)\| ds \\ &+ \begin{cases} C^*(q) \int_t^\tau e^{-\tilde{\beta}(s-t)} e^{|k_1|\alpha s} ds & \text{если } |k_2| = 0 \text{ и } |k_1|\alpha < \beta, \\ C^*(q) \int_t^\tau e^{-\tilde{\beta}(s-t)} e^{-\beta(\tau-s) + |k_1|\alpha\tau} ds & \text{если } |k_2| \neq 0 \text{ или } |k_1|\alpha > \beta, \end{cases} \end{aligned} \quad (5.2.42)$$

где  $C^*(q)$  — некоторая постоянная, а величина  $\tilde{\beta} > \beta$  выбирается близкой к  $\beta$  с тем, чтобы спектр матрицы  $B$  оставался строго справа от прямой  $\operatorname{Re}(\cdot) = \tilde{\beta}$ . Следовательно, для матричной экспоненты имеется следующая модификация оценки (5.2.3):

$$\|e^{-Bs}\| \leq e^{-\tilde{\beta}s} \quad \text{для } s \geq 0.$$

В соответствие с формулой (5.2.31), если  $|k_2| = 0$ , а  $|k_1|\alpha < \beta$ , то  $\|(Z_{k_1, k_2}(s), V_{k_1, k_2}(s))\| \leq C(q+1)e^{|k_1|\alpha s}$ . Подставляя последнее в формулу

(5.2.42), находим, что

$$\begin{aligned} \|\bar{Z}_{k_1, k_2}(t)\| &\leq e^{\alpha t} (\xi C(q+1) + C^*(q)) \int_0^t e^{(|k_1|-1)\alpha s} ds \\ &\leq \frac{\xi C(q+1) + C^*(q)}{(|k_1|-1)\alpha} e^{|k_1|\alpha t}, \\ \|\bar{V}_{k_1, k_2}(t)\| &\leq e^{\tilde{\beta} t} (\xi C(q+1) + C^*(q)) \int_t^\tau e^{-(\tilde{\beta}-|k_1|\alpha)s} ds \\ &\leq \frac{\xi C(q+1) + C^*(q)}{\tilde{\beta} - |k_1|\alpha} e^{|k_1|\alpha t}, \end{aligned} \quad (5.2.43)$$

то есть  $\|(\bar{Z}_{k_1, k_2}(t), \bar{V}_{k_1, k_2}(t))\|$  также удовлетворяет оценкам (5.2.31) при том же значении постоянной  $C(q+1)$ , при условии, что

$$(\xi C(q+1) + C^*(q)) \max\left(\frac{1}{(|k_1|-1)\alpha}, \frac{1}{\tilde{\beta} - |k_1|\alpha}\right) \leq C(q+1).$$

Таким образом, мы завершили доказательство теоремы для частного случая, когда  $|k_2| = 0$ ,  $|k_1|\alpha < \beta$ . Заметим также, что формулы (5.2.42) получены при использовании очевидного неравенства (в данном случае  $a \leq b$ )

$$\int_a^b e^{\delta s} ds \leq \frac{1}{|\delta|} \begin{cases} e^{\delta b}, & \text{если } \delta > 0, \\ e^{\delta a}, & \text{если } \delta < 0 \end{cases} \quad (5.2.44)$$

но в основном применялось условие  $\tilde{\beta} - |k_1|\alpha > 0$ .

Если  $|k_2| \neq 0$  или  $|k_1|\alpha > \beta$ , мы имеем

$$\|(Z_{k_1, k_2}(s), V_{k_1, k_2}(s))\| \leq C(q+1)e^{-\beta(\tau-s)} e^{|k_1|\alpha \tau}.$$

Подставляя его в формулу (5.2.42), находим, что

$$\begin{aligned} \|\bar{Z}_{k_1, k_2}(t)\| &\leq e^{\alpha t} (\xi C(q+1) + C^*(q)) e^{-\beta \tau} e^{|k_1|\alpha \tau} \int_0^t e^{(\beta-\alpha)s} ds \\ &\leq \frac{\xi C(q+1) + C^*(q)}{(\beta-\alpha)} e^{-\beta(\tau-t)} e^{|k_1|\alpha \tau}, \\ \|\bar{V}_{k_1, k_2}(t)\| &\leq e^{\tilde{\beta} t} (\xi C(q+1) + C^*(q)) e^{-\beta \tau} e^{|k_1|\alpha \tau} \int_t^\tau e^{-(\tilde{\beta}-\beta)s} ds \\ &\leq \frac{\xi C(q+1) + C^*(q)}{\tilde{\beta} - \beta} e^{-\beta(\tau-t)} e^{|k_1|\alpha \tau} \end{aligned} \quad (5.2.45)$$

(где было положено, что  $\beta - \alpha > 0$ , а  $\tilde{\beta} - \beta > 0$ ). Следовательно, если

$$(\xi C(q+1) + C^*(q)) \max\left(\frac{1}{\beta - \alpha}, \frac{1}{\tilde{\beta} - \beta}\right) \leq C(q+1),$$

то  $\|(\bar{Z}_{k_1, k_2}(t), \bar{V}_{k_1, k_2}(t))\|$  удовлетворяет оценкам (5.2.31) при том же значении постоянной  $C(q+1)$ .

Теорема доказана.

### 5.3. Теорема об инвариантном слоении

Наиболее важным свойством глобально дихотомических систем, представленных в предыдущем разделе, является существование некоторого инвариантного слоения. Существование данного слоения доказывается при рассмотрении предельного случая приведенной выше краевой задачи, соответствующего  $\tau = +\infty$  (этот метод уже использовался в разделе 2.8). Напомним, что система дифференциальных уравнений называется глобально дихотомической, если она имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{z} &= Az + f(z, v, \mu, t), \\ \dot{v} &= Bv + g(z, v, \mu, t), \end{aligned} \quad (5.3.1)$$

где  $z \in \mathbb{R}^n$ ,  $v \in \mathbb{R}^m$ ,  $t$  — время, а  $\mu$  — вектор параметров. Функции  $f$  и  $g$  являются  $\mathbb{C}^r$ -гладкими ( $r \geq 1$ ), а их производные равномерно ограничены;

кроме того, предполагается, что первые производные являются равномерно малыми:

$$\left\| \frac{\partial(f, g)}{\partial(z, v)} \right\| < \xi \quad (5.3.2)$$

где  $\xi$  — некоторая достаточно малая постоянная. Положим, что для матриц  $A$  и  $B$  при всех значениях  $s \geq 0$  выполняются следующие оценки:

$$\begin{aligned} \|e^{A s}\| &\leq e^{\alpha s}, \\ \|e^{-B s}\| &\leq e^{-\beta s}. \end{aligned} \quad (5.3.3)$$

Возьмем  $\gamma$  вещественным (далее  $\gamma \in (\alpha, \beta)$ ).

**Определение 5.1.** Рассмотрим произвольную точку  $(z_0, v_0)$ . Пусть  $(z_0(t), v_0(t))$  является траекторией, с началом в точке  $(z_0, v_0)$  при некотором значении  $t = t_0$ . Через  $W_\gamma^s(z_0, v_0, t_0)$  обозначаем такое множество точек  $(z_1, v_1)$ , чтобы траектория  $(z_1(t), v_1(t))$  точки при том же  $t = t_0$  принимающая значение  $(z_1, v_1)$ , удовлетворяла неравенству

$$\|(z_1(t), v_1(t)) - (z_0(t), v_0(t))\| \leq C e^{\gamma t} \quad (5.3.4)$$

при всех значениях  $t \geq t_0$ . Множество  $W_\gamma^s(z_0, v_0, t_0)$  называется условно устойчивым или  $\gamma$ -устойчивым множеством точек  $(z_0, v_0)$  при  $t = t_0$ .<sup>5</sup>

**Теорема 5.13.** Для произвольной точки  $(z_0, v_0, t_0)$  и величины  $\gamma \in (\alpha, \beta)$  условно устойчивое множество  $W_\gamma^s$  является  $C^q$ -гладким многообразием (где  $q$  — наибольшее целое число такое, что  $q\alpha < \beta$ , а  $q \leq r$ ) типа

$$v = \varphi(z; z_0, v_0, t_0, \mu),$$

где функция  $\varphi$  не зависит от  $\gamma$ , определена для всех  $z$  и непрерывно зависит от  $(z_0, v_0, \mu, t_0)$ .

<sup>5</sup>Здесь начальный момент времени  $t = t_0$  задается в связи с тем, что рассматриваемая система является неавтономной, и различные начальные моменты времени соответствуют различным траекториям. Конечно, в случае автономной системы, когда функции  $f$  и  $g$  не зависят от времени, величину  $t_0$  можно не определять.

Доказательство. Как и в предыдущем разделе, решение  $(z(t), v(t))$  удовлетворяет следующей интегральной зависимости:

$$z(t) = e^{A(t-t_0)}z(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-s)}f(z(s), v(s), \mu, s)ds, \quad (5.3.5)$$

$$v(t) = e^{-B(\tau-t)}v(\tau) - \int_t^\tau e^{-B(s-t)}g(z(s), v(s), \mu, s)ds$$

при любом значении  $\tau$ . Таким образом, если точка  $(z_1, v_1)$  принадлежит  $\gamma$ -устойчивому множеству точки  $(z_0, v_0)$ , то

$$\begin{aligned} z_1(t) - z_0(t) &= e^{A(t-t_0)}(z_1(t_0) - z_0(t_0)) \\ &+ \int_{t_0}^t e^{A(t-s)}[f(z_1(s), v_1(s), \mu, s) - f(z_0(s), v_0(s), \mu, s)]ds, \\ v_1(t) - v_0(t) &= - \int_t^{+\infty} e^{-B(s-t)}[g(z_1(s), v_1(s), \mu, s) - g(z_0(s), v_0(s), \mu, s)]ds \end{aligned} \quad (5.3.6)$$

(здесь учитывается, что  $e^{-B(\tau-t)}e^{\gamma\tau} \rightarrow 0$  при  $\tau \rightarrow +\infty$  при любом фиксированном значении  $t$ , и то, что по определению  $\gamma$ -устойчивого множества  $v_1(\tau) - v_0(\tau) = O(e^{\gamma\tau})$ ).

Введем обозначения  $\zeta(t) = z_1(t) - z_0(t)$ ,  $\eta(t) = v_1(t) - v_0(t)$ . Решение системы (5.3.6) является неподвижной точкой интегрального оператора

$$\begin{aligned} \bar{\zeta}(t) &= e^{A(t-t_0)}\zeta^0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-s)}[f(z_0(s) + \zeta(s), v_0(s) + \eta(s), \mu, s) \\ &- f(z_0(s), v_0(s), \mu, s)]ds, \\ \bar{\eta}(t) &= - \int_t^{+\infty} e^{-B(s-t)}[g(z_0(s) + \zeta(s), v_0(s) + \eta(s), \mu, s) \\ &- g(z_0(s), v_0(s), \mu, s)]ds, \end{aligned} \quad (5.3.7)$$

где  $\zeta^0 = z_1(t_0) - z_0(t_0)$ . Из формулы(5.3.7) следует, что

$$\|\bar{\zeta}(t)\| \leq e^{\alpha(t-t_0)} \|\zeta^0\| + \int_{t_0}^t e^{\alpha(t-s)} \left\| \frac{\partial(f, g)}{\partial(z, v)} \right\| \cdot \|\zeta(s), \eta(s)\| ds, \quad (5.3.8)$$

$$\|\bar{\eta}(t)\| \leq \int_t^{+\infty} e^{-\beta(s-t)} \left\| \frac{\partial(f, g)}{\partial(z, v)} \right\| \cdot \|\zeta(s), \eta(s)\| ds.$$

На основании этой оценки можно непосредственно заключить, что если для любого значения  $\gamma \in (\alpha, \beta)$  функция  $(\zeta(s), \eta(s))$  является *ограниченной* в  $\gamma$ -норме, то есть удовлетворяет неравенству

$$\|\zeta(s), \eta(s)\| \leq C e^{\gamma s} \quad (5.3.9)$$

при всех значениях  $s \geq t_0$ , то оператор (5.3.7) отображает данную функцию в функцию  $(\bar{\zeta}(t), \bar{\eta}(t))$ , которая удовлетворяет тому же условию. Более того, в полной аналогии с теоремой 5.11 (формула (5.2.17)) можно доказать, что рассматриваемый оператор является сжимающим в  $\gamma$ -норме на банаховом пространстве  $H_{[t_0, +\infty)}$  функций, удовлетворяющих неравенству (5.3.9).

Таким образом, согласно банаховскому принципу сжимающих отображений, для произвольной точки  $z_1(t_0)$  система (5.3.6) имеет единственное решение  $(z_1(t), v_1(t))$ , удовлетворяющее неравенству (5.3.4). Вследствие единственности данное решение не зависит от выбора значения  $\gamma$  из интервала  $(\alpha, \beta)$ .

На основании теоремы 3.25 решение непрерывно зависит от  $(z_0, v_0, t_0, \mu)$  и исходного значения  $z = z_1(t_0) = z_0(t_0) + \zeta^0$ . В частности, получаем, что  $v = v_1(t_0)$  является непрерывной функцией от  $z = z_1(t_0)$ . Таким образом, условно устойчивое многообразие произвольной точки  $z_0$  представляет собой график некоторой непрерывной функции  $v = \varphi(z)$ .

Теперь докажем  $\mathbb{C}^q$ -гладкость условно устойчивого многообразия, которая эквивалентна  $\mathbb{C}^q$ -гладкости решения  $(z_1(t), v_1(t))$  системы (5.3.6) относительно начального условия  $z_1(t_0)$ . Путем формального дифференцирования системы (5.3.6) находим, что первая производная

$$(Z^*(t), V^*(t)) \equiv \left( \frac{\partial z_1(t)}{\partial z_1(t_0)}, \frac{\partial v_1(t)}{\partial z_1(t_0)} \right),$$

если она существует, удовлетворяет уравнениям

$$Z^*(t) = e^{A(t-t_0)} + \int_{t_0}^t e^{A(t-s)} f'_{z,v}(z_1(s), v_1(s), \mu, s)(Z^*(s), V^*(s)) ds,$$

$$V^*(t) = - \int_t^{+\infty} e^{-B(s-t)} g'_{z,v}(z_1(s), v_1(s), \mu, s)(Z^*(s), V^*(s)) ds. \quad (5.3.10)$$

Производные высшего порядка

$$(Z_k^*(t), V_k^*(t)) \equiv \left( \frac{\partial^k z_1(t)}{\partial z_1(t_0)^k}, \frac{\partial^k v_1(t)}{\partial z_1(t_0)^k} \right)$$

должны удовлетворять уравнениям

$$Z_k^*(t) = \int_{t_0}^t e^{A(t-s)} f'_{z,v}(z_1(s), v_1(s), \mu, s)(Z_k^*(s), V_k^*(s)) ds + P_k(t),$$

$$V_k^*(t) = - \int_t^{+\infty} e^{-B(s-t)} g'_{z,v}(z_1(s), v_1(s), \mu, s)(Z_k^*(s), V_k^*(s)) ds - Q_k(t) \quad (5.3.11)$$

где

$$P_k(t) = \int_{t_0}^t e^{A(t-s)} \sum_{i=2}^k \frac{\partial^i f}{\partial (z, v)^i} \Big|_{(z_1(s), v_1(s))} \times \sum_{j_1 + \dots + j_i = k} C_{j_1, \dots, j_i} (Z_{j_1}^*(s), V_{j_1}^*(s)) \dots (Z_{j_i}^*(s), V_{j_i}^*(s)) ds \quad (5.3.12)$$

$$Q_k(t) = \int_t^{+\infty} e^{-B(s-t)} \sum_{i=2}^k \frac{\partial^i g}{\partial (z, v)^i} \Big|_{(z_1(s), v_1(s))} \times \sum_{j_1 + \dots + j_i = k} C_{j_1, \dots, j_i} (Z_{j_1}^*(s), V_{j_1}^*(s)) \dots (Z_{j_i}^*(s), V_{j_i}^*(s)) ds.$$

Таким образом, если известны производные  $(Z_j^*, V_j^*)$  для  $j < k$ , то  $k$ -я производная  $(Z_k^*, V_k^*)$  является неподвижной точкой оператора

$$\begin{aligned} \bar{Z}(t) &= \int_{t_0}^t e^{A(t-s)} f'_{z,v}(z_1(s), v_1(s), \mu, s)(Z(s), V(s)) ds + P_k(t) \\ \bar{V}(t) &= - \int_t^{+\infty} e^{-B(s-t)} g'_{z,v}(z_1(s), v_1(s), \mu, s)(Z(s), V(s)) ds - Q_k(t). \end{aligned} \quad (5.3.13)$$

Данные уравнения аналогичны уравнениям (5.2.35), (5.2.36) для нахождения производных решений краевой задачи (5.2.11). В точной аналогии с тем, как это было сделано в теореме 5.12, можно показать, что если производная  $(Z_j^*(s), V_j^*(s))$  в формуле (5.3.12) при  $j < k$  удовлетворяет неравенству

$$\|Z_j^*(s), V_j^*(s)\| \leq C e^{(\max(\alpha, j\alpha) + \varepsilon)s}, \quad (5.3.14)$$

где величина  $\varepsilon$  мала, то при  $k\alpha < \beta$  интеграл, определяющий  $Q_k(t)$  является сходящимся, а

$$\|P_k(t), Q_k(t)\| \leq \text{const } e^{k\alpha t}.$$

Более того, оператор (5.3.13) отображает пространство функций  $(Z(t), V(t))$ , ограниченных в  $\gamma$ -норме в себя, при условии, что  $\gamma \in (\max(\alpha, k\alpha), \beta)$ , и является сжимающим в этой норме.

Таким образом, если известны производные  $(Z_j^*(s), V_j^*(s))$ , удовлетворяющие неравенству (5.3.14) при  $j < k$ , то существует формальное решение  $(Z_k^*(s), V_k^*(s))$  системы (5.3.11), удовлетворяющее неравенству (5.3.14) при  $j = k$ . Следовательно, по индукции, существуют ограниченные в  $\gamma$ -норме ( $\gamma \in (\max(\alpha, k\alpha), \beta)$ ) формальные производные  $(Z_k^*(s), V_k^*(s))$ , порядок которых достигает  $q$ .

Для доказательства того, что формальные производные действительно являются производными, покажем, что решение  $(z_1(t), v_1(t))$  системы (5.3.6) при  $\tau \rightarrow +\infty$  является пределом решения  $(z_\tau^*(t), v_\tau^*(t))$  краевой задачи, рассмотренной в предыдущем разделе, с граничными условиями  $(z^0 = z_1(t_0) = z_0(t_0) + \zeta^0, v^1 = v_0(\tau))$ , и что при каждом значении  $k = 1, \dots, q$   $k$ -я производная  $(Z_{k\tau}^*(t), V_{k\tau}^*(t))$  по  $z^0$  решения  $(z_\tau^*(t), v_\tau^*(t))$  стремится к решению  $(Z_k^*(t), V_k^*(t))$  уравнений (5.3.12). То есть докажем,

что на любом фиксированном конечном временном интервале

$$\sup \|(z_\tau^*(t), v_\tau^*(t)) - (z_1(t), v_1(t))\| \rightarrow 0 \text{ при } \tau \rightarrow +\infty \quad (5.3.15)$$

или

$$\sup \left\| \frac{\partial^k (z_\tau^*(t), v_\tau^*(t))}{\partial (z^0)^k} - (Z_k^*(t), V_k^*(t)) \right\| \rightarrow 0 \text{ при } \tau \rightarrow +\infty$$

$$k = 1, \dots, q \quad (5.3.16)$$

откуда непосредственно следует  $\mathbb{C}^q$ -гладкость решения  $(z_1(t), v_1(t))$  относительно  $z^0$ .

Чтобы доказать правильность формулы (5.3.15) заметим, что оператор, задаваемый уравнениями (5.3.7), является пределом оператора

$$\begin{aligned} \bar{\zeta}(t) &= e^{A(t-t_0)} \zeta^0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-s)} \left[ f(z_0(s) + \zeta(s), v_0(s) + \eta(s), \mu, s) \right. \\ &\quad \left. - f(z_0(s), v_0(s), \mu, s) \right] ds, \\ \bar{\eta}(t) &= \begin{cases} - \int_t^\tau e^{-B(s-t)} \left[ g(z_0(s) + \zeta(s), v_0(s) + \eta(s), \mu, s) \right. \\ \quad \left. - g(z_0(s), v_0(s), \mu, s) \right] ds & \text{при } t \leq \tau \\ 0 & \text{при } t \geq \tau \end{cases} \end{aligned} \quad (5.3.17)$$

Точнее, при  $\tau \rightarrow +\infty$  оператор (5.3.7) в  $\gamma'$ -норме, где  $\gamma' \in (\gamma, \beta)$ , является пределом оператора (5.3.17), определенного на пространстве функций  $(\zeta, \eta)$ , ограниченных в  $\gamma$ -норме, где  $\gamma \in (\alpha, \beta)$ . Для доказательства справедливости этого утверждения достаточно проверить, что

$$\sup_{t \geq t_0} \left\| e^{-\gamma' t} \int_{\max(t, \tau)}^{+\infty} e^{-B(s-t)} \left[ g(z_0(s) + \zeta(s), v_0(s) + \eta(s), \mu, s) \right. \right. \\ \left. \left. - g(z_0(s), v_0(s), \mu, s) \right] ds \right\| \rightarrow 0 \text{ при } \tau \rightarrow +\infty$$

при условии, что  $\|\zeta(s), \eta(s)\| \leq C e^{\gamma s}$ . Данный интеграл можно оценить

следующим образом:

$$\begin{aligned} & \left\| e^{-\gamma' t} \int_{\max(t, \tau)}^{+\infty} e^{-B(s-t)} \left[ g(z_0(s) + \zeta(s), v_0(s) + \eta(s), \mu, s) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - g(z_0(s), v_0(s), \mu, s) \right] ds \right\| \\ & \leq e^{-\gamma' t} \int_{\max(t, \tau)}^{+\infty} e^{-\beta(s-t)} \|g'_{z,v}\| \|\zeta(s), \eta(s)\| ds \\ & \leq C\xi e^{-\gamma' t} \int_{\max(t, \tau)}^{+\infty} e^{-\beta(s-t)} e^{\gamma s} ds = \frac{C\xi}{\beta - \gamma} e^{(\beta - \gamma')t} e^{(\gamma - \beta) \max(t, \tau)}. \end{aligned}$$

Т. е., поскольку  $\gamma < \gamma' < \beta$ ,

$$\begin{aligned} & \sup_{t \geq 0} \left\| e^{-\gamma' t} \int_{\max(t, \tau)}^{+\infty} e^{-B(s-t)} \left[ g(z_0(s) + \zeta(s), v_0(s) + \eta(s), \mu, s) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - g(z_0(s), v_0(s), \mu, s) \right] ds \right\| \leq \frac{C\xi}{\beta - \gamma} e^{(\gamma - \gamma')\tau} \end{aligned}$$

Следовательно, утверждение является верным, так как  $\gamma' > \gamma$ .

В связи с тем, что неподвижная точка сжимающего оператора непрерывно зависит от параметров, при  $\tau \rightarrow +\infty$  неподвижная точка  $(\zeta_\tau^*, \eta_\tau^*)$  оператора (5.3.17) стремится к неподвижной точке  $(\zeta_\infty^*, \eta_\infty^*)$  оператора (5.3.7) в  $\gamma'$ -норме. При конечной величине  $\tau$  неподвижная точка  $(\zeta_\tau^*, \eta_\tau^*)$  оператора (5.3.17) представляет собой (на интервале  $t \in [t_0, \tau]$ ) решение  $(z_\tau^*(t), v_\tau^*(t)) = (z_0(t) + \zeta_\tau^*(t), v_0(t) + \eta_\tau^*(t))$  краевой задачи с граничными условиями  $z^0 = z_0(t_0) + \zeta^0$ ,  $v^1 = v_0(\tau)$ .

Таким образом,  $(z_\tau^*(t), v_\tau^*(t))$  стремится к решению  $(z_1(t), v_1(t)) = (z_0(t) + \zeta_\infty^*(t), v_0(t) + \eta_\infty^*(t))$  системы (5.3.6) в  $\gamma'$ -норме, откуда непосредственно следует справедливость формулы 5.3.15).

Как указано в разделе 5.2, формальное дифференцирование по граничным условиям является приемлемым способом нахождения производных решения  $(z_\tau^*, v_\tau^*)$ . То есть,  $k$ -я производная  $(Z_{k\tau}^*(t), V_{k\tau}^*(t))$  находится как

неподвижная точка оператора

$$\begin{aligned} \bar{Z}(t) &= \int_{t_0}^t e^{A(t-s)} f'_{z,v}(z_\tau^*(s), v_\tau^*(s), \mu, s)(Z(s), V(s)) ds + P_{k\tau}(t), \\ \bar{V}(t) &= - \int_t^\tau e^{-B(s-t)} g'_{z,v}(z_\tau^*(s), v_\tau^*(s), \mu, s)(Z(s), V(s)) ds - Q_{k\tau}(t) \end{aligned} \quad (5.3.18)$$

где

$$\begin{aligned} P_{k\tau}(t) &= \int_{t_0}^t e^{A(t-s)} \sum_{i=2}^k \frac{\partial^i f}{\partial(z, v)^i} \Big|_{(z_\tau^*(s), v_\tau^*(s))} \\ & \quad \times \sum_{j_1 + \dots + j_i = k} C_{j_1, \dots, j_i}(Z_{j_1\tau}^*(s), V_{j_1\tau}^*(s)) \cdots (Z_{j_i\tau}^*(s), V_{j_i\tau}^*(s)) ds \\ Q_{k\tau}(t) &= \int_t^{+\infty} e^{-B(s-t)} \sum_{i=2}^k \frac{\partial^i g}{\partial(z, v)^i} \Big|_{(z_\tau^*(s), v_\tau^*(s))} \\ & \quad \times \sum_{j_1 + \dots + j_i = k} C_{j_1, \dots, j_i}(Z_{j_1\tau}^*(s), V_{j_1\tau}^*(s)) \cdots (Z_{j_i\tau}^*(s), V_{j_i\tau}^*(s)) ds. \end{aligned} \quad (5.3.19)$$

Оператор (5.3.18) отображает функции, ограниченные в  $\gamma$ -норме (где  $\gamma \in (k\alpha, \beta)$ ), в функции, ограниченные в той же норме, и является равномерно сжимающим в этой норме для всех значений  $\tau$  (см. теорему 5.12). Таким образом, решение удовлетворяет неравенству

$$\|Z_{k\tau}^*(t), V_{k\tau}^*(t)\| \leq C e^{(\max(\alpha, k\alpha) + \varepsilon)t}. \quad (5.3.20)$$

Теперь возьмем величину  $k_0 \leq q$  и положим, что формула (5.3.16) выполняется при всех значениях  $k < k_0$ . Расширим оператор (5.3.18) на пространство функций, определенных при всех значениях  $t \geq t_0$  при допущении, что правая часть второго уравнения системы (5.3.18) тождественно обращается в нуль при  $t \geq \tau$ . Как и прежде, можно убедиться, что на пространстве функций, ограниченных в  $\gamma$ -норме (где  $\gamma \in (k\alpha, \beta)$ ) интегральный оператор в  $\gamma'$ -норме ( $\gamma' \in (\gamma, \beta)$ ) непрерывно зависит от  $\tau$ , а его предел при  $\tau \rightarrow +\infty$  задается оператором (5.3.11).

Действительно, согласно формуле (5.3.15) и допущению о том, что выражение (5.3.16) является верным при всех значениях  $j < k_0$ , получаем неравенство

$$\|P_k(t) - P_{k\tau}(t)\|_{\gamma'} \leq \sup_{t \geq t_0} e^{-\gamma't} \int_{t_0}^t e^{\alpha(t-s)} \varphi(s, \tau) ds$$

где  $\varphi(s, \tau) \rightarrow 0$  (при  $\tau \rightarrow +\infty$ ) равномерно на любом фиксированном интервале значений  $s$ . Таким образом, для некоторой величины  $t(\tau)$ , стремящейся к бесконечности при  $\tau \rightarrow +\infty$ , имеет место неравенство

$$\lim_{\tau \rightarrow +\infty} \|P_k(t) - P_{k\tau}(t)\|_{\gamma'} \leq \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \sup_{t \geq t(\tau)} e^{-\gamma't} \int_{t_0}^t e^{\alpha(t-s)} \varphi(s, \tau) ds. \quad (5.3.21)$$

Заметим, что  $\varphi$  является нормой разности между суммами, входящими в подынтегральные функции в формулах (5.3.12) и (5.3.19). Следовательно, на основании неравенств (5.3.14) и (5.3.20)

$$\varphi \leq \text{const } e^{\gamma s}.$$

Подставляя полученное неравенство в формулу (5.3.21), находим, что

$$\lim_{\tau \rightarrow +\infty} \|P_k(t) - P_{k\tau}(t)\|_{\gamma'} \leq \text{const } \lim_{\tau \rightarrow +\infty} e^{(\gamma-\gamma')t(\tau)} = 0.$$

Аналогичным образом получаем

$$\lim_{\tau \rightarrow +\infty} \|Q_k(t) - Q_{k\tau}(t)\|_{\gamma'} \leq \text{const } \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \sup_{t \geq t(\tau)} e^{-\gamma't} \int_{\max(t, \tau)}^{+\infty} e^{-\beta(s-t)} e^{\gamma s} ds$$

откуда

$$\lim_{\tau \rightarrow +\infty} \|Q_k(t) - Q_{k\tau}(t)\|_{\gamma'} = 0.$$

Точно также доказывается справедливость предельного перехода к системе (5.3.11) для первых слагаемых в формуле (5.3.18).

Поскольку неподвижная точка сжимающего оператора непрерывно зависит от параметра, предел (в  $\gamma'$ -норме, а следовательно, и в обычной норме на любом конечном отрезке времени  $t$ ) решения системы (5.3.18) при

$\tau \rightarrow +\infty$  является решением  $(Z_{k_0}^*, V_{k_0}^*)$  системы (5.3.11). Таким образом, справедливость формулы (5.3.16) при  $k < k_0 \leq q$  предполагает ее справедливость и при  $k = k_0$ . По индукции получаем, что (5.3.16) выполняется при всех значениях  $k \leq q$ , что и требовалось доказать.

**Замечание.** Многообразие  $W_\gamma^s$  является тем же при всех значениях  $\gamma \in (\alpha, \beta)$ . Таким образом, траектории точек условно устойчивого многообразия точки  $(z_0, v_0, t_0)$  удовлетворяют неравенству (5.3.4) при любых значениях  $\gamma$  из этого интервала и, следовательно, они удовлетворяют уравнению

$$\|(z_1(t), v_1(t)) - (z_0(t), v_0(t))\| = o(e^{\gamma t}) \quad (5.3.22)$$

Заметим, что многообразие  $W_\gamma^s(z_0, v_0, t_0, \mu)$ , вообще говоря, не является инвариантным относительно системы (5.3.1). Единственное исключение составляет случай, когда система является автономной, а точка  $(z_0, v_0)$  — положением равновесия. В данном случае  $W_\gamma^s$  является множеством точек, положительные полутраектории которых стремятся к положению равновесия в  $\gamma$ -норме:

$$\|(z(t), v(t)) - (z_0, v_0)\| = o(e^{\gamma t}).$$

Следовательно, данное многообразие является инвариантным по определению.

В общем случае совокупность всех условно устойчивых многообразий образует *инвариантное слоение* расширенного фазового пространства  $\mathbb{R}^{n+m} \times \mathbb{R}^1$  (здесь  $\mathbb{R}^1$  — ось времени). Действительно, если некоторая точка  $(z_1, v_1)$  принадлежит условно устойчивому многообразию некоторой другой точки  $(z_0, v_0)$ , то  $W_\gamma^s(z_1, v_1, t_0, \mu) = W_\gamma^s(z_0, v_0, t_0, \mu)$  по определению многообразия  $W_\gamma^s$ . Следовательно, если два условно устойчивых многообразия пересекаются в некоторой точке, то они должны совпадать. Таким образом, совокупность этих многообразий действительно представляет собой непрерывное слоение. Для доказательства того, что указанное слоение является *инвариантным* достаточно заметить, что  $X_t W_\gamma^s(z_0, v_0, t_0, \mu) = W_\gamma^s(z_0(t), v_0(t), t_0 + t, \mu)$  (через  $X_t$  обозначен сдвиг по времени  $t$  вдоль траекторий системы). Если система является автономной, то  $W_\gamma^s$  не зависит от начального момента  $t_0$ , следовательно, получаем инвариантное слоение фазового пространства. Если система является неавтономной и периодически зависит от времени (период равен  $T$ ), то произвольная поверхность  $t = t_0 = \text{const}$  задает некоторое сечение, а сдвиг по времени  $T$  вдоль траекторий системы является отображением Пуанкаре  $(z, v) \mapsto (z(t_0 + T), v(t_0 + T))$ . С силу периодичности,  $W_\gamma^s(z_0, v_0, t_0, \mu) = W_\gamma^s(z_0, v_0, t_0 + T, \mu)$ . Зна-

чит,  $X_T W_\gamma^s(z_0, v_0, t_0, \mu) = W_\gamma^s(z_0(t_0 + T), v_0(t_0 + T), t_0, \mu)$ , откуда следует, что на сечении совокупность условно устойчивых многообразий есть инвариантное слоение для отображения Пуанкаре.

Таким образом, в теореме 5.13 устанавливается существование непрерывного инвариантного слоения с  $C^q$ -гладкими листами вида  $v = \varphi(z; z_0, v_0, t_0)$ . Введем обозначение

$$\Phi(z_0, v_0, t_0, \mu) = \left. \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right|_{z=z_0}.$$

Функция  $\Phi$  определяет касательное поле к листам инвариантного слоения:  $\{(v - v_0) = \Phi(z_0, v_0, t_0, \mu)(z - z_0), t = t_0\}$ . Это поле должно быть инвариантно относительно линеаризованной системы. Листы инвариантного слоения получают путем интегрирования касательного поля; то есть каждый лист удовлетворяет уравнению (при каждом фиксированном значении  $t_0$ )

$$\frac{\partial v}{\partial z} = \Phi(z, v, t_0, \mu). \quad (5.3.23)$$

Следовательно, являясь решением приведенного выше дифференциального уравнения, функция  $v = \varphi(z; z_0, v_0, t_0, \mu)$  должна иметь, по крайней мере, ту же гладкость относительно начальных условий  $(z_0, v_0, t_0)$  и параметра  $\mu$ , которую имеет функция  $\Phi$ .

Вообще говоря, функция  $\Phi$  (а также  $\varphi$ ) не является гладкой относительно  $(z_0, v_0, t_0, \mu)$ . Исследуем гладкость слоения подробнее. Пусть  $\tilde{\beta} \geq 0$  — такая постоянная, что для траектории  $(z(t), v(t))$  производные по начальным условиям  $(z_0, v_0) = (z(t_0), v(t_0))$  и  $\mu$  удовлетворяют следующим оценкам:

$$\left\| \frac{\partial^k(z(t), v(t))}{\partial(z_0, v_0, \mu)^k} \right\| \leq \text{const } e^{k\tilde{\beta}t}. \quad (5.3.24)$$

Можно доказать, что если спектр матрицы

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

лежит строго слева от мнимой оси, то в формуле (5.3.2) можно взять такую малую величину  $\xi$ , ограничивающую производные функций  $f$  и  $g$ , чтобы все производные  $\frac{\partial^k(z(t), v(t))}{\partial(z_0, v_0, \mu)^k}$  были ограничены. Следовательно, в данном случае  $\tilde{\beta} = 0$ .

Вообще говоря, величина  $\tilde{\beta}$  такова, что спектр матрицы  $B$  (а также  $A$ ) лежит строго слева от прямой  $\text{Re}(\cdot) = \tilde{\beta}$ . В данном случае оценки (5.3.24) выполняются при условии, что величина  $\xi$  достаточно мала. Заметим, что при фиксированном значении  $\tilde{\beta}$  увеличение порядка производной, оцениваемой при помощи неравенства (5.3.24), требует уменьшения величины  $\xi$ .

Из доказательства теоремы 5.13 следует, что функция  $\Phi$ , определяющая касательные к листам инвариантного слоения, равна  $V^*(t_0)$ , где  $V^*$  — решение системы интегральных уравнений (5.3.10), где в качестве траектории  $(z_1(s), v_1(s))$  теперь следует взять  $(z_0(s), v_0(s))$  (траектории точки  $(z_0, v_0)$ ). Поскольку функции  $z(t)$  и  $v(t)$ , входящие в формулу (5.3.10), зависят от начальных условий  $(z(t_0), v(t_0)) = (z_0, v_0)$ , решение  $V^*$  также является функцией от  $(z_0, v_0)$ . Как и при доказательстве теоремы 5.13, можно проверить, что производные решения  $V^*$  по  $(z_0, v_0, \mu)$  можно найти путем решения соответствующих интегральных уравнений, полученных при помощи формального дифференцирования уравнений (5.3.10). То есть,  $k$ -я производная

$$(Z_k^{*0}, V_k^{*0}) \equiv \frac{\partial^k}{\partial(z_0, v_0, \mu)^k} (Z^*, V^*)$$



является неподвижной точкой оператора

$$\begin{aligned}
\bar{Z}(t) &= \int_{t_0}^t e^{A(t-s)} f'_{z,v}(z(s), v(s), \mu, s)(Z(s), V(s)) ds \\
&+ \sum_{i=1}^k \int_{t_0}^t e^{A(t-s)} \left( \frac{\partial^i}{\partial(z_0, v_0, \mu)^i} f'_{z,v}(z(s), v(s), \mu, s) \right) \\
&\cdot (Z_{k-i}^{*0}(s), V_{k-i}^{*0}(s)) ds, \\
\bar{V}(t) &= - \int_t^{+\infty} e^{-B(s-t)} g'_{z,v}(z(s), v(s), \mu, s)(Z(s), V(s)) ds \\
&+ \sum_{i=1}^k \int_t^{+\infty} e^{-B(s-t)} \left( \frac{\partial^i}{\partial(z_0, v_0, \mu)^i} g'_{z,v}(z(s), v(s), \mu, s) \right) \\
&\cdot (Z_{k-i}^{*0}(s), V_{k-i}^{*0}(s)) ds.
\end{aligned} \tag{5.3.25}$$

Чтобы убедиться в том, что  $k$ -я производная решения  $(Z^*, V^*)$  находится как неподвижная точка этого оператора, можно рассмотреть семейство операторов, зависящих от  $\tau$ , где бесконечный верхний предел интеграла во втором уравнении заменен на  $\tau$ , таким образом, предел берется при  $\tau \rightarrow +\infty$ .<sup>6</sup>

Согласно неравенству (5.3.24), производные

$$\frac{\partial^i}{\partial(z_0, v_0, \mu)^i} (f, g)'_{z,v}(z(s), v(s), \mu, s),$$

входящие в формулу (5.3.25), на основании вышеизложенного, оцениваются как  $\text{const } e^{i\tilde{\beta}s}$ . В связи с этим очевидно, что интегралы в формуле (5.3.25) сходятся при выполнении неравенства

$$\alpha + k\tilde{\beta} < \beta, \tag{5.3.26}$$

<sup>6</sup>Заметим, что при конечной величине  $\tau$  формальные производные решения действительно являются производными (соответствующие доказательства приводятся в разделе 2.8).

аналогично доказательству теоремы 5.12. Более того, при любых значениях  $\tau$  операторы рассматриваемого семейства отображают пространство функций, ограниченных в  $\gamma$ -норме (где  $\gamma \in (\alpha + k\tilde{\beta}, \beta)$ ), в себя и являются на этом пространстве равномерно сжимающими относительно  $\tau$ .

Таким образом, функция  $\Phi$  является  $\mathbb{C}^k$ -гладкой, где  $k$  — такая наибольшая целочисленная величина, при которой выполняется неравенство (5.3.26). Конечно, порядок дифференцирования может не превышать  $(r-1)$ , поскольку правая часть системы (5.3.10) содержит  $\mathbb{C}^{r-1}$ -гладкие функции  $(f, g)'_{z,v}$ . Приходим к следующему результату.

**Лемма 5.2.** *Если при некотором значении  $\tilde{\beta} \geq 0$  все собственные значения матриц  $B$  и  $A$  лежат строго слева от прямой  $\text{Re}(\cdot) = \tilde{\beta}$ , то слоение на условно устойчивые многообразия является  $\mathbb{C}^k$ -гладким (при условии, что величина постоянной  $\xi$  в неравенстве (5.3.2) является достаточно малой), где  $k$  — наибольшая целочисленная величина такая, что  $k < (\beta - \alpha)/\tilde{\beta}$  и  $k \leq r - 1$ .*

В случае, когда  $r = +\infty$ , а  $\tilde{\beta} = 0$  (то есть собственные значения матриц  $A$  и  $B$  имеют строго отрицательные действительные части) из приведенной теоремы следует, что слоение является  $\mathbb{C}^\infty$ -гладким. Напротив, если собственные значения матрицы  $B$  лежат на мнимой оси, то величина  $\tilde{\beta}$  должна быть положительной, а при фиксированной величине  $\xi$  слоение обладает лишь конечной гладкостью.

Теорема 5.13 и лемма 5.2 являются основными результатами, используемыми в нашей книге при доказательстве теоремы о центральном многообразии и других теорем о локальных инвариантных многообразиях. Заметим, что приложение этих результатов к системе, полученной из системы (5.3.1) путем обращения времени, обуславливает существование другого инвариантного слоения на условно неустойчивые многообразия вида  $z = \psi(v)$ .

Следует подчеркнуть, что исследование краевой задачи вида, представленного в предыдущем разделе, служит не только для доказательства теорем об инвариантном многообразии, но также для анализа нелокальных бифуркаций. Учитывая эту область приложения сделаем акцент на следующем результате, который уже был упомянут при доказательстве теоремы 5.12.

**Лемма 5.3.** *Пусть  $(z^*(t; z^0, v^1, \tau, \mu), v^*(t; z^0, v^1, \tau, \mu))$  является решением краевой задачи  $z^*(0) = z^0, v^*(\tau) = v^1$  для системы (5.3.1), а величины  $z^0$  и  $v^1$  непрерывно зависят от  $\tau$ , в связи с чем при  $\tau \rightarrow +\infty$  решение  $(z^*(0), v^*(0))$  имеет некоторый конечный предел  $(z_0, v_0)$ . Тогда,*

производная решения  $v^*(0)$  по  $z^0$  стремится к значению функции  $\Phi$ , определяющей касательное направление к условно устойчивому многообразию в точке  $(z_0, v_0)$ .

Чтобы доказать данную лемму заметим, что, по предположению, решение  $(z^*(t), v^*(t))$  краевой задачи равномерно стремится к траектории точки  $(z_0, v_0)$  на некотором фиксированном конечном интервале времени  $t$ . Следовательно, в данной лемме лишь повторяется утверждение, сформулированное при доказательстве теоремы 5.13, о том, что при  $k = 1$  пределом неподвижной точки интегрального оператора (5.3.18) (величина  $\tau$  является конечной) является решение системы (5.3.10) ( $\tau = +\infty$ ). Аналогично, из формулы (5.3.16) следует, что по предположению, имеющемуся в лемме 5.3, все производные решения  $v^*(0)$  по  $z^0$  до порядка  $q$  при  $\tau \rightarrow +\infty$  имеют конечный предел (здесь  $q$  — наибольшая целочисленная величина такая, что  $q\alpha < \beta$ , а  $q \leq r$ ).

#### 5.4. Доказательство теорем о центральных многообразиях

В данном разделе завершается доказательство теоремы о центральном многообразии. По сути, здесь доказывается более общий результат, который включает в себе все теоремы о локальном инвариантном многообразии, представленные в данной книге.

Рассмотрим локальную систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{z} &= Az + f(z, v, \mu) \\ \dot{v} &= Bv + g(z, v, \mu) \end{aligned} \quad (5.4.1)$$

определенную в малой окрестности положения равновесия  $O(0, 0)$ . Положим, что

$$f(0, 0, 0) = 0, \quad g(0, 0, 0) = 0, \quad (f, g)'_{z,v}(0, 0, 0) = 0.$$

Также допустим, что матрицы  $A$  и  $B$  удовлетворяют неравенству (5.3.3), то есть характеристические показатели, соответствующие собственным значениям матрицы  $A$  должны лежать в комплексной плоскости слева от прямой  $\operatorname{Re}(\cdot) = \alpha$ , а остальные характеристические показатели — справа от прямой  $\operatorname{Re}(\cdot) = \beta$ . Как известно из раздела 5.2, данную систему можно расширить на все фазовое пространство, при этом конечная система будет являться

глобально дихотомической. Тогда из теоремы 5.13 следует существование инвариантного многообразия, то есть  $\gamma$ -устойчивого множества точки  $O$ . По сути, существует множество инвариантных многообразий в зависимости от того, как фазовые переменные разделены на части « $z$ » и « $v$ »: выбор величин  $\alpha$  и  $\beta$  влияет на то, как разделяется спектр характеристических показателей и, следовательно, на вид инвариантного многообразия.

**Теорема 5.14.** Пусть  $n$  характеристических показателей положения равновесия  $O$  системы (5.4.1) лежат в комплексной плоскости слева от прямой  $\operatorname{Re}(\cdot) = \alpha$ , а остальные  $m$  показателей — справа от прямой  $\operatorname{Re}(\cdot) = \beta$  при некотором значении  $\beta > \alpha$ . Если  $\alpha < 0$ , то при  $\mu = 0$  система имеет однозначное сильно устойчивое (неведущее) инвариантное  $\mathbb{C}^r$ -многообразие  $W^{ss}$ , направленное в точке  $O$  по касательной к  $\{v = 0\}$  и содержащее все траектории, экспоненциально стремящиеся к точке  $O$  при  $t \rightarrow +\infty$  быстрее, чем  $e^{\gamma t}$  при любом значении  $0 > \gamma > \alpha$ . Если положение равновесия сохраняется при изменении  $\mu$  и непрерывно зависит от этого параметра, то многообразие  $W^{ss}$  также непрерывно зависит от  $\mu$ . Более того, если система является  $\mathbb{C}^r$ -гладкой относительно всех переменных, включая  $\mu$ , то многообразие  $W^{ss}$  является  $\mathbb{C}^{r-1}$ -гладким относительно  $\mu$  (касательные к многообразию  $W^{ss}$  являются  $\mathbb{C}^{r-1}$ -гладкими относительно всех переменных).

**Теорема 5.15.** По предположению предыдущей теоремы, если  $\alpha > 0$ , то при всех малых значениях  $\mu$  система имеет расширенное устойчивое инвариантное  $\mathbb{C}^q$ -многообразие  $W^{sE}$  (здесь  $q$  — наибольшее целое число такое, что  $q\alpha < \beta$  и  $q \leq r$ ), направленное при  $\mu = 0$  по касательной в точке  $O$  к  $\{v = 0\}$  и включающее множество  $N^+$  всех траекторий, не выходящих за пределы малой окрестности точки  $O$  при всех положительных значениях времени. Хотя многообразие  $W^{sE}$  не является единственным, любые два таких многообразия имеют общую касательную в каждой точке множества  $N^+$ . Более того, если многообразие  $W^{sE}$  имеет вид  $v = \varphi^{sE}(z)$ , то все производные функции  $\varphi^{sE}$  до порядка  $q$  однозначны во всех точках множества  $N^+$ . Многообразие  $W^{sE}$  непрерывно зависит от  $\mu$ , а если система является  $\mathbb{C}^r$ -гладкой относительно всех переменных, включая  $\mu$ , то многообразие  $W^{sE}$  является  $\mathbb{C}^q$ -гладким относительно  $\mu$ .

При доказательстве этих теорем локальные многообразия  $W^{ss}$  и  $W^{sE}$  возникают как пересечения инвариантного многообразия  $W_\gamma^s$  системы (5.3.1) (полученной путем расширения локальной системы (5.4.1) на все фазовое пространство) с малой окрестностью положения равновесия  $O$ ,

расположенной в начале координат. Напомним, что многообразие  $W_\gamma^s$  является  $\gamma$ -устойчивым множеством точки  $O$ , а  $\gamma \in (\alpha, \beta)$ . В случае, когда  $\alpha < 0$  можно взять отрицательную величину  $\gamma$ . Тогда единственность многообразия  $W^{ss}$  следует непосредственно из определения:  $W^{ss}$  является множеством, состоящим из всех траекторий, стремящихся к точке  $O$  быстрее, чем происходит уменьшение  $e^{\gamma t}$ . Если  $\alpha > 0$ , то  $\gamma > 0$  и, следовательно, многообразии  $W_\gamma^s$  становится множеством траекторий системы (5.3.1), достаточно медленно расходящихся от начала координат. Таким образом, то, какие точки малой окрестности положения равновесия  $O$  включаются в многообразии  $W^{sE}$ , зависит от того, как расширена локальная система (5.4.1) на все фазовое пространство. Следовательно, многообразии  $W^{sE}$  нельзя однозначно описать при помощи локальной системы. Тем не менее, независимо от метода расширения локальной системы, все точки множества  $N^+$ , включающего положительные траектории, которые никогда не выходят за пределы малой окрестности точки  $O$ , по определению принадлежат  $\gamma$ -устойчивому множеству точки  $O$  при любых значениях  $\gamma > 0$ . Следовательно, каждое многообразии  $W^{sE}$  содержит множество  $N^+$ . Единственность касательной к многообразию  $W^{sE}$  в любой точке множества  $N^+$  не следует непосредственно из теоремы 5.13, но этот результат можно получить при ее доказательстве. Действительно, известно, что

$$\left. \frac{\partial \varphi^{sE}}{\partial z} \right|_{z=z_0} = V^*|_{t=0},$$

где  $V^*$  находится путем решения интегрального уравнения

$$\begin{cases} Z^*(t) = e^{At} + \int_0^t e^{A(t-s)} \left( f'_z(z_0(s), v_0(s), \mu) Z^*(s) \right. \\ \quad \left. + f'_v(z_0(s), v_0(s), \mu, s) V^*(s) \right) ds, \\ V^*(t) = - \int_t^{+\infty} e^{-B(s-t)} \left( g'_z(z_0(s), v_0(s), \mu) Z^*(s) \right. \\ \quad \left. + g'_v(z_0(s), v_0(s), \mu) V^*(s) \right) ds. \end{cases} \quad (5.4.2)$$

Здесь  $(z_0(s), v_0(s))$  является траекторией точки  $(z_0, v_0) = \varphi^{sE}(z_0)$ . Из доказательства теоремы 5.13 следует, что данное решение вместе со всеми

его производными по  $z_0$  до порядка  $(q-1)$  является однозначным. Следовательно, поскольку траектория точки  $(z_0, v_0) \in N^+$  определяется только локальной системой, все производные функции  $\varphi^{sE}$  во всех точках множества  $N^+$  однозначны.

Рассмотрим гладкость многообразия  $W^{sE}$  относительно параметров  $\mu$ . Заметим, что в случае, когда  $\alpha > 0$ ,  $\mu$  можно включить в число переменных  $z$ , добавляя к системе (5.4.1) уравнения  $\dot{\mu} = 0$ . Таким образом, в данном случае гладкость относительно параметров  $\mu$  равносильна гладкости относительно переменных  $z$ . Если  $\alpha < 0$ , данное утверждение перестает выполняться, а гладкость неведущего многообразия относительно параметров не следует из теоремы 5.13. Этот вопрос исследуется ниже, при этом гладкость соответствующего инвариантного слоения рассматривается в более широком смысле.

Теоремы 5.14 и 5.15 позволяют воссоздать следующую иерархию локальных инвариантных многообразий. Выберем такую систему координат вблизи положения равновесия  $O$ , что линейная часть системы имеет жорданову форму. Получаем систему

$$\begin{aligned} \dot{y}_i &= A_i y_i + f_i(x, y, z, \mu) \\ \dot{z}_j &= C_j z_j + h_j(x, y, z, \mu) \\ \dot{x} &= Bx + g(x, y, z, \mu) \end{aligned} \quad (5.4.3)$$

где спектр матрицы  $A$  лежит в комплексной плоскости на прямой  $\operatorname{Re}(\cdot) = \alpha_i$ , спектр матрицы  $B$  — на мнимой оси<sup>7</sup>, а спектр матрицы  $C_j$  — на прямой  $\operatorname{Re}(\cdot) = \beta_j$  (в данном случае область значений индексов  $i$  и  $j$  конечна); функции  $f$ ,  $g$  и  $h$  являются нелинейными. Положим, что

$$\dots < \alpha_2 < \alpha_1 < 0 < \beta_1 < \beta_2 < \dots$$

На основании приведенной выше теоремы приходим к следующему результату.

**Теорема 5.16.** *Существует последовательность условно устойчивых гладких локальных инвариантных многообразий*

$$\dots \subset W_{-2}^s \subset W_{-1}^s \subset W_0^s \subset W_1^s \subset \dots$$

<sup>7</sup>В случае грубого многообразия эта часть спектра не учитывается.

вида<sup>8</sup>

$$W_{-i}^s : (x, z, y_1, \dots, y_{i-1}) = \varphi_i^{ss}(y_i, y_{i+1}, \dots)$$

$$W_{-1}^s : (x, z) = \varphi_1^{ss}(y)$$

$$W_0^s : z = \varphi^{sC}(x, y, \mu)$$

$$W_j^s : (z_{j+1}, \dots) = \varphi_j^{sE}(x, y, z_1, \dots, z_j, \mu),$$

где функции  $\varphi$  вместе с их первыми производными обращаются в нуль в начале координат.

Здесь многообразия с отрицательными индексами определяются согласно теореме 5.14, а остальные многообразия — согласно теореме 5.15. По построению многообразия вложены друг в друга: они представляют собой локальные элементы соответствующих условно устойчивых многообразий точки  $O$  для некоторой глобально определенной системы, а последние вложены друг в друга по определению — при любых значениях  $\gamma' > \gamma$  траектории, сходящиеся в точку  $O$  в  $\gamma$ -норме, сходятся в эту точку и в  $\gamma'$ -норме.

Из раздела 5.1 известно, что  $W_0^s$  является центральным устойчивым многообразием, в таком случае  $W_{-1}^s$  — сильно устойчивое многообразие. Если положение равновесия грубое, то ни один из характеристических показателей не лежит на мнимой оси, а  $W_0^s$  является устойчивым многообразием точки  $O$ . Указанное многообразие при  $\mu = 0$  совпадает с многообразием  $W_{-1}^s$ , а многообразие  $W_{-2}^s$  представляет собой неведущее многообразие, рассматриваемое в разделе 2.6, следовательно, остальные многообразия  $W_{-i}^s$  являются многообразиями  $W^{sss}$ ,  $W^{ssss}$  и т. д., представленными в том же разделе.

В случае грубых седел  $W_1^s$  является расширенным устойчивым многообразием, описываемым в разделе 2.7. В случае, когда все характеристические показатели точки  $O$  имеют положительные действительные части, а положение равновесия  $O$  является вполне неустойчивым, многообразие  $W_1^s$  точки  $O$  представляет собой ведущее неустойчивое многообразие, представленное в разделе 2.6.

Применяя теоремы 5.14 и 5.15 к системе, полученной из системы (5.4.1) при помощи обращения времени, получаем следующую последо-

<sup>8</sup>В данном случае многообразия  $W_j^s$  являются  $\mathbb{C}^q$ -гладкими, если  $q\beta_j < \beta_{j+1}$  и  $q \leq r$ , а многообразия  $W_{-i}^s$  являются  $\mathbb{C}^r$ -гладкими (включая многообразие  $W_0$ ).

вательность условно неустойчивых инвариантных многообразий

$$\dots \subset W_{-2}^u \subset W_{-1}^u \subset W_0^u \subset W_1^u \subset \dots$$

где

$$W_{-i}^u : (y_{i+1}, \dots) = \psi_i^{uE}(x, z, y_1, \dots, y_i, \mu)$$

$$W_0^u : y = \psi^{uC}(x, z, \mu)$$

$$W_1^u : (x, y) = \psi^{uu}(z)$$

$$W_j^u : (x, y, z_1, \dots, z_{j-1}) = \psi_j^{uu}(z_j, z_{j+1}, \dots),$$

Здесь все функции  $\psi$  вместе с их первыми производными обращаются в нуль в начале координат. Эта последовательность включает все другие инвариантные многообразия, рассмотренные в главе 2 и в данной главе. В частности, если положение равновесия является негрубым, то  $W_0^u \cap W_0^s$  — центральное многообразие, а в случае, когда положение равновесия грубое  $W_{-1}^u \cap W_0^s$  — ведущее многообразие седлового типа (см. главу 2).

Для системы на инвариантном многообразии  $W_0^s$  положение равновесия не имеет положительных характеристических показателей. Следовательно, для доказательства существования на многообразии  $W_0^s$  гладких инвариантных слоений можно использовать лемму 5.2 (в первую очередь необходимо расширить систему на все фазовое пространство, установить существование глобально определенных гладких инвариантных слоений, а затем вернуться к локальной системе). Полученный результат представлен в следующей теореме.

**Теорема 5.17.** *На многообразии  $W_0^s$  существует семейство сильно устойчивых инвариантных  $\mathbb{C}^{r-1}$ -слоений  $F_{-i}^{ss}$  с  $\mathbb{C}^r$ -гладкими листами  $l_{-i}^{ss}$  вида*

$$(x, y_1, \dots, y_{i-1}) = \eta_{\xi^0, \mu}^{(i)}(y_i, y_{i+1}, \dots),$$

где через  $\xi^0$  обозначена точка  $(x^0, y_1^0, \dots, y_{i-1}^0)$  пересечения соответствующего листа с инвариантным многообразием  $W_{-(i-1)}^u \cap W_0^s$ . Для любой точки  $M \in W_0^s$  листы, проходящие через точку  $M$ , являются вложенными друг в друга:

$$\dots \subset l_{-2}^{ss} \subset l_{-1}^{ss}.$$

Если  $M \in N^+$  (положительная полутраектория точки  $M$  не выходит за пределы малой окрестности точки  $O$  при всех положительных значениях

времени), то все листы, проходящие через точку  $M$ , определяются системой однозначно.

Именно слоение  $F^{ss}_1$  является сильно устойчивым слоением, рассматриваемым в разделе 5.1, в котором утверждается, что в силу существования такого слоения выполняется теорема о редукции 5.5.

Лист  $l^{ss}_i$ , содержащий положение равновесия  $O$ , является сильно устойчивым или неведущим инвариантным многообразием  $W^{ss}_i$ , представленным в теореме 5.16. Поскольку  $\eta$  —  $\mathbb{C}^{r-1}$ -гладкая функция от  $\xi^0$  и  $\mu$ , соответствующее многообразие обладает лишь  $\mathbb{C}^{r-1}$ -гладкостью относительно параметра (если точка  $O$  не исчезает при изменении  $\mu$ , а гладко зависит от указанного параметра).

На основании замечания к лемме 5.2 неведущее многообразие  $\mathbb{C}^\infty$ -гладких систем является  $\mathbb{C}^\infty$ -гладким относительно параметров, при условии, что положение равновесия грубое (на мнимых осях не лежит ни один из характеристических показателей). В противном случае гладкость многообразия  $W^{ss}_i$  относительно  $\mu$  является лишь конечной.

Теорему 5.13, используемую для установления существования различных видов инвариантных многообразий вблизи положения равновесия, аналогичным образом можно применить для изучения периодических траекторий. Систему дифференциальных уравнений вблизи периодической траектории  $L$  с периодом  $\tau$ , можно представить в виде (см. главу 3)

$$\begin{aligned}\dot{z} &= Az + f(z, v, \mu, t), \\ \dot{v} &= Bv + g(z, v, \mu, t),\end{aligned}\tag{5.4.4}$$

где

$$\begin{aligned}f(0, 0, 0, t) &\equiv 0, & f'_{z,v}(0, 0, 0, t) &\equiv 0, \\ g(0, 0, 0, t) &\equiv 0, & g'_{z,v}(0, 0, 0, t) &\equiv 0.\end{aligned}$$

Функции  $f$  и  $g$  являются либо  $\tau$ -периодическими, либо  $\tau$ -антипериодическими<sup>9</sup> функциями от  $t$ . Собственные значения матриц  $A$  и  $B$  равны отношению логарифмов квадратов мультипликаторов траектории  $L$  к  $2\tau$ . На основании условия (5.3.3)  $m$  мультипликаторов данной траектории должны быть меньше  $e^{\alpha\tau}$  по абсолютной величине, а абсолютные величины остальных  $n$  мультипликаторов должны превышать  $e^{\beta\tau}$ .

<sup>9</sup>Напомним, что антипериодичность означает здесь, что  $X_t(\sigma(z_0, v_0); t_0) = \sigma X_t(z_0, v_0; t_0 + \tau)$ , где через  $X_t$  обозначен сдвиг по времени  $t$ , а  $\sigma$  — некоторая инволюция пространства  $(z, v)$ :  $\sigma \circ \sigma = id$ .

Систему (5.4.4) можно расширить для всех величин  $z$  и  $v$ , лежащих вне малой окрестности периодической траектории  $L$ : ( $z = 0, v = 0$ ). Применяя теорему 5.13 к расширенной системе, находим, что  $\gamma$ -устойчивое множество каждой точки  $M(0, 0, t_0) \in L$  является гладким многообразием  $W^\gamma_s(0, 0, t_0)$ . Вследствие (анти)периодичности, если траектория точки  $(z_0, v_0, t_0)$  стремится к траектории точки  $M$  в  $\gamma$ -норме, то траектория точки  $\sigma X_\tau(z_0, v_0, t_0)$  также стремится к траектории точки  $M$ , и наоборот (в случае чисто периодических функций полагаем, что  $\sigma = id$ ). Следовательно,

$$\sigma \circ X_\tau(W^\gamma_s(0, 0, t_0)) \equiv W^\gamma_s(0, 0, t_0),$$

то есть многообразие  $W^\gamma_s(0, 0, t_0)$  является инвариантным относительно отображения  $\sigma \circ X_\tau$ . Это отображение представляет собой ничто иное, как отображение Пуанкаре за период с сечением  $t = t_0$  (более подробно этот вопрос рассматривается в главе 3). Таким образом, для отображения Пуанкаре расширенной системы существует инвариантное многообразие неподвижной точки  $(0, 0)$ . Множество траекторий, имеющих начало в точках этого многообразия на сечении  $\{t = t_0\}$ , образуют соответствующее инвариантное многообразие для самой системы. Аналогичным образом лемму 5.2 можно использовать для доказательства существования гладких инвариантных слоений. Теперь, точно также, как в случае положений равновесия, можно вернуться к локальной системе.

Таким образом, в малой окрестности периодической траектории получаем иерархию локальных инвариантных многообразий и слоений. Соответствующая теорема аналогична теоремам, приведенным для положений равновесия.

**Теорема 5.18.** Пусть  $n$  мультипликаторов периодической траектории  $L$   $\mathbb{C}^r$ -гладкой системы лежат в комплексной плоскости строго внутри окружности  $|(\cdot)| = e^{\alpha\tau}$ , а остальные  $m$  — строго вне окружности  $|(\cdot)| = e^{\beta\tau}$  при  $\beta > \alpha$ . Если  $\alpha < 0$ , то при  $\mu = 0$  система имеет однозначное  $(n + 1)$ -мерное сильно устойчивое (неведущее) инвариантное  $\mathbb{C}^\tau$ -многообразие  $W^{ss}$ , в каждой точке траектории  $L$  направленное по касательной к собственному пространству, соответствующему первым  $n$  мультипликаторам, и содержащее все траектории, которые при  $t \rightarrow +\infty$  экспоненциально стремятся к  $L$  со скоростью, превышающей  $e^{\gamma t}$ , где  $0 > \gamma > \alpha$ . Если периодическая траектория не исчезает при изменении  $\mu$  и непрерывно зависит от этого параметра, то многообразие  $W^{ss}$  также непрерывно зависит от  $\mu$ . Более того, если система является  $\mathbb{C}^\tau$ -гладкой относительно всех

переменных, включая  $\mu$ , то многообразие  $W^{ss}$  является  $\mathbb{C}^{r-1}$ -гладким относительно  $\mu$  (касательные к многообразию  $W^{ss}$  являются  $\mathbb{C}^{r-1}$ -гладкими относительно всех переменных).

**Теорема 5.19.** По предположению, имеющемуся в предыдущей теореме, если  $\alpha > 0$ , то при всех малых значениях  $\mu$  система имеет расширенное устойчивое  $(n+1)$ -мерное инвариантное  $\mathbb{C}^q$ -многообразие  $W^{sE}$  (здесь  $q$  — наибольшая целочисленная величина такая, что  $q\alpha < \beta$ , а  $q \leq r$ ), в каждой точке траектории  $L$  при  $\mu = 0$  направленное по касательной к собственному подпространству, соответствующему первым  $n$  мультипликаторам, и содержащее множество  $N^+$  всех траекторий, не выходящих за пределы малой окрестности траектории  $L$  при всех положительных значениях времени. Несмотря на то, что многообразие  $W^{sE}$  не является единственным, любые два таких многообразия в каждой точке множества  $N^+$  имеют общую касательную. Более того, все производные до порядка  $q$  однозначны во всех точках множества  $N^+$ . Многообразие  $W^{sE}$  непрерывно зависит от  $\mu$ , и если система  $\mathbb{C}^r$ -гладкая относительно всех переменных, включая  $\mu$ , то многообразие  $W^{sE}$  является  $\mathbb{C}^q$ -гладким относительно  $\mu$ .

Исследуя различные соотношения частей спектра мультипликаторов траектории  $L$  и соответствующим образом переформулирую приведенные выше теоремы для систем, полученных при помощи обращения времени, можно определить все типы локально инвариантных многообразий периодических траекторий, представленных в главе 3 (неведущее, ведущее, расширенное устойчивое и неустойчивое многообразия) и в разделе 5.1 (сильно устойчивое, сильно неустойчивое, центральное устойчивое и центральное неустойчивое многообразия).

Как и прежде, автономную линейную часть системы вблизи  $\tau$ -периодической траектории  $L$  можно записать в жордановой форме. Таким образом, получаем систему

$$\begin{aligned} \dot{y}_i &= A_i y_i + f_i(x, y, z, \mu, t) \\ \dot{z}_j &= C_j z_j + h_j(x, y, z, \mu, t) \\ \dot{x} &= Bx + g(x, y, z, \mu, t) \end{aligned} \quad (5.4.5)$$

где спектр матрицы  $A_i$  лежит на прямой  $\operatorname{Re}(\cdot) = \alpha_i$ , спектр матрицы  $B$  — на мнимой оси, а спектр матрицы  $C_j$  — на прямой  $\operatorname{Re}(\cdot) = \beta_j$  (область значений индексов  $i$  и  $j$  конечна); нелинейные функции  $f$ ,  $g$  и  $h$  являются

(анти)периодическими по времени. Пусть

$$\dots < \alpha_2 < \alpha_1 < 0 < \beta_1 < \beta_2 < \dots.$$

**Теорема 5.20.** Существует последовательность условно устойчивых и условно неустойчивых гладких инвариантных многообразий

$$\dots \subset W_{-2}^s \subset W_{-1}^s \subset W_0^s \subset W_1^s \subset \dots$$

и

$$\dots \subset W_{-2}^u \subset W_{-1}^u \subset W_0^u \subset W_1^u \subset \dots$$

вида<sup>10</sup>

$$W_{-i}^s : (x, z, y_1, \dots, y_{i-1}) = \varphi_i^{ss}(y_i, y_{i+1}, \dots; t)$$

$$W_{-1}^s : (x, z) = \varphi_1^{ss}(y; t)$$

$$W_0^s : z = \varphi^{sC}(x, y, \mu; t)$$

$$W_j^s : (z_{j+1}, \dots) = \varphi_j^{sE}(x, y, z_1, \dots, z_j, \mu; t)$$

и

$$W_{-i}^u : (y_{i+1}, \dots) = \psi_i^{uE}(x, z, y_1, \dots, y_i, \mu, t)$$

$$W_0^u : y = \psi^{uC}(x, z, \mu, t)$$

$$W_1^u : (x, y) = \psi_1^{uu}(z, t)$$

$$W_j^u : (x, y, z_1, \dots, z_{j-1}) = \psi_j^{uu}(z_j, z_{j+1}, \dots; t),$$

где функции  $\varphi$  и  $\psi$  вместе с их первыми производными обращаются в нуль при  $(x, y, z, \mu) = 0$ .

На инвариантных многообразиях  $W_0^s$  и  $W_0^u$  существует семейство сильно устойчивых и семейство сильно неустойчивых инвариантных  $\mathbb{C}^{r-1}$ -гладких слоений  $F_{-i}^{ss}$  и  $F_j^{uu}$  с  $\mathbb{C}^r$ -гладкими листами  $l_{-i}^{ss}$  и, соответственно,  $l_j^{uu}$  вида

$$(x, y_1, \dots, y_{i-1}) = \eta_{\xi^0, \mu}^{s(i)}(y_i, y_{i+1}, \dots; t_0)$$

и

$$(x, z_1, \dots, z_{j-1}) = \eta_{\xi^0, \mu}^{u(j)}(z_j, z_{j+1}, \dots; t_0)$$

<sup>10</sup>Зависимость от  $t$  является  $\tau$ -периодической.

где через  $\xi^0$  обозначена точка пересечения  $(x^0, y_1^0, \dots, y_{i-1}^0)$  или  $(x^0, z_1^0, \dots, z_{j-1}^0)$  соответствующего листа с инвариантным многообразием  $W_{-(i-1)}^u \cap W_0^s$  или, соответственно,  $W_{j-1}^s \cap W_0^u$ ; величина  $t_0$  определяет гиперплоскость  $\{t = t_0\}$  полностью содержащую соответствующий лист. Листы, проходящие через точку  $M \in W_0^s$ , вложены друг в друга следующим образом

$$\dots \subset l_{-2}^{ss} \subset l_{-1}^{ss},$$

а листы, проходящие через точку  $M \in W_0^u$ , — как

$$\dots \subset l_2^{uu} \subset l_1^{uu}.$$

Если  $M \in W_0^s$ , а  $M \in N^+$  (положительная полутраектория не выходит за пределы малой окрестности траектории  $L$  при любом положительном значении времени) или, если  $M \in W_0^u$ , а  $M \in N^-$  (отрицательная полутраектория точки  $M$  не выходит за пределы малой окрестности траектории  $L$  при любом отрицательном значении времени), то все сильно устойчивые или, соответственно, сильно неустойчивые листы, проходящие через точку  $M$ , определяются системой однозначно.

Наконец, следует заметить, что приведенные теоремы можно легко переформулировать через отображения Пуанкаре: при пересечении инвариантных многообразий с сечением  $\{t = t_0\}$  получаем инвариантные многообразия для неподвижной точки в начале координат.

## ГЛАВА 6

### Центральное многообразие. Нелокальный случай

Теорема о центральном многообразии является стандартным инструментом для изучения бифуркаций в малой окрестности положений равновесия и периодических траекторий. Однако, согласно предыдущей главе, кроме локальных бифуркаций существуют другие виды бифуркаций, имеющие большое значение. С выходом в свет работы Андронова и Леонтович [40] стало известно, что среди четырех основных типов границ области устойчивости периодической траектории двумерной системы существуют два типа, которые соответствуют исчезновению периодической траектории через *гомоклиническую петлю* — слияние положения равновесия и траектории, стремящейся к положению равновесия как при  $t \rightarrow +\infty$ , так и при  $t \rightarrow -\infty$ . Хотя все эти типы одинаково важны, и в классической работе Андронова и Леонтович различные типы двумерных бифуркаций не были разграничены, в теории локальных бифуркаций подобные объекты не рассматриваются. *Теория глобальных бифуркаций*, занимающаяся исследованием гомоклинических петель, а также более сложных *гомоклинических и гетероклинических циклов* и других нелокальных структур многомерных систем, возникла в середине семидесятых годов после публикации работ Шильникова [60–62]. Эта теория стала хорошим источником различных моделей сложного динамического поведения и представила всевозможные сценарии перехода между различными типами нелокальной динамики. В данной работе (во второй ее части) выделяется область глобальной теории, занимающаяся, главным образом, исследованием динамических систем с простым поведением (нехаотическим). В данной части книги рассматривается лишь общий вопрос о существовании в нелокальном случае аналога центрального многообразия.

Начало изучению данной задачи было положено в восьмидесятых годах. С тех пор она привлекает внимание многих исследователей. Суще-

вание *нелокального центрального многообразия* вблизи гомоклинической петли установили Тураев [73], Хомбург [36] и Сандстедте [56] (последний рассмотрел также случаи систем большой размерности). Результаты, подтверждающие существование таких центральных многообразий для гетероклинических циклов, были получены Шашковым [57] вблизи определенных гетероклинических циклов. В данной работе подробное доказательство приводится только для самого простого случая (когда, по крайней мере, один ведущий показатель является вещественным). В конце главы представлены необходимые и достаточные условия существования нелокального центрального многообразия вблизи произвольных сложных гомоклинических и гетероклинических циклов, недавно полученные Тураевым [75].

Важно заметить, что между теориями существования локального и нелокального центрального многообразия имеется ряд значительных отличий. Во-первых, размерность нелокального центрального многообразия не связана с уровнем вырождения соответствующей бифуркационной задачи. В локальной теории размерность центрального многообразия равна числу характеристических показателей, лежащих на мнимой оси, откуда следует, что большая размерность центрального многообразия соответствует большому числу вырождений в линеаризованной системе. Напротив, даже задачи о простых (коразмерности один) глобальных бифуркациях не обязательно приводят к центральному многообразию малой размерности. Другое существенное отличие глобальных бифуркаций от локальных состоит в том, что в нелокальном случае гладкость центрального многообразия невелика. В сущности, его гладкость не связана с гладкостью системы и, в целом, нелокальное центральное многообразие является лишь  $C^1$ -гладким.

Следовательно, при изучении частных задач о нелинейной бифуркации нельзя непосредственно использовать приведение к центральному многообразию: как правило, тонкие вопросы требуют вычислений, в том числе необходимо нахождение производных выше первого порядка. Кроме того, если размерность центрального многообразия достаточно велика, из него нельзя извлечь практически никакой полезной информации. С другой стороны, если размерность многообразия мала ( $\dim W^C = 1, 2, 3, 4$ ), то присутствие инвариантного многообразия малой размерности, которое захватывает все траектории, остающиеся в его окрестности, может существенно упростить понимание динамики системы, даже если центральное многообразие является лишь  $C^1$ -гладким. В данном случае можно, по крайней мере, рассмотреть модель малой размерности, имеющую некоторую произволь-

ную гладкость, и выдвинуть предположения, которые следует обосновать, используя исходную неприведенную систему.

### 6.1. Теорема о центральном многообразии для гомоклинической петли

Рассмотрим в пространстве  $\mathbb{R}^{n+m}$ , где  $n \geq 1$ ,  $m \geq 1$  семейство динамических систем

$$\dot{x} = F(x, \mu) \quad (6.1.1)$$

Положим, что функция  $F(x, \mu)$  является  $C^r$ -гладкой ( $r \geq 1$ ) относительно фазовых переменных  $x$  и параметра  $\mu$ . Допустим также, что удовлетворяется следующее условие.

- (А) Пусть система имеет грубое положение равновесия  $O$  седлового типа. Положим, что характеристические показатели  $(\lambda_n, \dots, \lambda_1, \gamma_1, \dots, \gamma_m)$  точки  $O$  упорядочены так, что

$$\operatorname{Re} \lambda_n \leq \dots \leq \operatorname{Re} \lambda_1 < 0 < \gamma_1 < \operatorname{Re} \gamma_2 \leq \dots \leq \operatorname{Re} \gamma_m,$$

где предполагается, что  $\gamma_1$  — вещественно.

В данном случае размерность устойчивого многообразия  $W^s$  равна  $n$ , а  $\dim W^u = m$ . Поскольку ведущий показатель  $\gamma_1$  является вещественным, существует  $(m-1)$ -мерное неведущее (сильно) неустойчивое многообразие  $W^{uu} \subset W^u$ . Напомним, что в силу основного свойства неведущего неустойчивого многообразия при  $t \rightarrow -\infty$  все траектории, лежащие в многообразии  $W^{uu}$ , должны стремиться к положению равновесия  $O$  по касательной к собственному пространству матрицы Якоби линеаризованной системы, соответствующему неведущим собственным значениям  $(\gamma_2, \dots, \gamma_m)$ , тогда как траектории, лежащие в  $W^u \setminus W^{uu}$ , должны стремиться к точке  $O$  по касательной к собственному направлению, соответствующему собственному значению  $\gamma_1$ .

Также положим, что

- (В) при  $\mu = 0$ , система имеет гомоклиническую петлю, то есть существует траектория  $\Gamma$ , стремящаяся к точке  $O$  при  $t \rightarrow \pm\infty$  (по определению,  $\Gamma \subseteq W^s \cap W^u$ ).

и



(С) гомоклиническая траектория  $\Gamma$  не лежит в неведущем неустойчивом подмногообразии  $W^{uu}$ .

На основании предположения (С), траектория  $\Gamma$  покидает седловую точку  $O$  в собственном направлении, соответствующем ведущему собственному значению  $\gamma_1$ , как показано на рис. 6.1.1.

Условия (А), (В) и (С) играют различные роли: условие (А) не касается бифуркаций: оно лишь позволяет выбрать класс рассматриваемых систем. Если система удовлетворяет условию (А), то указанное условие выполняется также для любой близкой системы (то есть для системы, правая часть которой, а также ее первая производная, близка к  $F$ ). Более того, если условие выполняется при  $\mu = 0$ , оно выполняется при всех малых значениях  $\mu$ .

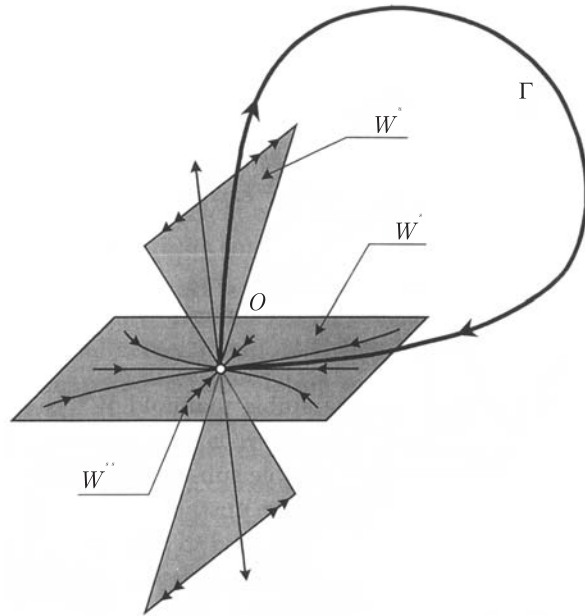


Рис. 6.1.1. На основании условия (С) траектория  $\Gamma$  покидает седловую точку  $O$  в собственном направлении, соответствующем ведущему собственному значению  $\gamma_1$

Условие (В) не выполняется при всех малых значениях  $\mu$ . Можно показать, что если система имеет гомоклиническую петлю, то для некоторых близких систем петля может исчезать (многообразия  $W^s$  и  $W^u$  не пересекаются). Таким образом, условие (В) определяет  $\mu = 0$  как бифуркационное значение параметра и специализирует соответствующее бифуркационное явление (бифуркация гомоклинической петли). Вообще, для системы, правая часть которой вместе с ее первой производной близка к  $\mathcal{F}$ , существует значение параметра  $\mu$  близкое к нулю, при котором возмущенная система также будет иметь гомоклиническую петлю.

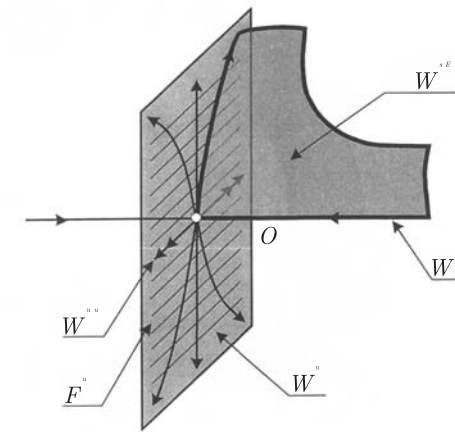


Рис. 6.1.2. Расширенное устойчивое многообразие  $W^{sE}$ , содержащее устойчивое многообразие  $W^s$  и направленное по касательной в седловой точке к собственному пространству, соответствующему характеристическим показателям  $\lambda_n, \dots, \lambda_1, \gamma_1$ . Многообразию  $W^{sE}$  не является единственным; любые два таких многообразия имеют общую касательную на многообразии  $W^s$ . Сильно неустойчивое подмногообразие  $W^{uu}$  однозначно вложено в гладкое инвариантное слое  $\mathcal{F}^u$  на многообразии  $W^u$

Аналогично условию (А), условие (С) не требует каких-либо вырождений. Согласно данному условию, рассматриваемое однопараметрическое семейство находится в *общем положении*: если оно не выполнено, его выполнения всегда можно добиться путем малого возмущения правой ча-

сти, и тогда оно будет выполняться также для любого семейства, близкого к данному.

Пусть  $q$  — такое наибольшее целое, что  $q\gamma_1 < \text{Re } \gamma_2$ . Напомним (раздел 2.7), что согласно предположению (А) существует инвариантное  $C^{\min(q,r)}$ -гладкое расширенное устойчивое многообразие  $W^{sE}$ , направленное по касательной в точке  $O$  к собственному пространству  $E^{sE}$ , соответствующему собственным значениям  $(\lambda_n, \dots, \lambda_1, \gamma_1)$ . Многообразие  $W^{sE}$  полностью включает устойчивое многообразие  $W^s$ . Хотя оно не является однозначным, любые два таких многообразия в любой точке многообразия  $W^s$  имеют общую касательную. Другим важным объектом (см. раздел 5.4) является гладкое инвариантное слоение  $\mathcal{F}^u$  на неустойчивом многообразии  $W^u$ , которое содержит в качестве листа неведущее неустойчивое многообразие  $W^{uu}$ , см. рис. 6.1.2.

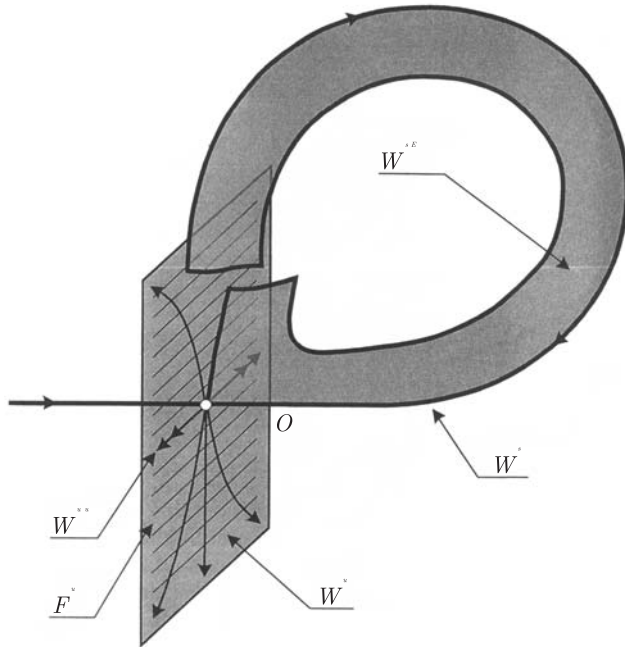


Рис. 6.1.3. Продолжение расширенного устойчивого многообразия  $W^{sE}$  вдоль отрицательных полутраекторий, близких к гомоклинической петле  $\Gamma$

Инвариантное расширенное устойчивое многообразие определяется локально, в малой окрестности точки  $O$ . Однако, если рассматривать точку, которая принадлежит части траектории  $\Gamma$ , лежащей в многообразии  $W_{loc}^s$ , то достаточно малую часть многообразия  $W_{loc}^{sE}$ , содержащую эту точку, можно продолжить на малую окрестность любой заданной предшествующей точки на траектории  $\Gamma$  при помощи отрицательных полутраекторий системы, см. рис. 6.1.3. Аналогичным образом, локальное сильно неустойчивое слоение расширяется на все неустойчивое многообразие при помощи положительных полутраекторий системы.

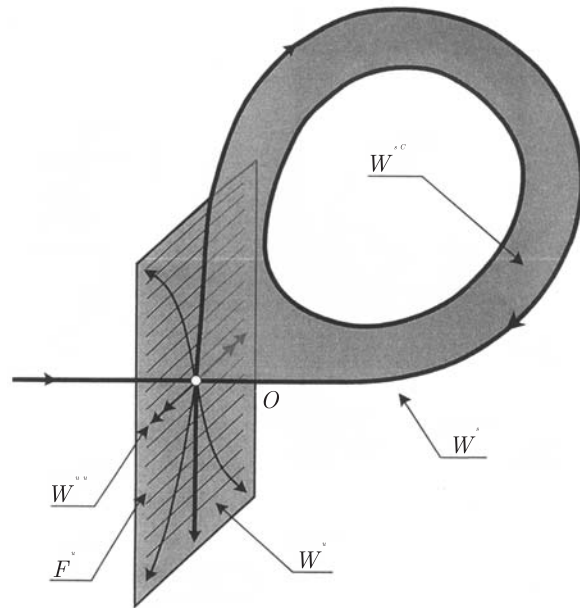
Поскольку траектория  $\Gamma$  лежит одновременно в многообразиях  $W^u$  и  $W^s$ , каждая точка этой траектории принадлежит какой-либо части расширенного устойчивого многообразия и некоторому листу сильно неустойчивого слоения. Следовательно, имеет смысл следующее условие.

(D) Многообразие  $W^{sE}$  трансверсально листам слоения  $\mathcal{F}^u$  в каждой точке гомоклинической траектории  $\Gamma$ .

Следует заметить, что условие (D) необходимо проверить лишь в одной точке на траектории  $\Gamma$ , поскольку многообразия  $W^{sE}$  и слоение  $\mathcal{F}^u$  инвариантны относительно потока, определяемого системой  $X_0$ . Заметим также, что многообразия  $W^{sE}$  и листы слоения  $\mathcal{F}^u$  имеют дополнительные друг другу размерности. Следовательно, условие трансверсальности (D) корректно. Как и (C), данное условие является условием общего положения.

**Теорема 6.1.** Если условия (A), (B), (C) и (D) выполняются, то существует малая окрестности  $U$  гомоклинической траектории  $\Gamma$  такая, что при всех достаточно малых значениях  $\mu$  система  $X_\mu$  имеет такое  $(n+1)$ -мерное инвариантное  $C^{\min(q,r)}$ -гладкое центральное многообразие  $W^{sC}$ , что любая траектория, не лежащая в  $W^{sC}$ , покидает  $U$  при  $t \rightarrow +\infty$ . Многообразие  $W^{sC}$  направлено по касательной в точке  $O$  к расширенному устойчивому собственному пространству  $E^{sE}$  (рис. 6.1.4).

Следующие два раздела посвящены доказательству данной теоремы. Заметим, что в силу симметричности задачи относительно обращения времени, существует соответствующая теорема о центральном неустойчивом многообразии, которая имеет следующую формулировку. Как и прежде, положим, что при  $\mu = 0$  система имеет гомоклиническую петлю  $\Gamma$ . Уточним условия (A), (C) и (D).

Рис. 6.1.4. Центральное устойчивое многообразие  $W^{sC}$ 

(A') Пусть характеристические показатели точки  $O$  удовлетворяют следующему условию:

$$\operatorname{Re} \lambda_n \leq \dots \leq \operatorname{Re} \lambda_2 < \lambda_1 < 0 < \operatorname{Re} \gamma_1 \leq \dots \leq \operatorname{Re} \gamma_m.$$

В данном случае вследствие того, что ведущее устойчивое собственное значение  $\lambda_1$  является вещественным, существует  $(n - 1)$ -мерное сильно устойчивое подмногообразие  $W^{ss} \subset W^s$ .

(C') Положим, что гомоклиническая траектория  $\Gamma$  не лежит в многообразии  $W^{ss}$ .

(D') Допустим, что в каждой точке траектории  $\Gamma$  расширенное неустойчивое многообразие  $W^{uE}$  трансверсально листам сильно устойчивого слоя  $\mathcal{F}^s$ , см. рис. 6.1.5.

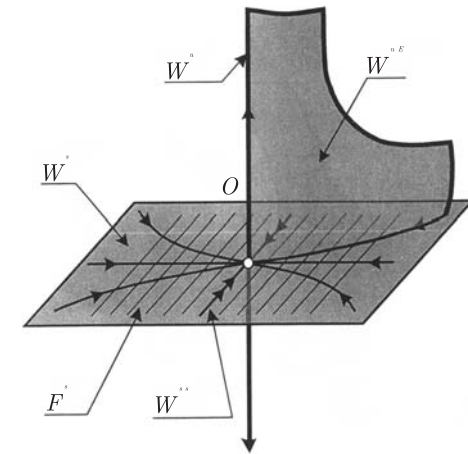


Рис. 6.1.5. Расширенное неустойчивое многообразие  $W^{uE}$  содержит многообразие  $W^u$  и направлено по касательной в седловой точке к собственному пространству, соответствующему характеристическим показателям  $\lambda_1, \gamma_1, \dots, \gamma_m$ . Многообразие  $W^{uE}$  не является единственным; любые два таких многообразия касаются друг друга в каждой точке многообразия  $W^u$ . Сильно устойчивое подмногообразие  $W^{ss}$  однозначно вложено в гладкое инвариантное слое  $F^s$  на многообразии  $W^s$

Аналогично приведенному выше случаю, инвариантное расширенное неустойчивое многообразие можно продолжить вдоль положительных траекторий, см. рис. 6.1.6.

**Теорема 6.2.** Если условия (A'), (B), (C') и (D') выполняются, то существует малая окрестность  $U$  гомоклинической траектории  $\Gamma$  такая, что при всех достаточно малых значениях  $\mu$  система  $X_\mu$  имеет такое  $(m + 1)$ -мерное инвариантное  $C^{\min(p,r)}$ -гладкое центральное неустойчивое многообразие  $W^{uC}$ , что любая траектория, не лежащая в  $W^{uC}$ , покидает  $U$  при  $t \rightarrow -\infty$ , см. рис. 6.1.7. (здесь  $p$  — наибольшее целое число, при котором  $p|\lambda_1| < |\operatorname{Re} \lambda_2|$ ). Многообразие  $W^{uC}$  направлено по касательной в точке  $O$  к собственному пространству  $E^{uE}$ , которое соответствует характеристическим показателям  $(\gamma_m, \dots, \gamma_1, \lambda_1)$ .

В случае, когда выполняются условия теорем 6.1, и 6.2, приходим к следующему результату.

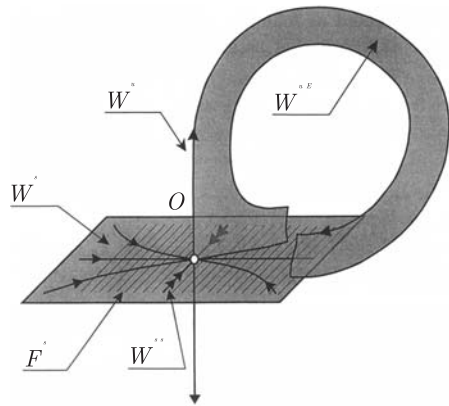


Рис. 6.1.6. Продолжение расширенного неустойчивого многообразия  $W^{uE}$  вдоль положительных траекторий, близких к  $\Gamma$

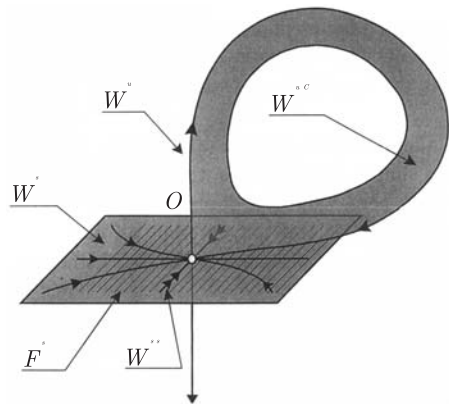


Рис. 6.1.7. Центральное неустойчивое многообразие  $W^{uC}$ . Случай, «противоположный» многообразию  $W^{sC}$

**Теорема 6.3.** Пересечение многообразий  $W^{uC}$  и  $W^{sC}$  является двумерным инвариантным  $C^{\min(p,q,r)}$ -гладким центральным многообразием  $W^c$ . Оно содержит все траектории, которые никогда не выходят за пре-

делы окрестности  $U$ . Многообразие  $W^c$  касается в точке  $O$  собственного пространства  $E^L$ , соответствующего ведущим характеристическим показателям  $(\gamma_1, \lambda_1)$ .

Данная теорема позволяет свести задачу о бифуркациях гомоклинической петли, стремящейся к седлу  $(1,1)$ , к исследованию двумерной системы на многообразии  $W^c$  (если условия  $(C)$ ,  $(C')$ ,  $(D)$ ,  $(D')$  выполняются). Следует отметить насколько важно условие, согласно которому оба ведущих показателя должны являться, в общем случае, вещественными. Размерность центрального многообразия вблизи гомоклинической петли равна количеству ведущих характеристических показателей (как положительных, так и отрицательных). Если размерность больше двух, то бифуркации такой петли в некоторых случаях могут иметь довольно сложный характер.

В случае гомоклинической петли, направленной к седлу  $(-1,1)$  двумерная динамика довольно проста. Тем не менее, приведение к центральному многообразию требует осторожности. Это связано, во-первых, с малой гладкостью многообразия  $W^c$ . В целом, оно является лишь  $C^1$ -гладким, что может вызвать затруднения при непосредственном распространении результатов, полученных для двумерного случая, на многообразия большей размерности. Таким образом, двумерная теория бифуркаций гомоклинической петли, разработанная Е. А. Леонтович, позволяет создать иерархию все более вырожденных случаев (соответствующих все возрастающему числу предельных циклов, возникающих при бифуркации). Исследование этих случаев требует все большей гладкости системы и, естественно, наивное представление о том, что данную иерархию, согласно теореме 6.3, можно непосредственно распространить на многомерные случаи, приведет к ошибочным результатам. В отличие от случая локальных бифуркаций, теоремы 6.1–6.3, главным образом, содержат результаты качественного, а не аналитического характера.

Во-вторых, многообразие  $W^c$  не является локальным (оно не гомеоморфно диску). Поскольку касательное пространство к данному многообразию в точке  $O$  является ведущей плоскостью  $E^L$ , многообразие локально совпадает с одним из ведущих многообразий  $W_{loc}^L$  седлового типа. При  $\mu = 0$  указанное многообразие должно содержать часть  $\Gamma^+$  гомоклинической траектории  $\Gamma$ , лежащей в многообразии  $W_{loc}^s$ , и часть  $\Gamma^-$  траектории  $\Gamma$ , лежащей в многообразии  $W_{loc}^u$ . Малую часть многообразия  $W_{loc}^L$  можно продолжить из малой окрестности траектории  $\Gamma^+$  при помощи положительных полутраекторий, направленных вдоль петли  $\Gamma$ , до пересечения с  $\Gamma^-$ . Мно-

гообразии, полученное в результате такого продолжения, должно вернуться в окрестность точки  $O$  таким образом, чтобы его можно было гладко склеить в этот момент времени с тем же локальным многообразием  $W_{loc}^L$ . Это необходимо для того, чтобы получить гладкое инвариантное многообразие  $W^C$ . Если ориентация сохраняется, полученное склеенное многообразие является двумерным кольцом. Если нет — многообразие  $W^c$  представляет собой лист Мебиуса. В действительности возможны оба случая. Таким образом, в многомерном случае бифуркации гомоклинической петли к седлу- $(1,1)$  (вообще говоря) приводятся к соответствующим бифуркациям либо на плоскости, либо на двумерном неориентируемом многообразии.

### 6.2. Отображение Пуанкаре вблизи гомоклинической петли

В этом и следующих разделах приводится доказательство теоремы 6.1, построенное на исследовании отображения Пуанкаре  $T$ , определяемого траекториями системы в малой окрестности  $U$  гомоклинической петли  $\Gamma$ . Данное отображение можно представить как суперпозицию двух отображений: *локального отображения*  $T_{loc}$ , определяемого вблизи точки  $O$  седлового типа, и *глобального отображения*  $T_{glo}$ , определяемого траекториями вдоль глобальной части гомоклинической траектории  $\Gamma$  вне малой окрестности седла, см. рис. 6.2.1.

В окрестности седла  $O$  введем координаты  $(u, y, w)$ ,  $u \in \mathbb{R}^n$ ,  $y \in \mathbb{R}^1$  и  $w \in \mathbb{R}^{m-1}$  такие, чтобы локально система принимала вид

$$\begin{aligned} \dot{u} &= Au + f(u, y, w, \mu), \\ \dot{y} &= \gamma y + g(u, y, w, \mu), \\ \dot{w} &= Bw + h(u, y, w, \mu), \end{aligned} \tag{6.2.1}$$

где  $A$  —  $(n \times n)$ -мерная матрица, а  $\text{spectr } A = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ ;  $B$  —  $(m-1) \times (m-1)$ -мерная матрица, а  $\text{spectr } B = \{\gamma_2, \dots, \gamma_m\}$ ;  $\gamma \equiv \gamma_1$ . Выберем такие значения  $\lambda > 0$  и  $\eta > 0$ , чтобы

$$\max\{\text{Re } \lambda_1, \dots, \text{Re } \lambda_n\} < -\lambda \tag{6.2.2}$$

$$\min\{\text{Re } \gamma_2, \dots, \text{Re } \gamma_m\} > \eta > \gamma. \tag{6.2.3}$$

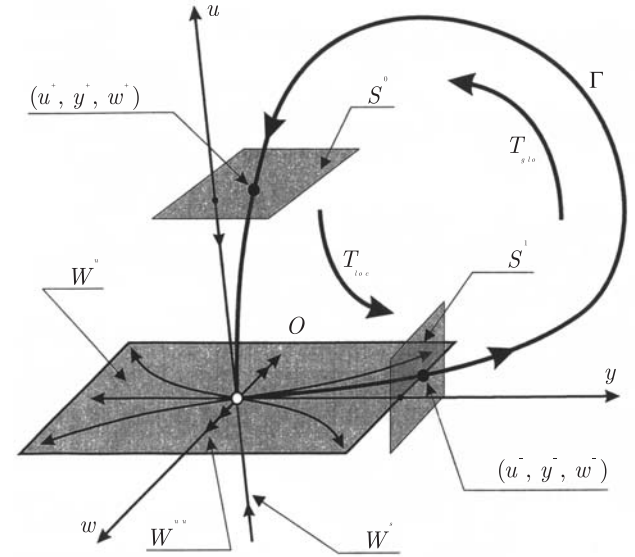


Рис. 6.2.1. Отображение Пуанкаре представляется как суперпозиция двух отображений: *локального отображения*  $T_{loc}$ , определяемого вдоль траекторий вблизи точки  $O$  седлового типа, начинающихся на сечении  $S^{in}$  и заканчивающихся на  $S^{out}$ , и *глобального отображения*  $T_{glo}$ , определяемого траекториями, начинающимися на сечении  $S^{out}$  и заканчивающимися на  $S^{in}$ , вдоль глобальной части гомоклинической петли  $\Gamma$

Функции  $f, g, h$  являются  $C^r$ -гладкими, а

$$(f, g, h)(0, 0, 0, 0) = 0, \quad \left. \frac{\partial(f, g, h)}{\partial(u, y, w, \mu)} \right|_{(x, y, z, \mu)=0} = 0. \tag{6.2.4}$$

В этих координатах при  $\mu = 0$  устойчивое многообразие является касательным в точке  $O$  к пространству  $\{(y, w) = 0\}$ , неустойчивое многообразие является касательным к  $\{u = 0\}$ , а сильно неустойчивое многообразие является касательным к  $\{(u, w) = 0\}$ .

При  $\mu = 0$  и  $t \rightarrow +\infty$  гомоклиническая траектория  $\Gamma$  возвращается в малую окрестность точки  $O$ , лежащую в локальном устойчивом многообразии. Следовательно, при малом значении  $\xi$  траектория пересекает по-

верхность  $\|u\| = \xi$  в некоторой точке  $M^+ \in W_{loc}^s$ . Обозначим координаты точки  $M^+$  через  $(u^+, y^+, w^+)$ , см. рис. 6.2.1. Выберем некоторую малую величину  $\delta > 0$  и рассмотрим малую область

$$S^{in} = \{ \|u\| = \xi, \| (u - u^+, y - y^+, w - w^+) \| \leq \delta \}. \quad (6.2.5)$$

Согласно теореме 2.4,  $\frac{d}{dt}\|u\| < 0$  на многообразии  $W_{loc}^s$ ; то есть величина  $\|u\|$  строго убывает вдоль траекторий данного многообразия. Таким образом, при достаточно малом значении  $\xi$  поверхность  $\|u\| = \xi$  трансверсальна траекториям на многообразии  $W_{loc}^s$  и, следовательно, всем близким к ним орбитам. Поэтому, являясь частью сечения, область  $S^{in}$  трансверсальна траекториям, близким к  $\Gamma$ , при условии, что величина  $\mu$  достаточно мала.

Поскольку траектория  $\Gamma$  не лежит в неведущем неустойчивом подмногообразии  $W^{uu}$  (условие (С) теоремы 6.1), она покидает седло  $O$  в ведущем направлении, совпадающем с осью  $y$ . Без потери общности можно предположить, что траектория  $\Gamma$  покидает точку  $O$  в направлении положительных значений  $y$ . В данном случае при достаточно малом значении  $y^- > 0$  гомоклиническая траектория пересекает поверхность  $\{y = y^-\}$  в некоторой точке  $M^- \in W_{loc}^u$ . Введем обозначение  $M^- = (u^-, y^-, w^-)$ . Поскольку при  $\mu = 0$  траектория  $\Gamma$  трансверсальна поверхности  $\{y = y^-\}$ , при всех малых значениях  $\mu$  малая площадка

$$S^{out} = \{ y = y^-, \| (u - u^-, w - w^-) \| \leq \delta \}, \quad (6.2.6)$$

является сечением (то есть она трансверсально пересекает траектории системы). При  $\mu = 0$  траектория точки  $M^-$  (траектория  $\Gamma$ ) при некотором конечном положительном значении времени достигает точки  $M^+$ . Следовательно, в силу непрерывной зависимости траекторий от начальных условий и параметров, при всех малых значениях  $\mu$  траектории, начинающиеся на сечении  $S^{out}$  вблизи точки  $M^-$ , должны пересекать сечение  $S^{in}$  вблизи  $M^+$ . Таким образом, можно определить отображение  $T_{glo}$ , под действием которого малая окрестность точки  $M^-$  на  $S^{out}$  отображается в малую окрестность точки  $M^+$  на  $S^{in}$ .

Все траектории, начинающиеся на  $S^{in}$  пересекают  $\xi$ -окрестность точки  $O$  седлового типа. Если траектория не принадлежит локальному устойчивому многообразию, она через некоторое время покидает малую окрестность точки  $O$ . Если траектория, начинающаяся в некоторой точке  $M^0 \in S^{in}$  покидает малую окрестность седла в точке  $M^1$ , принадлежащей области  $S^{out}$ , то точки  $M^0$  и  $M^1$  связаны локальным отображением  $T_{loc}: M^0 \mapsto M^1$ .

Очевидно, что траектория, которая не выходит за пределы малой окрестности гомоклинической петли при всех положительных значениях времени, должна пересекать  $S^{in}$  и  $S^{out}$ : после того, как траектория покидает окрестность начала координат, она проходит вдоль глобального участка траектории  $\Gamma$ , а затем возвращается в окрестность начала координат, пересекая  $S^{in}$ . Затем, после пересечения траекторией окрестности в некоторой точке на  $S^{in}$ , она может покинуть ее только в некоторой точке на  $S^{out}$  (либо она может навсегда остаться в малой окрестности точки  $O$ ; в таком случае траектория принадлежит многообразию  $W_{loc}^s$ ). По определению, последовательные точки пересечения траектории с сечениями связываются при помощи отображения  $T_{loc}$  либо  $T_{glo}$ . Таким образом, существует взаимосвязь между рассматриваемыми траекториями и итерациями отображения  $T = T_{glo} \circ T_{loc}$ .

Поскольку время прохождения от сечения  $S^{out}$  до  $S^{in}$  ограничено, отображение  $T_{glo}$  является  $C^r$  диффеоморфизмом. Следовательно, необходимые оценки отображения  $T_{glo}$  можно получить путем разложения в ряд Тейлора. Отложим изучение глобального отображения до конца этого раздела и рассмотрим вопрос о структуре локального отображения, которая является менее тривиальной (в связи с тем, что время, которое траектория проводит в малой окрестности точки  $O$  прежде, чем достичь область  $S^{out}$ , может быть бесконечно велико и стремится к бесконечности, если начальная точка стремится к многообразию  $W_{loc}^s$ ). Чтобы преодолеть возникшие трудности используем метод краевой задачи, описанный в разделах 2.8 и 5.2.

Обозначим координаты на  $S^{in}$  через  $(u^0, y^0, w^0)$  ( $\|u^0\| = \xi$ ), а координаты на  $S^{out}$  — через  $(u^1, w^1)$ . Пусть  $\{y = \psi^s(u, \mu), w = \varphi^s(u, \mu)\}$  — уравнение многообразия  $W_{loc}^s$ , а  $\{u = \psi^u(y, w, \mu)\}$  — уравнение многообразия  $W_{loc}^u$ . Также положим, что  $\{w = \varphi^{sE}(u, y, \mu)\}$  является уравнением локального расширенного устойчивого многообразия  $W_{loc}^{sE}$ . Обозначим через  $l^{uu}$  лист расширенного неустойчивого слоения, проходящий через точку  $M^-$ . Пусть  $\{y = \psi^{uu}(w, \mu), u = \varphi^{uu}(w, \mu)\}$  — уравнение листа  $l^{uu}$ .

**Лемма 6.1.** *Существуют функции  $u_{loc}$  и  $w_{loc}$ , определенные на  $\|u^0 - u^+\| \leq \delta$ ,  $\|w^1 - w^-\| \leq \delta$  и  $0 < y^0 - \psi^s(u^0, \mu) \leq \delta'$  при некотором малом значении  $\delta'$ , такие, что для двух точек  $M^0 \in S^{in}$  и  $M^1 \in S^{out}$  зависимость  $M^1 = T_{loc}M^0$  выполняется только в том случае, если*

$$u^1 = u_{loc}(u^0, y^0, w^1, \mu), \quad w_0 = w_{loc}(u^0, y^0, w^1, \mu). \quad (6.2.7)$$

Функции  $u_{loc}$  и  $w_{loc}$  удовлетворяют следующим неравенствам:

$$\left\| \frac{\partial u_{loc}}{\partial(u^0, y^0)} \right\| \leq C e^{(\gamma-\lambda+\varepsilon)\tau}, \quad (6.2.8)$$

$$\left\| \frac{\partial u_{loc}}{\partial \mu} \right\| \leq C \max \{1, e^{\gamma-\lambda+\varepsilon}\tau\}, \quad (6.2.9)$$

$$\left\| \frac{\partial u_{loc}}{\partial \omega^1} \right\| \leq C, \quad (6.2.10)$$

$$\left\| \frac{\partial w_{loc}}{\partial(u^0, y^0, \mu)} \right\| \leq C, \quad (6.2.11)$$

$$\left\| \frac{\partial w_{loc}}{\partial \omega^1} \right\| \leq C e^{-(\eta-\gamma-\varepsilon)\tau}, \quad (6.2.12)$$

где  $C$  — некоторая положительная постоянная;  $\lambda$ ,  $\eta$  и  $\gamma$  удовлетворяют условиям (6.2.2) и (6.2.3); положительное  $\varepsilon$  может быть произвольно мало при достаточно малом  $\delta$ . Здесь  $\tau(y^0, u^0, w^1, \mu)$  — время прохождения от точки  $M^0$  до точки  $M^1$ ; оно стремится к бесконечности при  $y^0 \rightarrow \psi^s(u^0, \mu)$  и

$$\left\| \frac{\partial \tau}{\partial(u^0, y^0, \mu)} \right\| \leq C e^{(\gamma+\varepsilon)\tau}, \quad \left\| \frac{\partial \tau}{\partial \omega^1} \right\| \leq C. \quad (6.2.13)$$

Кроме того,

$$\lim_{y^0 \rightarrow \psi^s(u^0, \mu)} u_{loc} = \psi^u(y^-, w^1, \mu),$$

$$\lim_{y^0 \rightarrow \psi^s(u^0, \mu)} w_{loc} = \psi^s(u^0, \mu),$$

$$\lim_{y^0 \rightarrow \psi^s(u^0, \mu)} \frac{\partial u_{loc}}{\partial w^1} = \frac{\partial \psi^u}{\partial w}(y^-, w^1, \mu), \quad (6.2.14)$$

$$\lim_{y^0 \rightarrow \psi^s(u^0, \mu)} \frac{\partial w_{loc}}{\partial \mu} = \frac{\partial \psi^u}{\partial \mu}(y^-, w^1, \mu) \quad \text{если } \gamma < \lambda,$$

$$\lim_{y^0 \rightarrow \psi^s(u^0, \mu)} \frac{\partial w_{loc}}{\partial(u^0, y^0, \mu)} = \frac{\partial \varphi^{sE}}{\partial(u, y, \mu)}(u^0, y^0, \mu).$$

Доказательство. Как показано в разделе 2.7, при любом положительном  $\tau > 0$  и малой величине  $(u^0, y^1, w^1)$  существует траектория  $(u^*(t), y^*(t), w^*(t))$  системы, лежащая в малой окрестности начала координат и представляющая собой решение краевой задачи:

$$u^*(0) = u_0, \quad y^*(\tau) = y^1, \quad w^*(\tau) = w^1.$$

Таким образом, траектория с началом в точке  $M^0$  достигает точки  $M^1$  в момент времени  $t = \tau$  только в том случае, если

$$\begin{aligned} u^1 &= u^*(\tau; u^0, y^1, w^1, \mu, \tau), \\ y^0 &= y^*(0; u^0, y^1, w^1, \mu, \tau), \\ w^0 &= w^*(0; u^0, y^1, w^1, \mu, \tau) \end{aligned} \quad (6.2.15)$$

(система построена с учетом того, что решение  $(u^*, y^*, w^*)$  зависит от граничных условий  $(u^0, y^1, w^1)$ , от времени прохождения  $\tau$  и от  $\mu$ ; как показано в разделе 2.8, такая зависимость является  $C^r$ -гладкой относительно всех переменных). Данная краевая задача — частный случай краевой задачи, исследуемой в разделе 5.2:  $u$  в данном случае следует рассматривать как

переменную  $z$ , а  $(y, w)$  — как переменную  $v$ . Согласно оценкам, представленным в теореме 5.12, получаем неравенства (в формуле (5.2.27) следует принять  $\alpha = \lambda$ , а  $\beta = \gamma - \varepsilon$ )

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial u^*}{\partial(u^0, \tau)} \right\| &\leq C e^{-\lambda\tau}, \\ \left\| \frac{\partial u^*}{\partial(w^1, \mu)} \right\| &\leq C \\ \left\| \frac{\partial(y^*, w^*)}{\partial(y^1, w^1, \tau)} \right\| &\leq C e^{-(\gamma-\varepsilon)\tau}, \\ \left\| \frac{\partial(y^*, w^*)}{\partial(u^0, \mu)} \right\| &\leq C \end{aligned} \quad (6.2.16)$$

(в данном случае производные решения  $(y^*, w^*)$  определялись при  $t = 0$  согласно формуле (5.2.27a), а производные решения  $u^*$  — при  $\tau - t = 0$  согласно формуле (5.2.27b)).

Как известно из раздела 2.8, предел  $\tau = +\infty$  соответствует точкам  $M^0 \in W_{loc}^s$  и  $M^1 \in W_{loc}^u$ ; то есть

$$\begin{aligned} y^* |_{\tau=+\infty} &= \psi^s(u^0, \mu), \\ w^* |_{\tau=+\infty} &= \varphi^s(u^0, \mu), \\ u^* |_{\tau=+\infty} &= \psi^u(y^1, w^1, \mu). \end{aligned} \quad (6.2.17)$$

Более того,

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial y^*}{\partial(u^0, \mu)} \right|_{\tau=+\infty} &= \frac{\partial \psi^s}{\partial(u^0, \mu)}(u^0, \mu), \\ \left. \frac{\partial w^*}{\partial(u^0, \mu)} \right|_{\tau=+\infty} &= \frac{\partial \varphi^s}{\partial(u^0, \mu)}(u^0, \mu), \\ \left. \frac{\partial u^*}{\partial(y^1, w^1, \mu)} \right|_{\tau=+\infty} &= \frac{\partial \psi^u}{\partial(y^1, w^1, \mu)}(y^1, w^1, \mu). \end{aligned} \quad (6.2.18)$$

Вместе с тем можно записать

$$\begin{aligned} u^1 &= u^{**}(\tau; u^0, y^0, w^1, \mu, \tau), \\ y^1 &= y^{**}(\tau; u^0, y^0, w^1, \mu, \tau), \\ w^0 &= w^{**}(0; u^0, y^0, w^1, \mu, \tau) \end{aligned} \quad (6.2.19)$$

где  $(u^{**}(t), y^{**}(t), w^{**}(t))$  — решение краевой задачи

$$u^{**}(0) = u^0, \quad y^{**}(0) = y^0, \quad w^{**}(\tau) = w^1 \quad (6.2.20)$$

для системы, полученной из системы (6.2.1) путем продолжения из малой окрестности начала координат на все пространство  $R^{n+m}$  (заметим, что если выполняется условие (6.2.15), решение остается в малой окрестности начала координат; применяя результаты, полученные в разделе 5.2 для краевой задачи (6.2.20), влияние этого условия можно не учитывать). Задача (6.2.20) является частным случаем краевой задачи, рассматриваемой в разделах 5.2, 5.3: в данном случае переменные  $(u, y)$  следует обозначить через  $z$ , а  $w$  — через  $v$ . Также положим, что  $\alpha = \gamma + \varepsilon$ , а  $\beta = \eta$ . С помощью оценок, представленных в теореме 5.12, получаем неравенства (см. (5.2.26a) и (5.2.26b))

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial(y^{**}, u^{**})}{\partial(u^0, y^0, \mu, \tau)} \right\| &\leq C e^{(\gamma+\varepsilon)\tau}, \\ \left\| \frac{\partial(y^{**}, u^{**})}{\partial w^1} \right\| &\leq C \\ \left\| \frac{\partial w^{**}}{\partial(w^1, \tau)} \right\| &\leq C e^{-\eta\tau}, \\ \left\| \frac{\partial w^{**}}{\partial(u^0, y^0, \mu)} \right\| &\leq C \end{aligned} \quad (6.2.21)$$

(производные решения  $w^{**}$  вычисляются при  $t = 0$  по формуле (5.2.26a), а производные решения  $(u^{**}, y^{**})$  — при  $\tau - t = 0$  по формуле (5.2.26b)).

Предел  $\tau = +\infty$  рассматривался в разделе 5.3. В соответствие с леммой 5.3, производные решения  $w^{**}$  в пределе  $\tau = +\infty$  совпадают с производными функции, график которой есть условно устойчивое многообразие



предельной точки  $M^0$ . Поскольку точка  $M^0$  принадлежит многообразию  $W_{loc}^s(O)$  при  $\tau = +\infty$ , ее условно устойчивое многообразие совпадает с условно устойчивым многообразием точки  $O$  — в данном случае с расширенным устойчивым многообразием  $W^{sE}$ . Таким образом,

$$\left. \frac{\partial w^{**}}{\partial(u^0, y^0, \mu)} \right|_{\tau=+\infty} = \frac{\partial \varphi^{sE}}{\partial(u^0, y^0, \mu)}(u^0, \psi^s(u^0, \mu), \mu). \quad (6.2.22)$$

В силу общей симметрии задачи относительно обращения времени (см. замечания в доказательстве теоремы 5.12) производные решений  $u^{**}$  и  $y^{**}$  в пределе  $\tau = +\infty$  совпадают с производными функции, график которой — условно устойчивое многообразие предельной точки  $M^1$  — в данном случае это лист  $l^{uu}$  сильно устойчивого слоения, проходящий через точку  $M^1$ . Таким образом,

$$\left. \frac{\partial(y^{**}, u^{**})}{\partial w^1} \right|_{\tau=+\infty} = \frac{\partial(\psi^{uu}, \varphi^{uu})}{\partial w^1}(w^1, \mu). \quad (6.2.23)$$

Фиксируя значение  $y^1 = y^-$ , соответствующее точке  $M^1 \in S^{out}$ , второе уравнение системы (6.2.15) можно рассматривать как уравнение для определения времени прохождения  $\tau$  из точки  $M^0$  в точку  $M^1$  в неявном виде. Далее мы покажем, что производная  $\frac{\partial y^*}{\partial \tau}$  не обращается в нуль (а является отрицательной). Следовательно, уравнение

$$y^0 = y^*(0; u^0, y^-, w^1, \mu, \tau) \quad (6.2.24)$$

можно разрешить относительно  $\tau$ : величина  $\tau = +\infty$  соответствует  $y^0 = \psi^s(u^0, \mu)$ , а поскольку  $\frac{\partial y^*}{\partial \tau} < 0$ , уменьшение  $\tau$  до конечной величины влечет за собой монотонное увеличение величины  $y^0$ . Таким образом, данное уравнение однозначно определяет время прохождения как функцию от  $(u^0, y^0, w^1, \mu)$  при изменении значения  $y^0$  от  $\psi^s(u^0, \mu)$  до  $\psi^s(u^0, \mu) + \delta'$ , где величина  $\delta'$  достаточно мала. Подставляя выражение для  $\tau$  в уравнения для определения  $u^*$  и  $w^{**}$ , получаем искомые функции  $u_{loc}$  и  $w_{loc}$  (при фиксированных значениях  $y^1 = y^-$  и  $\|u^0\| = \xi = \|u^+\|$ ).

Согласно уравнению (6.2.24)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau}{\partial y^0} &= \left( \frac{\partial y^*}{\partial \tau} \right)^{-1}, \\ \frac{\partial \tau}{\partial(u^0, w^1, \mu)} &= - \left( \frac{\partial y^*}{\partial \tau} \right)^{-1} \frac{\partial y^*}{\partial(u^0, w^1, \mu)}. \end{aligned} \quad (6.2.25)$$

Для получения оценок этих производных сравним второе уравнение системы (6.2.15) с вторым уравнением системы (6.2.19). Непосредственно из этого сравнения следует, что

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{\partial y^*}{\partial y^1} \frac{\partial y^{**}}{\partial y^0}, \\ 0 &= \frac{\partial y^*}{\partial(u^0, w^1, \mu)} + \frac{\partial y^*}{\partial y^1} \frac{\partial y^{**}}{\partial(u^0, w^1, \mu)}. \end{aligned} \quad (6.2.26)$$

Также заметим, что в соответствии с леммой 5.1

$$\frac{\partial y^*}{\partial \tau} = - \frac{\partial y^*}{\partial y^1} \dot{y} \Big|_{M^1} - \frac{\partial y^*}{\partial w^1} \dot{w} \Big|_{M^1}.$$

Из данного уравнения, а также из уравнений (6.2.25) и (6.2.26) следует, что

$$\frac{\partial \tau}{\partial(u^0, y^0, w^1, \mu)} = - \frac{\partial y^{**}}{\partial(u^0, y^0, w^1, \mu)} / \left( \dot{y} \Big|_{M^1} - \frac{\partial y^{**}}{\partial w^1} \dot{w} \Big|_{M^1} \right). \quad (6.2.27)$$

Необходимо учесть, что в последней формуле знаменатель не обращается в нуль (он положителен). Действительно, поскольку траектория  $\Gamma$  не принадлежит многообразию  $W^{uu}$ , она покидает начало координат по касательной к оси  $y$  (см. теорему 2.5). Таким образом, величина  $w^-$  намного меньше, чем  $y^-$ . В частности, на основании этого можно заключить, что  $\dot{y} \Big|_{M^1} \gg \|\dot{w}\|_{M^1}$ , а справедливость утверждения следует из ограниченности производной  $\frac{\partial y^{**}}{\partial w^1}$  (заметим, что величина  $\dot{y} \Big|_{M^1}$  является положительной поскольку она равна  $\gamma y^-$ , а величина  $y^-$  положительна).

Таким образом, величина  $\frac{\partial \tau}{\partial y^0}$ , обратная  $\frac{\partial y^*}{\partial \tau}$  существует, что является доказательством тому, что время прохождения действительно однозначно

определяется при помощи  $(u^0, y^0, w^1, \mu)$ . Величина  $\frac{\partial \tau}{\partial y^0}$  отрицательна на основании формулы (6.2.27): по определению, производная  $\frac{\partial y^{**}}{\partial y^0}$  равна 1 при  $\tau = 0$ , а поскольку данная производная не обращается в нуль при любом значении  $\tau$  (согласно первому уравнению системы (6.2.26)), ее величина остается положительной при всех значениях  $\tau$ .

Из зависимостей (6.2.27) и (6.2.21) получаем неравенство (6.2.13). Функции  $u_{loc}$  и  $w_{loc}$  определяются как

$$\begin{aligned} u_{loc}(u^0, y^0, w^1, \mu) &\equiv u^*(\tau(u^0, y^0, w^1, \mu); u^0, y^-, w^1, \mu, \tau(u^0, y^0, w^1, \mu)) \\ w_{loc}(u^0, y^0, w^1, \mu) &\equiv w^{**}(\tau(u^0, y^0, w^1, \mu); u^0, y^0, w^1, \mu, \tau(u^0, y^0, w^1, \mu)). \end{aligned} \quad (6.2.28)$$

Теперь можно проверить, что из оценок (6.2.16), (6.2.21) и (6.2.13) следуют неравенства (6.2.8)–(6.2.12), а из предельных зависимостей (6.2.18), (6.2.22) и (6.2.23) следует формула (6.2.14). Лемма доказана.

Производным высших порядков функций  $u_{loc}$  и  $w_{loc}$  можно также дать оценку при помощи теоремы 5.12 и тождеств (6.2.28) и (6.2.27) (в уравнении (6.2.27) величины  $\dot{y}$  и  $\dot{w}$  в точке  $M^1(u^1, y^-, w^1)$  оцениваются согласно формулам (6.2.1)). Опуская очевидные вычисления, приходим к следующему результату.

**Лемма 6.2.** В лемме 6.1 имеют место следующие оценки:

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial^{|k_1|+|k_2|+|k_3|} u_{loc}}{\partial (u^0, y^0)^{k_1} \partial \mu^{k_2} \partial (w^1)^{k_3}} \right\| &\leq C e^{(|k_1|+|k_2|)(\gamma+\varepsilon)-\lambda)\tau} \quad (k_1 \neq 0), \\ \left\| \frac{\partial^{|k_2|+|k_3|} u_{loc}}{\partial \mu^{k_2} \partial (w^1)^{k_3}} \right\| &\leq C \max(1, e^{(|k_2|(\gamma+\varepsilon)-\lambda)\tau}), \\ \left\| \frac{\partial^{|k_1|+|k_2|} w_{loc}}{\partial (u^0, y^0, \mu)^{k_1} \partial (w^1)^{k_2}} \right\| &\leq \begin{cases} C & \text{если } k_2 = 0 \text{ и} \\ & |k_1|(\gamma + \varepsilon) < \eta, \\ C e^{-(\eta-|k_1|(\gamma+\varepsilon))\tau} & \text{если } k_2 \neq 0 \text{ или} \\ & |k_1|(\gamma + \varepsilon) > \eta. \end{cases} \end{aligned} \quad (6.2.29)$$

Заметим, что аналогично лемме 6.1, производные, ограниченные постоянной, при  $\tau \rightarrow +\infty$  имеют, по сути, конечный предел, равный производ-

ным соответствующих условно устойчивых многообразий (см. примечания к лемме 5.3).

Оценок, представленных в леммах 6.1 и 6.2 больше, чем достаточно для достижения поставленных целей. По сути, необходимо доказать, что теорема об инвариантном многообразии сводится к приведенной ниже лемме.

**Лемма 6.3.** Выполним следующую замену переменных на сечениях  $S^{in}$  и  $S^{out}$ :

$$\begin{aligned} y_{new}^0 &= y^0 - \psi^s(u^0, \mu), \\ w_{new}^0 &= w^0 - \varphi^{sE}(u^0, y^0, \mu) \quad \text{на } S^{in} \\ u_{new}^1 &= u^1 - \psi^u(y^1, w^1, \mu) \quad \text{на } S^{out} \end{aligned}$$

(пересечения  $W_{loc}^s \cap S^{in}$  и  $W_{loc}^u \cap S^{out}$ ) распрямлены, а пересечение  $W_{loc}^{sE} \cap S^{in}$  касается  $\{w^0 = 0\}$  в точке  $M^+ = \Gamma \cap S^{in}$  при  $\mu = 0$ ). Точки  $M^0 \in S^{in}$  и  $M^1 \in S^{out}$  связываются отображением  $T_{loc}$  только в том случае, если

$$u^1 = u_{loc}(u^0, y^0, w^1, \mu), \quad w_0 = w_{loc}(u^0, y^0, w^1, \mu) \quad (6.2.30)$$

где функции  $u_{loc}$  и  $w_{loc}$  теперь определяются в точке  $y^0 \in [0, \delta^1]$ ; в новых координатах они удовлетворяют следующим неравенствам:

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial^{|k_1|+|k_2|} u_{loc}}{\partial (u^0, y^0, \mu)^{k_1} \partial (w^1)^{k_2}} \right\| &\leq C e^{|k_1|(\gamma+\varepsilon)\tau}, \quad (k_1 \neq 0), \\ \left\| \frac{\partial^{|k_1|+|k_2|} w_{loc}}{\partial (u^0, y^0, \mu)^{k_1} \partial (w^1)^{k_2}} \right\| &\leq C e^{-(\eta-|k_1|(\gamma+\varepsilon))\tau}, \quad (k_2 \neq 0). \end{aligned} \quad (6.2.31)$$

Все производные  $\frac{\partial^{|k|} u_{loc}}{\partial (w^1)^k}$  и  $\frac{\partial^{|k|} w_{loc}}{\partial (u^0, y^0, \mu)^k}$  до порядка  $\min(q, r)$  непрерывны и ограничены, где  $r$  — гладкость системы, а  $q$  — наибольшая целочисленная величина такая, что  $q\gamma < \eta$ . Более того, в новых координатах

$$u_{loc}(u^0, 0, w^1, \mu) \equiv 0, \quad w_{loc}(u^0, 0, w^1, \mu) \equiv 0, \quad (6.2.32)$$

а

$$\frac{\partial^k w_{loc}}{\partial (u^0, y^0, \mu)^k}(u^0, 0, w^1, \mu) \equiv 0, \quad (6.2.33)$$

при  $k \leq \min(q, r)$ .

Эта лемма следует непосредственно из двух предыдущих лемм. Следует учесть, что на основании тождеств (6.2.32)

$$\frac{\partial u_{loc}}{\partial w^1} \equiv 0 \quad \text{at} \quad y^0 = 0. \quad (6.2.34)$$

Теперь рассмотрим глобальное отображение  $T_{glo}: S^{out} \mapsto S^{in}$ . Поскольку время прохождения от сечения  $S^{in}$  до  $S^{out}$  ограничено (и гладко зависит от начальной точки), отображение  $T_{glo}$  является  $\mathbb{C}^r$ -диффеоморфизмом. Так или иначе, удобнее рассматривать обратное отображение  $T_{glo}^{-1}$ . В связи с тем, что оно также является  $\mathbb{C}^r$ -гладким, отображение  $T_{glo}^{-1}: S^{in} \rightarrow S^{out}$  вблизи точки  $M^+$  можно представить в виде

$$\begin{pmatrix} u^1 - u^-(\mu) \\ w^1 - w^-(\mu) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^0 - u^+ \\ y^0 \\ w^0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_{glo}(u^0, y^0, w^0, \mu) \\ w_{glo}(u^0, y^0, w^0, \mu) \end{pmatrix}. \quad (6.2.35)$$

Здесь  $(u^-(\mu), w^-(\mu))$  — координаты образа  $T_{glo}^{-1}M^+$  точки  $M^+$ . При  $\mu = 0$  это точка  $M^- = \Gamma \cap S^{out}$ . Напомним, что в координатах леммы 6.3  $u^-(0) = 0$ . Постоянные  $d_{11}, d_{12}, d_{13}, d_{21}, d_{22}$  и  $d_{23}$  являются матрицами размерностей  $n \times (n-1)$ ,  $n \times 1$ ,  $n \times (m-1)$ ,  $(m-1) \times (n-1)$ ,  $(m-1) \times 1$  и  $(m-1) \times (m-1)$ , соответственно; через функции  $u_{glo}$  и  $w_{glo}$  обозначены нелинейные члены.

Напомним, что по предположению при  $\mu = 0$  многообразие  $W^{sE}$  трансверсально пересекает листы сильно неустойчивого слоения (условие (D)) в точках траектории  $\Gamma$ . Следовательно, пересечение касательной к продолжению многообразия  $W^{sE}$ , в точке  $M^-$ , с касательной к листу  $l^{uu}$ , в той же точке, равно нулю. Касательная к многообразию  $W_{loc}^u$ , в этой точке, образует базис совместно с касательной к листу  $l^{uu}$  и вектором фазовой скорости  $(\dot{u}, \dot{y}, \dot{w})|_{M^-}$ , который касателен к  $\Gamma$  в точке  $M^-$ . Этот вектор также включает в себя касательное пространство к многообразию  $W^{sE}$  (поскольку  $W^{sE}$  содержит траекторию  $\Gamma$ ). Таким образом, пересечение касательных к многообразиям  $W^{sE}$  и  $W_{loc}^u$ , проведенных в точке  $M^-$ , является одномерным (оно дополняется до базиса вектором фазовой скорости). Следовательно,

многообразия  $W^{sE}$  и  $W_{loc}^u$  пересекаются трансверсально в точке  $M^-$ . Поэтому образ пересечения  $W_{loc}^{sE} \cap S^{in}$ , полученный при помощи отображения  $T_{glo}^{-1}$  должен быть направлен трансверсально пересечению  $W_{loc}^u \cap S^{out}$ . В координатах леммы 6.3 последнее задается как  $\{u^1 = 0\}$ , а пересечение  $W_{loc}^{sE} \cap S^{in}$  касается  $\{w^0 = 0\}$  при  $\mu = 0$ . Следовательно, условие трансверсальности (D) записывается в этих координатах как трансверсальность пространства

$$u^1 = (d_{11}(0), d_{12}(0)) \cdot \begin{pmatrix} u^0 - u^+ \\ y^0 \end{pmatrix}$$

относительно пространства  $u^1 = 0$ , на основании чего

$$\det(d_{11}, d_{12}) \neq 0. \quad (6.2.36)$$

### 6.3. Доказательство теоремы о центральном многообразии вблизи гомоклинической петли

Чтобы доказать теорему 6.1, необходимо установить существование инвариантного многообразия для обратного отображения Пуанкаре  $T^{-1} = T_{glo}^{-1} \circ T_{loc}^{-1}$  на сечении  $S_{in}$ . Это можно сделать с помощью теоремы 4.4 (обобщение принципа кольца).

Напомним (см. лемма 6.3), что отображение  $T_{loc}: M_0 \mapsto M_1$  было представлено в перекрестной форме через функции  $u_{loc}$  и  $w_{loc}$ , которые определены для  $\{\|u^0 - u^+\| \leq \delta, \|w^1\| \leq \delta, y^0 \in [0, \delta']\}$  при малых значениях  $\delta$  и  $\delta'$ . Отображение  $T_{glo}^{-1}$  задается формулой (6.2.35). Из суперпозиции этих двух отображений следует, что две точки  $(u^0, y^0, w^0)$  и  $(\bar{u}^0, \bar{y}^0, \bar{w}^0)$  связываются отображением  $T^{-1}: (u^0, y^0, w^0) \mapsto (\bar{u}^0, \bar{y}^0, \bar{w}^0)$  тогда и только тогда, когда

$$\bar{w}^0 = w_{loc}(\bar{u}^0, \bar{y}^0, w^1, \mu),$$

$$u^1 = u_{loc}(\bar{u}^0, \bar{y}^0, w^1, \mu),$$

$$u^1 - u^-(\mu) = d_{11}(u^0 - u^+) + d_{12}y^0 + d_{13}w^0 + u_{glo}(u^0, y^0, w^0, \mu),$$

$$w^1 - w^-(\mu) = d_{21}(u^0 - u^+) + d_{22}y^0 + d_{23}w^0 + w_{glo}(u^0, y^0, w^0, \mu), \quad (6.3.1)$$

где  $(u^1, w^1)$  — промежуточная точка, где отрицательная полутраектория точки  $(u^0, y^0, w^0)$  пересекает сечение  $S^{out}$ .

Продолжим область определения указанных функций следующим образом. Во-первых, положим, что  $(u_{loc}, w_{loc}) \equiv 0$  при  $y^0 \leq 0$ , и выполним замену этих функций при помощи умножения их на некоторый множитель, который обращается в нуль вне малой окрестности точки  $(u^+, 0, 0)$ :

$$\begin{aligned} u_{loc} &\rightarrow u_{loc} \cdot \chi \left( \frac{\|u^0 - u^+, y^0, w^1\|}{\rho} \right), \\ w_{loc} &\rightarrow w_{loc} \cdot \chi \left( \frac{\|u^0 - u^+, y^0, w^1\|}{\rho} \right), \end{aligned}$$

где  $\chi$  является  $C^r$ -гладкой функцией такой, что

$$\chi(s) = \begin{cases} 1, & \text{если } s \leq 1/2, \\ 0, & \text{если } s \geq 1, \end{cases} \quad \text{и} \quad \left| \frac{\partial \chi}{\partial s} \right| < 3. \quad (6.3.2)$$

Здесь  $\rho$  — малая постоянная. Можно проверить, что в результате подобного умножения оценки, приведенные в лемме 6.3, как правило, не изменяются: в них может лишь появиться дополнительный постоянный множитель. Заметим, что в малой  $\frac{\rho}{2}$ -окрестности точки  $(u^+, 0, 0)$  функции  $u_{loc}$  и  $w_{loc}$  остаются неизменными, тогда как на границе области определения они тождественно обращаются в нуль. Следовательно, вне области определения без потери гладкости их можно считать тождественно равными нулю.

Аналогичную процедуру можно повторить для отображения  $T_{glo}^{-1}$  — функции  $u_{glo}$  и  $w_{glo}$  можно преобразовать вне  $\frac{\rho}{2}$ -окрестности точки  $(u^0 = u^+, y^0 = 0, w^0 = 0)$  таким образом, чтобы они обращались в нуль на расстоянии  $\rho$  от данной точки, на основании чего можно заключить, что отображение  $T_{glo}^{-1}$  определено во всех точках  $(u^0, y^0, w^0)$ . Напомним, что  $u_{glo}$  и  $w_{glo}$  являются нелинейными функциями. Следовательно, если величина  $\rho$  достаточно мала, то преобразованное отображение  $T_{glo}^{-1}$  повсюду является очень близким к своей линейной части.

В частности, из этого следует (на основании условия трансверсальности (6.2.36)), что третье уравнение системы (6.3.1) можно разрешить относительно  $(u^0, y^0)$  следующим образом:

$$(u^0, y^0) = f(u^1, w^0, \mu), \quad (6.3.3)$$

где  $f$  — некоторая гладкая функция, все производные которой равномерно ограничены. Таким образом, четвертое уравнение системы (6.3.2) можно представить в виде

$$w_1 = g(u^1, w^0, \mu), \quad (6.3.4)$$

где  $g$  — гладкая функция с равномерно ограниченными производными. Подставляя последнее уравнение во второе уравнение системы (6.3.1), находим, что

$$u^1 = u_{loc}(\bar{u}^0, \bar{y}^0, g(u^1, w^0, \mu), \mu).$$

Поскольку при малом значении  $\bar{y}^0$  производная  $\frac{\partial u_{loc}}{\partial w^1}$  стремится к нулю (см. лемму 6.3), ее величина для преобразованной функции  $u_{loc}$  может быть равномерно мала при достаточно малом значении  $\rho$ . Следовательно, приведенное выше уравнение можно разрешить относительно  $u^1$ . Получаем

$$u_1 = \tilde{u}_{loc}(\bar{u}^0, \bar{y}^0, w^0, \mu), \quad (6.3.5)$$

где функция  $\tilde{u}_{loc}$ , как правило, удовлетворяет тем же оценкам (см. лемму 6.3), что и функция  $u_{loc}$ .

Путем подстановки данного выражения в уравнение (6.3.3) и в первое уравнение системы (6.3.1) отображение  $T^{-1}$  приводится к перекрестной форме

$$\begin{aligned} \bar{w}^0 &= F(w^0, (\bar{u}^0, \bar{y}^0)), \\ (u^0, y^0) &= G(w^0, (\bar{u}^0, \bar{y}^0)). \end{aligned} \quad (6.3.6)$$

При помощи оценок, приведенных в лемме 6.3, можно убедиться, что функции  $F$  и  $G$  удовлетворяют условиям теоремы 4.4 (ослабленным условиям гладкости, приведенным после указанной теоремы; заметим, что в точке  $y^0 = 0$  функция  $u_{loc}$  не является гладкой). Непосредственно из этого следует существование  $C^{\min(q,r)}$ -гладкого многообразия  $w^0 = \phi^*(u^0, y^0, \mu)$ , инвариантного относительно преобразованного отображения  $T^{-1}$ . Функция  $\phi^*$  определена при всех значениях  $u^0, y^0, \mu$ . Поскольку при  $y^0 \geq 0$  в малой окрестности точки  $(u^+, 0, 0)$  преобразованное отображение совпадает с исходным отображением  $T^{-1}$ , пересечение указанного многообразия с этой областью является гладким инвариантным многообразием исходного отображения.

По построению (см. доказательство принципа кольца, приведенное в разделе 4.2), прямые итерации любой точки при помощи преобразованного отображения  $T^{-1}$  экспоненциально сходятся к «большому» инвариантному

многообразию, которое было определено. Следовательно, все точки, обратные итерации которых находятся на ограниченном расстоянии от данного многообразия, должны лежать в этом многообразии. Для исходного отображения Пуанкаре  $T$  это значит, что все траектории, прямые итерации которых лежат в малой окрестности точки  $(u^0, 0, 0)$ , должны принадлежать «малому» инвариантному многообразию.

Множество траекторий, начинающихся в точках указанного многообразия на сечении, является инвариантным многообразием для рассматриваемой системы дифференциальных уравнений (следует рассматривать участки траекторий, не выходящих за пределы малой окрестности  $U$  гомоклинической петли). По построению, данное многообразие содержит все траектории, не выходящие за пределы малой окрестности  $U$  при всех положительных значениях времени. В частности, оно содержит пересечение  $W_{loc}^s \cap U$ . Конечное инвариантное многообразие также должно включать точку  $O$ . Заметим, что гладкость указанного инвариантного многообразия следует из доказанной гладкости его пересечения с сечением  $S_{in}$  (повсюду, кроме положения равновесия  $O$ ). Гладкость в положении равновесия  $O$  следует проверять отдельно. В данной работе не приводится полное доказательство этого утверждения, поскольку в нем нет необходимости при дальнейшем изучении вопроса. Заметим лишь, что конечное инвариантное многообразие локально совпадает с одним из расширенных устойчивых многообразий  $W_{loc}^{sE}(O)$ , откуда следует гладкость в положении равновесия  $O$ .

#### 6.4. Теорема о центральном многообразии для гетероклинических циклов

Теорема о нелокальном центральном многообразии, доказанная для гомоклинической петли, допускает непосредственное обобщение на класс гетероклинических циклов. Положим, что семейство  $C^r$ -гладких динамических систем

$$\dot{x} = X(x, \mu), \quad (6.4.1)$$

гладко зависящее от некоторого вектора параметров  $\mu$ , имеет ряд положений равновесия  $O_1, \dots, O_k$  седлового типа, которые удовлетворяют условию (А), представленному в предыдущих разделах: для каждого седла ведущий положительный характеристический показатель является вещественным и простым. Пусть устойчивое многообразие каждого положе-

ния равновесия  $O_i$  является  $n$ -мерным, а неустойчивое многообразие —  $m$ -мерным. Положим, что при  $\mu = 0$  каждому значению  $i = 1, \dots, k$  соответствует траектория  $\Gamma_i$  пересечения  $W^u(O_i) \cap W^s(O_{i+1})$  (соответственно,  $W^u(O_k) \cap W^s(O_1)$  для  $i = k$ ).

Траектории  $\Gamma_i$  называются гетероклиническими в связи с тем, что  $\Gamma_i$  стремится к  $O_i$  при  $t \rightarrow -\infty$  (траектория лежит в многообразии  $W^u(O_i)$ ), но при  $t \rightarrow +\infty$  указанная траектория стремится к другому положению равновесия  $O_{i+1}$  (она лежит в многообразии  $W^s(O_{i+1})$ ). Объединение  $C = O_1 \cup \Gamma_1 \cup O_2 \cup \dots \cup O_k \cup \Gamma_k$  называется гетероклиническим циклом или гетероклиническим контуром. Заметим, что, в целом, для того, чтобы система имела цикл с  $k$ -гетероклиническими траекториями, необходимы  $k$ -независимых определяющих параметров  $\mu_1, \dots, \mu_k$ .

Наложим на траектории  $\Gamma_i$  условия общности (С) и (D), приведенные в предыдущих разделах, а именно:

*Положим, что ни одна гетероклиническая траектория  $\Gamma_i$  не лежит в неведущем неустойчивом подмногообразии  $W^{uu}(O_i)$ , а расширенное устойчивое многообразие  $W^{sE}(O_{i+1})$  трансверсально листам сильно неустойчивого слоения  $\mathcal{F}^u(O_i)$  многообразия  $W^u(O_i)$  в каждой точке гетероклинической траектории  $\Gamma_i$  (при каждом значении  $i = 1, \dots, k$ ).*

**Теорема 6.4.** *Существует малая окрестность  $U$  гетероклинического цикла  $C$  такая, что при всех достаточно малых значениях  $\mu$  система имеет  $(n+1)$ -мерное инвариантное  $C^q$ -гладкое<sup>1</sup> центральное устойчивое многообразие  $W^{sC}$  такое, что любая траектория, не лежащая в этом многообразии, покидает окрестность  $U$  при  $t \rightarrow +\infty$ . Многообразие  $W^{sC}$  касательно в точке  $O_i$  к расширенному устойчивому собственному пространству  $\mathcal{E}^{sE}(O_i)$ .*

Доказательство данной теоремы аналогично доказательству теоремы 6.1. В каждой траектории  $\Gamma_i$  вблизи  $O_{i+1}$  можно построить локальное сечение  $S_{in}^{(i)}$ . Тогда, рассмотрим отображение  $T_i: S_{in}^{(i)} \rightarrow S_{in}^{(i-1)}$  обратное отображению Пуанкаре (отображение  $T_i$  определяется обратными траекториями системы). Отображения  $T_i$  можно преобразовать точно также как в разделе

<sup>1</sup>Целочисленное  $q$  должно удовлетворять неравенствам  $q \leq r$  и  $q\gamma_1^{(i)} < \text{Re} \gamma_2^{(i)}$  при всех значениях  $O_i$ , где  $\gamma_1^{(i)}$  — ведущий положительный характеристический показатель точки  $O_i$ , а  $\gamma_2^{(i)}$  — следующий положительный показатель.

6.3, после чего они записываются в перекрестной форме

$$\begin{aligned}\bar{w}_{i-1} &= F_i(w_i, (\bar{u}_{i-1}, \bar{y}_{i-1}), \mu), \\ (u_i, y_i) &= G_i(w_i, (\bar{u}_{i-1}, \bar{y}_{i-1}), \mu),\end{aligned}\quad (6.4.2)$$

где переменные  $w$  принадлежат пространству  $R^{m-1}$ , переменные  $(u, y)$  — пространству  $R^n$ , а функции  $F_i, G_i$  удовлетворяют условиям теоремы 4.4. Можно проверить, что при введении обозначений  $x = (w_1, \dots, w_k)$  и  $y = ((u_1, y_1), \dots, (u_k, y_k); \mu)$  зависимости (6.4.2) (а также искусственное уравнение  $\mu = \bar{\mu}$ ) определяют перекрестное отображение

$$\begin{aligned}\bar{x} &= F(x, \bar{y}) \\ y &= G(x, \bar{y})\end{aligned}\quad (6.4.3)$$

удовлетворяющее условиям теоремы 4.4. Таким образом, существует гладкое инвариантное многообразие вида

$$(w_1, \dots, w_k) = \varphi^*((u_1, y_1), \dots, (u_k, y_k); \mu).$$

Необходимо дополнительное условие: в данном случае каждое значение  $w_i$  должно зависеть только от  $(u_i, y_i, \mu)$ . Графики  $\mathcal{L}_i^*$  этих зависимостей определяют инвариантное многообразие на расширенных сечениях  $S_{in}^{(i)}$ :

$$T_i \mathcal{L}_i^* = \mathcal{L}_{i-1}^*.$$

Чтобы доказать, что инвариантное многообразие отображения (6.4.3) имеет требуемую структуру, достаточно заметить, что инвариантное многообразие в теореме 4.4 получено как предел итераций произвольного липшицевого многообразия. Таким образом, если в качестве начального рассматривается, скажем, многообразие  $(w_1 = 0, \dots, w_k = 0)$ , которое действительно представляет собой совокупность независимых поверхностей на  $S_{in}^{(1)}, \dots, S_{in}^{(k)}$ , соответственно, то по смыслу задачи все итерации имеют одинаковую структуру. Следовательно, их предел также имеет ту же структуру.

Пересечение полученных поверхностей  $\mathcal{L}_i^*$  с исходными локальными участками сечений  $S_{in}^{(i)}$  определяет инвариантное многообразие для исходного отображения Пуанкаре. Таким образом, множество траекторий, начинающихся на любой их этих поверхностей, является искомым инвариантным многообразием самой системы.

Заметим, что обращение времени позволяет получить аналогичную теорему о *центральной неустойчивом многообразии* для случая, когда для каждого положения равновесия  $O_i$  ведущий *отрицательный* показатель является вещественным и простым, и теорему о двумерном *центральной* многообразии для случая, когда и положительный, и отрицательный ведущие показатели являются вещественными и простыми, что было сделано в разделе 6.1 для гомоклинической петли.

Среди множества возможных гетероклинических и гомоклинических структур рассматриваемые гетероклинические циклы представляют один из простейших случаев. Например, при некотором значении  $\mu$  одно положение равновесия седлового типа может иметь более одной гомоклинической петли (в двухпараметрическом семействе). Различают два основных случая:

- *восьмерка* — гомоклинические траектории  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  достигают седла  $O$  в различных направлениях, как показано на рис. 6.4.1,
- *гомоклиническая бабочка* — гомоклинические траектории  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  возвращаются к точке  $O$  в том же направлении (в направлении положительных значений  $y$ ), следовательно, они касаются друг друга в точке  $O$  (при  $t \rightarrow +\infty$ ), как показано на рис. 6.4.2.

Заметим, что оба случая соответствуют ситуации, когда условие (C) выполняется для обеих гомоклинических траекторий: они не принадлежат многообразию  $W^{uu}$  и, следовательно, покидают точку  $O$  в ведущем направлении, а именно: в направлении оси  $y$ .

Положим, что условие трансверсальности (D) выполняется для обеих гомоклинических траекторий (см. раздел 6.1). По аналогии с предыдущим разделом можно доказать следующий результат.

**Теорема 6.5.** *Существует малая окрестность  $U$  гомоклинической восьмерки такая, что при всех достаточно малых значениях  $\mu$  система имеет  $(n+1)$ -мерное инвариантное  $C^q$ -гладкое центральное устойчивое многообразие  $W^{sC}$  такое, что любая траектория, не лежащая в этом многообразии, покидает окрестность  $U$  при  $t \rightarrow +\infty$ . Многообразие  $W^{sC}$  касается в точке  $O$  расширенного устойчивого собственного пространства  $\mathcal{E}^{sE}$ .*

Вместе с тем, очевидно, что вблизи гомоклинической бабочки не может существовать  $(n+1)$ -мерного гладкого инвариантного многообразия, касающегося в точке  $O$  собственного пространства  $\mathcal{E}^{sE}$ . Действительно, пересечение такого многообразия с многообразием  $W^u(O)$  является одномерным и

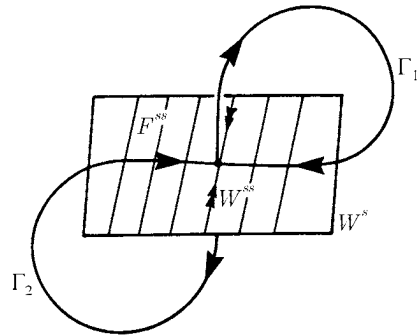


Рис. 6.4.1. Гомоклиническая восьмерка, для которой выполняются условия несовпадения: сепаратриса  $\Gamma_1$  пересекает только те сильно устойчивые листы, которые не пересекает сепаратриса  $\Gamma_2$

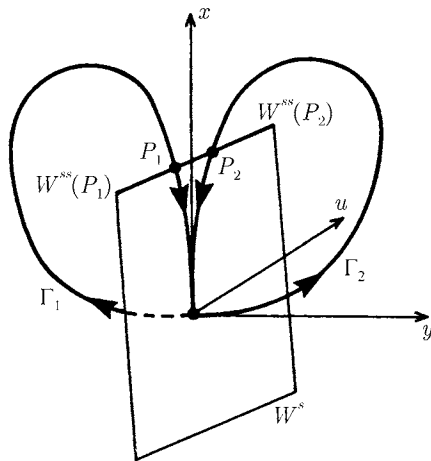


Рис. 6.4.2. Гомоклиническая бабочка, состоящая из двух петель  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ , не удовлетворяющих условиям несовпадения: сильно устойчивый лист произвольной точки  $P_1 \in \Gamma_1$ , лежащей вблизи положения равновесия, совпадает с сильно устойчивым листом некоторой точки  $P_2 \in \Gamma_2$

должно включать обе гомоклинические траектории  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ . Следовательно, гладкая система на инвариантном многообразии имеет седловое положение равновесия с негладким неустойчивым многообразием (оно должно являться одномерным и содержать две траектории, касающиеся друг к друга в точке  $O$ ), что невозможно для грубых седел.

Следовательно, условия трансверсальности (D), играющее решающую роль при доказательстве теоремы о нелокальном центральном многообразии, не всегда является достаточным. Тем не менее, для теоремы о нелокальном центральном многообразии вблизи произвольного сложного гомоклинического или гетероклинического цикла существует ряд довольно простых и достаточных условий.

Пусть  $C$  — объединение конечного числа положений равновесия  $O_1, O_2, \dots$ , периодических траекторий  $L_1, L_2, \dots$  и гомо/гетероклинических траекторий  $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots$ : каждая траектория  $\Gamma_s$  стремится к некоторым траекториям  $O_i$  или  $L_i$  при  $t \rightarrow +\infty$  либо при  $t \rightarrow -\infty$  (таким образом, траектория  $\Gamma_s$  лежит на пересечении устойчивого и неустойчивого многообразий соответствующих траекторий). В случае негрубого положения равновесия или периодической траектории следует рассматривать центральное устойчивое либо центральное неустойчивое многообразия). Каждое такое множество  $C$  называется гетероклиническим циклом.

Положим, что выполняется следующее трихотомическое условие. Существуют такие неотрицательные целые числа  $k \geq 1, m, n$  ( $k + m + n = \text{размерность фазового пространства}$ ), что для каждого положения равновесия или периодической траектории в гетероклиническом цикле при некоторых положительных значениях  $\beta_i^u$  и  $\beta_i^s$  в полоске

$$-\beta_i^s < \text{Re } \lambda < \beta_i^u$$

лежат ровно  $k$  характеристических показателей  $\lambda$  (полоска представляет собой центральную часть спектра);  $n$  характеристических показателей лежат справа от этой полоски:

$$\text{Re } \lambda > \beta_i^u,$$

а  $m$  характеристических показателей — слева от нее:

$$\text{Re } \lambda < -\beta_i^s.$$

Условно, это можно записать

$$\operatorname{Re} \Lambda^{ss} < -\beta_i^s < \operatorname{Re} \Lambda^c < \beta_i^u < \operatorname{Re} \Lambda^{uu}.$$

Для большей точности мы учитываем интервал между центральной частью и сильно устойчивой и сильно неустойчивой частями:

$$\operatorname{Re} \Lambda^{ss} < -\beta_i^{ss} < -\beta_i^s < \operatorname{Re} \Lambda^c < \beta_i^u < \beta_i^{uu} < \operatorname{Re} \Lambda^{uu}, \quad (6.4.4)$$

где  $\beta_i^{uu} > \beta_i^u > 0$ ,  $\beta_i^{ss} > \beta_i^s > 0$ .

Разделяющая величина  $\beta_i$  различна для разных положений равновесия и периодических траекторий в цикле. Важное условие состоит в том, чтобы значения  $k$ ,  $m$ ,  $n$  характеристических показателей принадлежали каждой указанной части спектра и не зависели от отдельной траектории. Заметим, что числа  $k$ ,  $m$ ,  $n$  определяются системой неоднозначно. Например, если цикл содержит только одну рекуррентную траекторию, т. е. периодическую траекторию  $L$  седлового типа, в принципе, можно рассматривать все характеристические показатели указанной траектории как критические (в данном случае  $m = n = 0$ , а величина  $k$  равна размерности фазового пространства), либо можно рассматривать все характеристические показатели с отрицательными действительными частями как сильно устойчивые, характеристические показатели с положительными действительными частями как сильно неустойчивые, и лишь тривиальный характеристический показатель, равный нулю, в данном случае является критическим (то есть  $k = 1$ ); допустимы также другие варианты, соответствующие промежуточным значениям  $k$ .

При изучении конкретных многомерных глобальных задач о бифуркациях такое разделение спектра характеристических показателей всегда выполняется неявно. Как правило, ведущие характеристические показатели рассматриваются как критические, а неведущие — как сильно устойчивые и (или) сильно неустойчивые.

Ограничим выбор трихотомического разложения, наладывая дополнительное условие. Положим, что для каждой гомо/гетероклинической траектории  $\Gamma_s$  в цикле  $C$  выполняется пара условий *трансверсальности*.

Эти условия аналогичны условиям (D) и (D'), представленным в разделе 6.1. В соответствии с теоремами 5.16, 5.17 и 5.20 траектория  $\Gamma_s$ , стремящаяся к положению равновесия  $O_i$  или к периодической траектории  $L_i$  при  $t \rightarrow +\infty$ , лежит в  $(m+k)$ -мерном расширенном устойчивом многообразии  $W^{sE}$  точки  $O_i$  либо траектории  $L_i$ ; через каждую точку траектории  $\Gamma_s$

проходит единственный  $m$ -мерный лист сильно устойчивого слоения  $\mathcal{F}^{ss}$ ; касательная к многообразию  $W^{sE}$  в каждой точке траектории  $\Gamma_s$  также однозначна. Аналогично, траектория  $\Gamma_s$  в гомоклиническом цикле стремится к некоторому положению равновесия  $O_j$  либо к периодической траектории  $L_j$  при  $t \rightarrow -\infty$ , следовательно, траектория  $\Gamma_s$  лежит в  $(n+k)$ -мерном расширенном неустойчивом многообразии  $W^{uE}$  точки  $O_j$  или траектории  $L_j$  (касательная к многообразию  $W^{uE}$  однозначна в каждой точке траектории  $\Gamma_s$ ); через каждую точку траектории  $\Gamma_s$  проходит однозначный  $n$ -мерный лист сильно неустойчивого слоения  $\mathcal{F}^{uu}$ . Многообразие  $W^{sE}$  касательно в точке  $O_i$  или  $L_i$  к расширенному устойчивому инвариантному подпространству  $\mathcal{E}^{sE}$  линеаризованной системы, соответствующему критическим и сильно устойчивым частям спектра характеристических показателей. Многообразие  $W^{uE}$  касательно в точке  $O_j$  или  $L_j$  к расширенному неустойчивому инвариантному подпространству  $\mathcal{E}^{uE}$ , соответствующему критическим и сильно неустойчивым частям спектра. Слоение  $\mathcal{F}^{ss}$  включает сильно устойчивое многообразие, касательное в точке  $O_i$  или  $L_i$  к сильно устойчивому инвариантному подпространству  $\mathcal{E}^{ss}$ , а слоение  $\mathcal{F}^{uu}$  включает сильно неустойчивое многообразие, касательное в точке  $O_j$  или  $L_j$  к сильно неустойчивому инвариантному подпространству  $\mathcal{E}^{uu}$ .

Выполняются следующие условия трансверсальности:

*В каждой точке траектории  $\Gamma_s \subset C$  расширенное неустойчивое многообразие трансверсально листу сильно устойчивого слоения, а расширенное устойчивое многообразие трансверсально листу сильно неустойчивого слоения.*

Следует учесть, что вследствие инвариантности подпространств относительно линеаризованной системы, условия трансверсальности следует проверить в одной точке на каждой траектории  $\Gamma_s$ .

Различные варианты разделения спектра характеристических показателей соответствуют различным многообразиям и слоениям, имеющим место в приведенных выше условиях трансверсальности. Для некоторых вариантов условия трансверсальности могут выполняться, а для некоторых — нет. Таким образом, эти условия позволяют сделать дополнительный выбор из ряда различных возможных трихотомических вариантов разделения.

**Теорема 6.6.** Пусть  $Q$  и  $P$  — наибольшие целые числа такие, что для любого положения равновесия или периодической траектории в цикле



$\beta_i^{uu} > q\beta_i^u$ ,  $\beta_i^{ss} > p\beta_i^s$  (величины  $\beta$  являются разделительными постоянными, входящими в формулу (6.4.4)).

Пусть  $\mathbb{C}^r$ -гладкая ( $r \geq 1$ ) система имеет гетероклинический цикл  $C$ , а условия трихотомичности и трансверсальности выполняются. Тогда, в малой окрестности  $U$  цикла  $C$  система имеет гладкое  $k$ -мерное инвариантное многообразие  $\mathcal{W}^C$ , содержащее цикл  $C$  и касающееся в каждом положении равновесия и периодической траектории цикла  $C$  критического подпространства  $\mathcal{E} = \mathcal{E}^{sE} \cap \mathcal{E}^{ue}$ , тогда и только тогда, когда лист локального сильно устойчивого и сильно неустойчивого слоений пересекает цикл  $C$  не более, чем в одной точке. При выполнении этого условия многообразие  $\mathcal{W}^C$  существует для любой системы,  $\mathbb{C}^r$ -близкой к исходной, и непрерывно изменяется при изменении системы.

Многообразие  $\mathcal{W}^C$  является  $\mathbb{C}^{\min(p,q,r)}$ -гладким. Оно представляет собой пересечение  $(m+k)$ -мерного инвариантного  $\mathbb{C}^{\min(q,r)}$ -гладкого многообразия  $\mathcal{W}^{sC}$  с  $(n+k)$ -мерным инвариантным  $\mathbb{C}^{\min(p,r)}$ -гладким многообразием  $\mathcal{W}^{uC}$ , которые касательны, соответственно, к расширенному устойчивому и расширенному неустойчивому инвариантным подпространствам  $\mathcal{E}^{sE}$  и  $\mathcal{E}^{uE}$  в каждом положении равновесия и периодической траектории в гетероклиническом цикле  $C$ . Все траектории, не выходящие за пределы окрестности  $U$  при всех положительных значениях времени, принадлежат многообразию  $\mathcal{W}^{sC}$ , а все траектории, не выходящие за пределы окрестности  $U$  при всех отрицательных значениях времени, принадлежат многообразию  $\mathcal{W}^{uC}$ ; следовательно, все траектории, лежащие в окрестности  $U$ , полностью принадлежат инвариантному многообразию  $\mathcal{W}^C$ .

В данной работе не приводится доказательство этой теоремы. Ее частными случаями являются представленные выше теоремы о нелокальном центральном многообразии. Например, при рассмотрении одной гомоклинической петли сильно неустойчивое многообразие является отдельным листом сильно неустойчивого слоения. Если гомоклиническая траектория лежит в этом листе, она пересекает лист, формально говоря, в континууме точек, что препятствует существованию рассматриваемого гладкого инвариантного многообразия. Таким образом, для того, чтобы были верны теоремы, представленные в разделе 6.1, необходимо выполнение условий (C) и (C').

При рассмотрении пары гомоклинических петель в координатах, используемых в разделе 6.2, листы сильно неустойчивого слоения являются

поверхностями вида:

$$(u, y) = \psi(w).$$

Слоение можно распрямить таким образом, чтобы листы представляли собой пересечения поверхностей  $\{y = \text{const}\}$  с неустойчивым многообразием. В случае гомоклинической восьмерки каждый лист, соответствующий величине  $y > 0$ , пересекают гомоклиническую траекторию  $\Gamma_1$  в одной точке; листы, соответствующие величине  $y < 0$ , также пересекают гомоклиническую траекторию  $\Gamma_2$  в одной точке. Сильно неустойчивое многообразие — лист, соответствующий величине  $y = 0$  — пересекает гомоклинический цикл  $C = O \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2$  в точке  $O$ . Таким образом, теорема 6.5 о существовании нелокального центрального многообразия вблизи гомоклинической восьмерки не противоречит общему результату теоремы 6.6.

Напротив, в случае гомоклинической бабочки каждый лист, соответствующий положительному значению  $y$  пересекает обе гомоклинические траектории. Таким образом, предыдущее заключение об отсутствии гладкого инвариантного многообразия формально согласуется с последней теоремой.

## ПРИЛОЖЕНИЕ А

### Специальные формы систем вблизи положения равновесия седлового типа

При изучении бифуркаций гомоклинических петель и гетероклинических циклов, состоящих из седел и соединяющих их траекторий, возникает задача получения приемлемой асимптотики для решений системы вблизи положения равновесия седлового типа. Очевидно, что чем проще форма системы вблизи положения равновесия, тем легче поддается изучению ее поведение. Возможность приведения системы вблизи седла к удобной форме, приемлемой для решения многих задач о бифуркациях, устанавливается теоремой 2.17, приведенной в разделе 2.9. Полное доказательство этой теоремы представлено в данном приложении.

Рассмотрим семейство  $X(\mu)$  динамических систем, зависящих от некоторого параметра  $\mu$ . Положим, что семейство  $X(\mu)$  является  $\mathbb{C}^r$ -гладким ( $r \geq 2$ ) относительно всех переменных и параметров. Семейство  $X(\mu)$  можно представить в виде (см. главу 2)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_1(\mu)x + f_1(x, y, u, v, \mu), \\ \dot{u} &= A_2(\mu)u + f_2(x, y, u, v, \mu), \\ \dot{y} &= B_1(\mu)y + g_1(x, y, u, v, \mu), \\ \dot{v} &= B_2(\mu)v + g_2(x, y, u, v, \mu), \end{aligned} \tag{A.1}$$

где собственные значения блочно-диагональной матрицы

$$A(0) \equiv \begin{pmatrix} A_1(0) & 0 \\ 0 & A_2(0) \end{pmatrix}$$

лежат в комплексной плоскости слева от мнимой оси, а собственные значения блочно-диагональной матрицы

$$B(0) \equiv \begin{pmatrix} B_1(0) & 0 \\ 0 & B_2(0) \end{pmatrix}$$

лежат справа от мнимой оси.

Положим также, что собственные значения  $(\lambda_1, \dots, \lambda_{m_1})$  матрицы  $A_1(0)$  имеют те же действительные части:

$$\operatorname{Re}\lambda_1 = \dots = \operatorname{Re}\lambda_{m_1} = \lambda, \quad \lambda < 0,$$

а действительные части собственных значений  $(\gamma_1, \dots, \gamma_{n_1})$  матрицы  $B_1(0)$  равны между собой, то есть

$$\operatorname{Re}\gamma_1 = \dots = \operatorname{Re}\gamma_{n_1} = \gamma, \quad \gamma > 0.$$

Положим, что действительные части собственных значений матрицы  $A_2(0)$  строго меньше  $\lambda$ , а собственные значения матрицы  $B_2(0)$  строго меньше  $\gamma$ . В данном случае  $x$  и  $u$  представляют собой ведущую устойчивую и неустойчивую координаты, соответственно, а  $y$  и  $v$  — неведущие координаты.

**Теорема А.1.** *Существует локальное преобразование координат класса  $\mathbb{C}^{r-1}$  относительно  $(x, u, y, v)$  (а первая производная преобразования по  $(x, u, y, v)$  является  $\mathbb{C}^{r-2}$ -гладкой относительно  $(x, u, y, v, \mu)$ ),<sup>1</sup> приводящее систему (А.1) к виду*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_1(\mu)x + f_{11}(x, u, y, v, \mu)x + f_{12}(x, u, y, v, \mu)u, \\ \dot{u} &= A_2(\mu)u + f_{21}(x, u, y, v, \mu)x + f_{22}(x, u, y, v, \mu)u, \\ \dot{y} &= B_1(\mu)y + g_{11}(x, u, y, v, \mu)y + g_{12}(x, u, y, v, \mu)v, \\ \dot{v} &= B_2(\mu)v + g_{21}(x, u, y, v, \mu)y + g_{22}(x, u, y, v, \mu)v, \end{aligned} \tag{A.2}$$

где функции  $f_{ij}, g_{ij}$  являются  $\mathbb{C}^{r-1}$ -гладкими относительно  $(x, u, y, v)$ , а их первые производные по  $(x, u, y, v)$  являются  $\mathbb{C}^{r-2}$ -гладкими относительно  $(x, u, y, v, \mu)$ ;

$$\begin{aligned} f_{ij}(0, 0, 0, 0, \mu) &= 0, & g_{ij}(0, 0, 0, 0, \mu) &= 0, \\ f_{1i}(x, u, 0, 0, \mu) &\equiv 0, & g_{1i}(0, 0, y, v, \mu) &\equiv 0, \\ f_{j1}(0, 0, y, v, \mu) &\equiv 0, & g_{j1}(x, u, 0, 0, \mu) &\equiv 0 \quad (i, j = 1, 2). \end{aligned} \tag{A.3}$$

<sup>1</sup>При  $r = \infty$  преобразование является  $\mathbb{C}^\infty$ -гладким относительно  $(x, u, y, v)$ , но имеет лишь конечную гладкость относительно  $\mu$ .

Доказательство. Систему (А.1) можно привести к виду (А.2) при помощи замены переменных, позволяющей выпрямить инвариантное многообразие седловой точки. Такое преобразование имеет вид (см. раздел 2.7)

$$\begin{aligned}\tilde{x} &= x - \varphi_{1s}(y, v, \mu), \\ \tilde{u} &= u - \varphi_{2s}(y, v, \mu), \\ \tilde{y} &= y - \psi_{1u}(x, u, \mu), \\ \tilde{v} &= v - \psi_{2u}(x, u, \mu),\end{aligned}\tag{A.4}$$

где  $\{x = \varphi_{1s}(y, v, \mu), u = \varphi_{2s}(y, v, \mu)\}$ , а  $\{y = \psi_{1u}(x, u, \mu), v = \psi_{2u}(x, u, \mu)\}$  представляют собой, соответственно, уравнения устойчивого и неустойчивого многообразий неподвижной точки седлового типа. При помощи этого преобразования нельзя получить тождества (А.3); теперь функции  $f_{ij}$  и  $g_{ij}$  в формуле (А.2) являются  $\mathbb{C}^{r-1}$ -гладкими и обращаются в нуль в начале координат.

Систему (А.2) можно также представить в виде

$$\begin{aligned}\dot{x} &= A_1(\mu)x + \underline{R_1(x, u, \mu)} + \underline{\varphi_1(y, v, \mu)x} + \varphi_2(y, v, \mu)u + \dots, \\ \dot{u} &= A_2(\mu)u + R_2(x, u, \mu) + \underline{\varphi_3(y, v, \mu)x} + \varphi_4(y, v, \mu)u + \dots, \\ \dot{y} &= B_1(\mu)y + \underline{P_1(y, v, \mu)} + \underline{\psi_1(x, u, \mu)y} + \psi_2(x, u, \mu)v + \dots, \\ \dot{v} &= B_2(\mu)v + P_2(y, v, \mu) + \underline{\psi_3(x, u, \mu)y} + \psi_4(x, u, \mu)v + \dots,\end{aligned}\tag{A.5}$$

где

$$\begin{aligned}R_i &= f_{i1}(x, u, 0, 0, \mu)x + f_{i2}(x, u, 0, 0, \mu)u, \\ P_i &= g_{i1}(0, 0, y, v, \mu)y + g_{i2}(0, 0, y, v, \mu)v, \\ \varphi_1 &= f_{11}(0, 0, y, v, \mu), & \varphi_2 &= f_{12}(0, 0, y, v, \mu), \\ \varphi_3 &= f_{21}(0, 0, y, v, \mu), & \varphi_4 &= f_{22}(0, 0, y, v, \mu), \\ \psi_1 &= g_{11}(x, u, 0, 0, \mu), & \psi_2 &= g_{12}(x, u, 0, 0, \mu), \\ \psi_3 &= g_{21}(x, u, 0, 0, \mu), & \psi_4 &= g_{22}(x, u, 0, 0, \mu),\end{aligned}$$

а

$$\begin{aligned}R_i(x, u, \mu) &= \tilde{R}_{i1}(x, u, \mu)x + \tilde{R}_{i2}(x, u, \mu)u, \\ P_i(y, v, \mu) &= \tilde{P}_{i1}(y, v, \mu)y + \tilde{P}_{i2}(y, v, \mu)v, \\ \tilde{R}_{ij}(0, 0, \mu) &\equiv 0, & \tilde{P}_{ij}(0, 0, \mu) &\equiv 0, \\ \varphi_j(0, 0, \mu) &\equiv 0, & \psi_j(0, 0, \mu) &\equiv 0.\end{aligned}$$

Через многоточия обозначены члены, которые в дальнейшем будем называть *пренебрежимо малыми*: в первых двух уравнениях это члены вида  $\tilde{f}(x, u, y, v, \mu)x$  и  $\tilde{f}(x, u, y, v, \mu)u$  такие, что

$$\tilde{f}(0, 0, y, v, \mu) \equiv 0 \quad \text{и} \quad \tilde{f}(x, u, 0, 0, \mu) \equiv 0,$$

в последних двух уравнениях это члены вида  $\tilde{g}(x, u, y, v, \mu)y$  и  $\tilde{g}(x, u, y, v, \mu)v$  такие, что

$$\tilde{g}(0, 0, y, v, \mu) \equiv 0 \quad \text{и} \quad \tilde{g}(x, u, 0, 0, \mu) \equiv 0.$$

Очевидно, что доказательство теоремы сводится к исключению из выражений (А.5) указанных членов. Для этого необходимо выполнить ряд последовательных замен переменных

$$(1) \quad \begin{aligned}\xi_1 &= x + h_1(y, v, \mu)x, & \xi_2 &= u + h_2(y, v, \mu)x, \\ \eta_1 &= y, & \eta_2 &= v,\end{aligned}$$

где  $h_i(0, 0, \mu) = 0$ ;

$$(2) \quad \begin{aligned}\xi_1 &= x, & \xi_2 &= u, \\ \eta_1 &= y + s_1(x, u, \mu)y, & \eta_2 &= v + s_2(x, u, \mu)y,\end{aligned}$$

где  $s_i(0, 0, \mu) = 0$ ;

$$(3) \quad \begin{aligned}\xi_1 &= x + r_1(x, u, \mu)x + r_2(x, u, \mu)u, & \xi_2 &= u, \\ \eta_1 &= y, & \eta_2 &= v,\end{aligned}$$

где  $r_1(0, 0, \mu) = 0$ ,  $r_2(0, 0, \mu) = 0$ ;

(4)

$$\begin{aligned}\xi_1 &= x, & \xi_2 &= u, \\ \eta_1 &= y + p_1(y, v, \mu)y + p_2(y, v, \mu)v, & \eta_2 &= v,\end{aligned}$$

где  $p_1(0, 0, \mu) = 0$ ,  $p_2(0, 0, \mu) = 0$ .

Замена переменных (1) позволяет исключить из системы (A.5) члены  $\varphi_1$  и  $\varphi_3$ . Путем замены переменных (2) исключаем члены  $\psi_1$  и  $\psi_3$ . При помощи замены переменных (3) исключаем члены  $R_1$ . И наконец, путем замены переменных (4) исключаем члены  $P_1$ , тем самым приводя систему к требуемой форме.

*Шаг 1.* Выполним замену переменных (1). Первое уравнение системы (A.5) записывается в виде

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_1 &= \dot{x} + \frac{\partial h_1}{\partial y} \dot{y}x + \frac{\partial h_1}{\partial v} \dot{v}x + h_1(y, v, \mu) \dot{x} = \\ &= A_1(\mu)x + R_1(x, u, \mu) + \varphi_1(y, v, \mu)x + \varphi_2(y, v, \mu)u + \\ &+ \frac{\partial h_1}{\partial y} \left( B_1(\mu)y + P_1(y, v, \mu) + \underline{\psi_1(x, u, \mu)y} + \underline{\psi_2(x, u, \mu)v} \right) x + \\ &+ \frac{\partial h_1}{\partial v} \left( B_2(\mu)v + P_2(y, v, \mu) + \underline{\psi_3(x, u, \mu)y} + \underline{\psi_4(x, u, \mu)v} \right) x + \\ &+ h_1(y, v, \mu) \left( A_1(\mu)x + \underline{R_1(x, u, \mu)} + \varphi_1(y, v, \mu)x + \varphi_2(y, v, \mu)u \right) + \dots\end{aligned}\tag{A.6}$$

Следует учесть, что подчеркнутые слагаемые

$$\begin{aligned}\frac{\partial h_1}{\partial y} \psi_1(x, u, \mu)yx, & \quad \frac{\partial h_1}{\partial y} \psi_2(x, u, \mu)vx, & \quad \frac{\partial h_1}{\partial v} \psi_3(x, u, \mu)yx, \\ \frac{\partial h_1}{\partial v} \psi_4(x, u, \mu)vx, & \quad h_1(y, v, \mu)R_1(x, u, \mu)\end{aligned}$$

пренебрежимо малы (то есть их можно записать как  $\tilde{f}_1(x, u, y, v, \mu)x + \tilde{f}_2(x, u, y, v, \mu)u$ , где  $\tilde{f}_i(0, 0, y, v, \mu) \equiv 0$ , а  $\tilde{f}_i(x, u, 0, 0, \mu) \equiv 0$ ). Заметим, что

$$R_1(x, u, \mu) = R(\xi_1, \xi_2, \mu) + \dots$$

где через многоточия, как и прежде, обозначены пренебрежимо малые чле-

ны. Поскольку

$$\begin{aligned}x &= \xi_1 - h_1(y, v, \mu)x, \\ u &= \xi_2 - h_2(y, v, \mu),\end{aligned}\tag{A.7}$$

получаем выражение

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_1 &= A_1(\mu)\xi_1 + R_1(\xi_1, \xi_2, \mu) + \varphi_2(\eta_1, \eta_2, \mu)\xi_2 + \\ &+ \left[ -A_1(\mu)h_1(y, v, \mu) + \varphi_1(y, v, \mu) - \varphi_2(y, v, \mu)h_2(y, v, \mu) + \right. \\ &+ \frac{\partial h_1}{\partial y} (B_1(\mu)y + P_1(y, v, \mu)) + \frac{\partial h_1}{\partial v} (B_2(\mu)v + P_2(y, v, \mu)) + \\ &+ h_1(y, v, \mu)A_1(\mu) + h_1(y, v, \mu)\varphi_1(y, v, \mu) - \\ &\left. - h_1(y, v, \mu)\varphi_2(y, v, \mu)h_2(y, v, \mu) \right] x + h_1(\eta_1, \eta_2, \mu)\varphi_2(\eta_1, \eta_2, \mu)\xi_2 + \dots\end{aligned}\tag{A.8}$$

Аналогично, для второго уравнения системы (А.5) получаем

$$\begin{aligned}
\dot{\xi}_2 &= \dot{u} + \frac{\partial h_2}{\partial y} \dot{y}x + \frac{\partial h_2}{\partial v} \dot{v}x + h_2(y, v, \mu) \dot{x} \\
&= A_2(\mu)u + R_2(x, u, \mu) + \varphi_3(y, v, \mu)x + \varphi_4(y, v, \mu)u \\
&\quad + \frac{\partial h_2}{\partial y} \left( B_1y + P_1(y, v, \mu) \right) x + \frac{\partial h_2}{\partial v} \left( B_2v + P_2(y, v, \mu) \right) x \\
&\quad + h_2(y, v, \mu) \left( A_1(\mu)x + \varphi_1(y, v, \mu)x + \varphi_2(y, v, \mu)u \right) + \dots \\
&= A_2\xi_2 + R_2(\xi_1, \xi_2, \mu) + \varphi_4(\eta_1, \eta_2, \mu)\xi_2 \\
&\quad + \left[ -A_2(\mu)h_2(y, v, \mu) + \varphi_3(y, v, \mu) - \varphi_4(y, v, \mu)h_2 \right. \\
&\quad + \frac{\partial h_2}{\partial y} \left( B_1(\mu)y + P_1(y, v, \mu) \right) + \frac{\partial h_2}{\partial v} \left( B_2(\mu)v + P_2(y, v, \mu) \right) \\
&\quad + h_2(y, v, \mu)A_1(\mu) + h_2(y, v, \mu)\varphi_1(y, v, \mu) \\
&\quad \left. - h_2(y, v, \mu)\varphi_2(y, v, \mu)h_2(y, v, \mu) \right] x \\
&\quad + h_2(\eta_1, \eta_2, \mu)\varphi_2(\eta_1, \eta_2, \mu)\xi_2 + \dots
\end{aligned} \tag{A.9}$$

Вид третьего и четвертого уравнений при такой замене координат не изменяется.

Положим, что функции  $h_1(y, v, \mu)$  и  $h_2(y, v, \mu)$  удовлетворяют следующим условиям:

$$\begin{aligned}
&A_1h_1 - h_1A_1 - \varphi_1 + \varphi_2h_2 - h_1\varphi_1 + h_1\varphi_2h_2 \\
&= \frac{\partial h_1}{\partial y} (B_1y + P_1) + \frac{\partial h_1}{\partial v} (B_2v + P_2), \\
&A_2h_2 - h_2A_2 - \varphi_3 + \varphi_4h_2 - h_2\varphi_1 + h_2\varphi_2h_2 \\
&= \frac{\partial h_2}{\partial y} (B_1y + P_1) + \frac{\partial h_2}{\partial v} (B_2v + P_2).
\end{aligned} \tag{A.10}$$

Следовательно, выражения в квадратных скобках, входящие в формулы (А.8) и (А.9), обращаются в нуль. Рассмотрим теперь следующую систему матричных уравнений:

$$\begin{aligned}
\dot{X} &= A_1X - XA_1 - \varphi_1 + \varphi_2U - X\varphi_1 + X\varphi_2U, \\
\dot{U} &= A_2U - UA_1 - \varphi_3 + \varphi_4U - U\varphi_1 + U\varphi_2U, \\
\dot{y} &= B_1y + P_1, \\
\dot{v} &= B_2v + P_2.
\end{aligned} \tag{A.11}$$

Здесь матрицы  $X \in \mathbb{R}^{m_1 \times m_1}$ , а  $U \in \mathbb{R}^{m_2 \times m_1}$ , где  $m_2$  — размерность вектора  $u$ . Система (А.11) имеет положение равновесия  $O_1(0, 0, 0, 0)$ . Линеаризованная система записывается в виде

$$\begin{aligned}
\dot{X} &= A_1X - XA_1 - \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}(0, 0, \mu)y - \frac{\partial \varphi_1}{\partial v}(0, 0, \mu)v, \\
\dot{U} &= A_2U - UA_1 - \frac{\partial \varphi_3}{\partial y}(0, 0, \mu)y - \frac{\partial \varphi_3}{\partial v}(0, 0, \mu)v, \\
\dot{y} &= B_1y, \\
\dot{v} &= B_2v.
\end{aligned}$$

Спектр характеристических показателей этой системы можно представить как объединение спектров следующих связанных линейных операторов:

$$\begin{aligned}
X &\mapsto A_1X - XA_1, \\
U &\mapsto A_2U - UA_1, \\
y &\mapsto B_1y, \\
v &\mapsto B_2v.
\end{aligned}$$

Напомним хорошо известный факт из теории матриц (см. работу [39]): для квадратных матриц  $A$  и  $B$  спектр оператора  $Z \mapsto AZ - ZB$  (где  $Z$  — прямоугольная матрица) принадлежит множеству чисел, состоящему из всевозможных разностей между собственными числами матриц  $A$  и  $B$ .

Тогда, поскольку собственные значения матрицы  $A_2$  лежат слева от собственных значений матрицы  $A_1$ , а последние лежат на прямой  $\text{Re} \cdot = \lambda$ ,

при  $\mu = 0$   $m_1^2$  характеристических показателей положения равновесия системы (А.11) лежат на мнимой оси,  $m_1 \cdot m_2$  характеристических показателей — в открытой левой полуплоскости, а  $n_1 + n_2 = n$  показателей — в открытой правой полуплоскости. Следовательно, положение равновесия системы (А.11) имеет инвариантное  $n$ -мерное сильно неустойчивое многообразие  $\widetilde{W}_1^{uu}$ , определяемое уравнением  $\{X = h_1(y, v, \mu), U = h_2(y, v, \mu)\}$ . Более того, функции  $h_1(y, v, 0)$  и  $h_2(y, v, 0)$  удовлетворяют условиям (А.10), поскольку они представляют собой нечто иное, как условие инвариантности многообразия  $\{X = h_1, U = h_2\}$  относительно (А.11).

Гладкость функций  $h_1$  и  $h_2$  относительно  $(y, v)$  совпадает с гладкостью системы (А.11). Она равна  $\mathbb{C}^{r-1}$ , так как по построению функции  $\varphi_i$  и  $\psi_i$  являются  $\mathbb{C}^{r-1}$ -гладкими. Гладкость относительно  $\mu$  на единицу меньше, более того, она является лишь конечной, даже если  $r = \infty$  (см. раздел 5.4).

Таким образом, гладкие функций  $h_1, h_2$  удовлетворяющие условиям (А.10), существуют согласно теореме о сильно неустойчивом многообразии. После замены переменных (1) система принимает вид (А.5), где  $\varphi_1 \equiv 0$ , а  $\varphi_3 \equiv 0$ .

*Шаг 2.* Выполняя преобразования (2), получаем систему

$$\begin{aligned}
\dot{\xi}_1 &= A_1(\mu)\xi_1 + R_1(\xi_1, \xi_2, \mu) + \varphi_2(\eta_1, \eta_2, \mu)\xi_2 + \dots, \\
\dot{\xi}_2 &= A_2(\mu)\xi_2 + R_2(\xi_1, \xi_2, \mu) + \varphi_4(\eta_1, \eta_2, \mu)\xi_2 + \dots, \\
\dot{\eta}_1 &= \dot{y} + \frac{\partial s_1}{\partial x}\dot{x}y + \frac{\partial s_1}{\partial u}\dot{u}y + s_1(x, u, \mu)\dot{y} \\
&= B_1(\mu)y + P_1(y, v, \mu) + \psi_1(x, u, \mu)y + \psi_2(x, u, \mu)v \\
&\quad + \frac{\partial s_1}{\partial x}(A_1(\mu)x + R_1(x, u, \mu))y + \frac{\partial s_1}{\partial u}(A_2(\mu)u + R_2(x, u, \mu))y \\
&\quad + s_1(x, u, \mu)(B_1(\mu)y + \psi_1(x, u, \mu)y + \psi_2(x, u, \mu)v) + \dots \\
&= B_1(\mu)\eta_1 + P_1(\eta_1, \eta_2, \mu) + \psi_2(\xi_1, \xi_2, \mu)\eta_2 \\
&\quad + \left[ -B_1(\mu)s_1(x, u, \mu) + \psi_1(x, u, \mu) \right. \\
&\quad \left. - \psi_2(x, u, \mu)s_2(x, u, \mu) + \frac{\partial s_1}{\partial x}(A_1(\mu)x + R_1(x, u, \mu)) \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial s_1}{\partial u}(A_2(\mu)u + R_2(x, u, \mu)) + s_1(x, u, \mu)B_1(\mu) \right. \\
&\quad \left. + s_1(x, u, \mu)\psi_1(x, u, \mu) - s_1(x, u, \mu)\psi_2(x, u, \mu)s_2(x, u, \mu) \right]y \\
&\quad + s_1(\xi_1, \xi_2, \mu)\psi_2(\xi_1, \xi_2, \mu)\eta_2 + \dots, \\
\dot{\eta}_2 &= \dot{v} + \frac{\partial s_2}{\partial x}\dot{x}y + \frac{\partial s_2}{\partial u}\dot{u}y + s_2(x, u, \mu)\dot{y} \\
&= B_2(\mu)v + P_2(y, v, \mu) + \psi_3(x, u, \mu)y + \psi_4(x, u, \mu)v \\
&\quad + \frac{\partial s_2}{\partial x}(A_1x + R_1(x, u, \mu))y + \frac{\partial s_2}{\partial u}(A_2u + R_2(x, u, \mu))y \\
&\quad + s_2(x, u, \mu)v(B_1(\mu)y + \psi_1(x, u, \mu)y + \psi_2(x, u, \mu)v) + \dots \\
&= B_2\eta_2 + P_2(\eta_1, \eta_2, \mu) + \psi_4(\xi_1, \xi_2, \mu)\eta_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left[ -B_2(\mu)s_2(x, u, \mu) + \psi_3(x, u, \mu) - \psi_4(x, u, \mu)s_2 \right. \\
& + \frac{\partial s_2}{\partial x} \left( A_1(\mu)x + R_1(x, u, \mu) \right) + \frac{\partial s_2}{\partial u} \left( A_2(\mu)u + R_2(x, u, \mu) \right) \\
& + s_2(x, u, \mu)B_1(\mu) + s_2(x, u, \mu)\psi_1(x, u, \mu) \\
& \left. - s_2(x, u, \mu)\psi_2(x, u, \mu)s_2(x, u, \mu) \right] y \\
& + s_2(\xi_1, \xi_2, \mu)\psi_2(\xi_1, \xi_2, \mu)\eta_2 + \dots
\end{aligned}$$

Функции  $s_1$  и  $s_2$  выбраны таким образом, чтобы выражения в квадратных скобках были тождественно равны нулю, то есть

$$\begin{aligned}
& B_1s_1 - s_1B_1 - \psi_1 + \psi_2s_2 - s_1\psi_1 + s_1\psi_2s_2 \\
& = \frac{\partial s_1}{\partial x}(A_1x + R_1) + \frac{\partial s_1}{\partial u}(A_2u + R_2), \\
& B_2s_2 - s_2B_2 - \psi_3 + \psi_4s_2 - s_2\psi_1 + s_2\psi_2s_2 \\
& = \frac{\partial s_2}{\partial x}(A_1x + R_1) + \frac{\partial s_2}{\partial u}(A_2u + R_2).
\end{aligned} \tag{A.12}$$

Чтобы показать, что функции  $s_1$  и  $s_2$  существуют, рассмотрим систему матриц

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= A_1x + R_1, \\
\dot{u} &= A_2u + R_2, \\
\dot{Y} &= B_1Y - YB_1 - \psi_1 + \psi_2V - Y\psi_1 + Y\psi_2V, \\
\dot{V} &= B_2V - VB_1 - \psi_3 + \psi_4V - V\psi_1 + V\psi_2V,
\end{aligned} \tag{A.13}$$

где  $Y \in \mathbb{R}^{n_1^2}$ , а  $V \in \mathbb{R}^{n_1n_2}$ . При малых значениях  $\mu$  эта система имеет положение равновесия  $O_2(0, 0, 0, 0)$ . Линеаризованная система записывается

в виде

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= A_1x, \\
\dot{u} &= A_2u, \\
\dot{Y} &= B_1Y - YB_1 - \frac{\partial \psi_1}{\partial x}(0, 0, \mu)x - \frac{\partial \psi_1}{\partial u}(0, 0, \mu)u, \\
\dot{V} &= B_2V - VB_1 - \frac{\partial \psi_3}{\partial x}(0, 0, \mu)x - \frac{\partial \psi_3}{\partial u}(0, 0, \mu)u.
\end{aligned}$$

При  $\mu = 0$  характеристические показатели упорядочены следующим образом:  $n_1^2$  собственных значений лежат на мнимой оси,  $n_1n_2$  показателей — слева, а  $m$  — справа от нее. Таким образом, система (A.13) имеет  $m$ -мерное инвариантное сильно устойчивое многообразие  $W_2^{ss}$ , определяемое в виде  $\{Y = s_1(x, u, \mu), V = s_2(x, u, \mu)\}$ .

Мы нашли функции  $s_1(x, u, \mu)$  и  $s_2(x, u, \mu)$ , удовлетворяющие условию (A.12). Таким образом, при замене переменных (1) и (2) система (A.5) преобразует так, что  $\varphi_1 \equiv 0$ ,  $\varphi_3 \equiv 0$ ,  $\psi_1 \equiv 0$ , а  $\psi_3 \equiv 0$ .

*Шаг 3.* Чтобы выполнить замену переменных (3) введем следующее обозначение:

$$x = \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y \\ v \end{pmatrix},$$

$$A(\mu) = \begin{pmatrix} A_1(\mu) & 0 \\ 0 & A_2(\mu) \end{pmatrix}, \quad B(\mu) = \begin{pmatrix} B_1(\mu) & 0 \\ 0 & B_2(\mu) \end{pmatrix},$$

$$r(x, \mu) = (r_1(x, \mu), r_2(x, \mu)), \quad R(x, \mu) = \begin{pmatrix} R_1(x, \mu) \\ R_2(x, \mu) \end{pmatrix},$$

$$p(y, \mu) = (r_1(y, \mu), r_2(y, \mu)), \quad P(y, \mu) = \begin{pmatrix} P_1(y, \mu) \\ P_2(y, \mu) \end{pmatrix}.$$

Замена переменных (3), записанная через новые обозначения, принимает вид

$$\xi_1 = x + r(x, \mu)x, \quad \xi_2 = u, \quad \eta_1 = y, \quad \eta_2 = v$$

Пусть  $R(x, \mu) = \tilde{R}(x, \mu)x$  и, следовательно,  $R_1(x, \mu) = \tilde{R}_1(x, \mu)x$ , а

$R_2(x, \mu) = \tilde{R}_2(x, \mu)x$ . После замены переменных получаем систему

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_1 &= \dot{x} + \frac{\partial r}{\partial x} \dot{x}x + r(x, \mu)\dot{x} = A_1(\mu)x + R_1(x, \mu) + \varphi_2(y, \mu)u \\ &\quad + \frac{\partial r}{\partial x} \left( A(\mu)x + R(x, \mu) \right) x + r(x, \mu) \left( A(\mu)x + R(x, \mu) \right) + \dots \\ &= A_1(\mu)\xi_1 + \varphi_2(\eta_1, \eta_2, \mu)\xi_2 + \left[ -A_1(\mu)r(x, \mu) + \tilde{R}_1(x, \mu) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial r}{\partial x} (A(\mu)x + \tilde{R}(x, \mu)x) + r(x, \mu)A(\mu) + r(x, \mu)\tilde{R}(x, \mu) \right] x + \dots, \\ \dot{\xi}_2 &= A_2(\mu)\xi_2 + \hat{R}_2(\xi_1, \xi_2, \mu) + \varphi_4(\eta_1, \eta_2, \mu)\xi_2 + \dots, \\ \dot{\eta}_1 &= B_1(\mu)\eta_1 + P_1(\eta_1, \eta_2, \mu) + \hat{\psi}_2(\xi_1, \xi_2, \mu)\eta_2 + \dots, \\ \dot{\eta}_2 &= B_2(\mu)\eta_2 + P_2(\eta_1, \eta_2, \mu) + \hat{\psi}_4(\xi_1, \xi_2, \mu)\eta_2 + \dots,\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}\hat{R}_2(0, 0, \mu) &\equiv 0, & \frac{\partial \hat{R}_2}{\partial (\xi_1, \xi_2)}(0, 0, \mu) &\equiv 0, \\ \hat{\psi}_2(0, 0, \mu) &\equiv 0, & \hat{\psi}_4(0, 0, \mu) &\equiv 0.\end{aligned}$$

Положим, что значение  $r(x, \mu)$  таково, что выражение в квадратных скобках обращается в нуль, то есть допустим, что выполняется следующее условие

$$\begin{aligned}\frac{\partial r}{\partial x} (A(\mu)x + \tilde{R}(x, \mu)x) \\ = A_1(\mu)r(x, \mu) - r(x, \mu)A(\mu) - \tilde{R}_1(x, \mu) - r(x, \mu)\tilde{R}(x, \mu).\end{aligned}\tag{A.14}$$

Рассмотрим матричную систему дифференциальных уравнений вида

$$\begin{aligned}\dot{x} &= A(\mu)x + \tilde{R}(x, \mu)x, \\ \dot{Y} &= A_1(\mu)Y - YA - \tilde{R}_1(x, \mu) - Y\tilde{R}(x, \mu),\end{aligned}\tag{A.15}$$

где  $Y \in \mathbb{R}^{m_1 m}$ , а  $x \in \mathbb{R}^m$ . При всех достаточно малых значениях  $\mu$  система имеет положение равновесия  $O_3(0, 0)$ , характеристические показатели

которого образуют спектр линейного оператора

$$\begin{aligned}x &\mapsto A(\mu)x, \\ Y &\mapsto A_1(\mu)Y - YA(\mu) - \frac{\partial \tilde{R}_1}{\partial x}(0, \mu)x.\end{aligned}$$

Следовательно, при  $\mu = 0$   $m_1^2$  характеристических показателей точки  $O_3$  лежат на мнимой оси,  $(mm_1 - m_1^2)$  и  $m$  характеристических показателей слева и справа от мнимой оси, соответственно. Таким образом, при достаточно малых значениях  $\mu$  система (A.15) имеет  $m$ -мерное инвариантное многообразие (сильно устойчивое)  $Y = r(x, \mu)$ , что свидетельствует о существовании функции  $r$ , удовлетворяющей условию (A.14).

Преобразование (3) при таком значении  $r(x, \mu)$  приводит систему к виду (A.5), где  $\varphi_1 \equiv 0$ ,  $\varphi_3 \equiv 0$ ,  $\psi_1 \equiv 0$ ,  $\psi_3 \equiv 0$ , а  $R_1 \equiv 0$ .

*Шаг 4.* При помощи замены переменных (4) получаем

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_1 &= A_1(\mu)\xi_1 + R_1(\xi_1, \xi_2, \mu) + \hat{\varphi}_2(\eta_1, \eta_2, \mu)\xi_2 + \dots, \\ \dot{\xi}_2 &= A_2(\mu)\xi_2 + R_2(\xi_1, \xi_2, \mu) + \hat{\varphi}_4(\eta_1, \eta_2, \mu)\xi_2 + \dots, \\ \dot{\eta}_1 &= \dot{y} + \frac{\partial p}{\partial y} \dot{y}y + p(y, \mu)\dot{y} = B_1(\mu)y + P_1(y, \mu) + \psi_2(x, \mu)v \\ &\quad + \frac{\partial p}{\partial y} \left( B(\mu)y + P(y, \mu) \right) y + p(y, \mu) \left( B(\mu)y + P(y, \mu) \right) + \dots \\ &= B_1(\mu)\eta_1 + \psi_2(\xi_1, \xi_2, \mu)\eta_2 + \left[ -B_1(\mu)p(y, \mu) + \tilde{P}_1(y, \mu) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial p}{\partial y} (B(\mu)y + \tilde{P}(y, \mu)y) + p(y, \mu)B(\mu) + p(y, \mu)\tilde{P}(y, \mu) \right] y + \dots, \\ \dot{\eta}_2 &= B_2(\mu)\eta_2 + \hat{P}_2(\eta_1, \eta_2, \mu) + \psi_4(\xi_1, \xi_2, \mu)\eta_2 + \dots,\end{aligned}$$

где  $P(y, \mu) = \tilde{P}(y, \mu)y$ .

Определим такую функцию  $p$ , чтобы выражение внутри квадратных



скобок было тождественно равно нулю, то есть

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial y}(B(\mu)y + \tilde{P}(y, \mu)y) \\ = B_1(\mu)p(y, \mu) - p(y, \mu)B(\mu) - \tilde{P}_1(y, \mu) - p(y, \mu)\tilde{P}(y, \mu). \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

Очевидно, что окончательно система принимает требуемый вид.

Чтобы доказать существование такой функции  $p$  рассмотрим матричную систему дифференциальных уравнений вида

$$\begin{aligned} \dot{X} &= B_1(\mu)X - XB(\mu) - \tilde{P}_1(y, \mu) - X\tilde{P}(y, \mu), \\ \dot{y} &= B(\mu)y + \tilde{P}(y, \mu)y, \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

где  $X \in \mathbb{R}^{n_1 n}$ , а  $y \in \mathbb{R}^n$ . При всех достаточно малых значениях  $\mu$  данная система имеет положение равновесия  $O_4(0, 0)$ , характеристические показатели которого образуют спектр линейного оператора

$$\begin{aligned} X \mapsto B_1(\mu)X - XB(\mu) - \frac{\partial \tilde{P}_1}{y}(0, \mu)y, \\ y \mapsto B(\mu)y. \end{aligned}$$

При  $\mu = 0$  характеристические показатели точки  $O_4$  упорядочены следующим образом:  $n_1^2$  собственных значений лежат на мнимой оси,  $(n_1 n - n_1^2)$  и  $n$  собственных значений лежат слева и справа от мнимой оси, соответственно. Следовательно, при достаточно малом значении  $\mu$  система (A.17) имеет  $m$ -мерное инвариантное многообразие  $W_4^{uu}$  (сильно неустойчивое) вида  $X = p(y, \mu)$ , где функция  $p$  удовлетворяет условию (A.16), что и требовалось доказать.

## ПРИЛОЖЕНИЕ В

### Асимптотика первого порядка для траекторий вблизи неподвижной точки седлового типа

Рассмотрим семейство  $\mathbb{C}^r$ -гладких ( $r \geq 2$ ) отображений  $T(\mu)$  пространства  $\mathbb{R}^{m+n}$  в окрестности неподвижной точки седлового типа с  $m$ -мерным устойчивым и  $n$ -мерным неустойчивым инвариантными многообразиями.

Пусть  $(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$  и  $(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ , где  $|\lambda_k| < 1$  ( $k = 1, \dots, m$ ), а  $|\gamma_k| > 1$  ( $k = 1, \dots, n$ ), являются мультипликаторами седла. Положим, что мультипликаторы  $(\lambda_1, \dots, \lambda_{m_1})$  равны по абсолютным величинам некоторому значению  $\lambda$ ,  $0 < \lambda < 1$ , а абсолютные величины остальных устойчивых мультипликаторов  $(\lambda_{m_1+1}, \dots, \lambda_m)$  строго меньше  $\lambda$ . Относительно неустойчивых мультипликаторов положим, что  $|\gamma_1| = \dots = |\gamma_{n_1}| = \gamma > 1$ , а  $|\gamma_k| > \gamma$  при  $k > n_1$ .

Абсолютно аналогично системам вблизи положений равновесия (см. приложение А) отображение  $T(\mu)$  можно привести к следующему виду (при помощи  $\mathbb{C}^{r-1}$  замены переменных):

$$\begin{aligned} \bar{x} &= A_1(\mu)x + f_{11}(x, y, v, \mu)x + f_{12}(x, u, y, v, \mu)u, \\ \bar{u} &= A_2(\mu)u + f_{21}(x, y, v, \mu)x + f_{22}(x, u, y, v, \mu)u, \\ \bar{y} &= B_1(\mu)y + g_{11}(x, u, y, \mu)y + g_{12}(x, u, y, v, \mu)v, \\ \bar{v} &= B_2(\mu)v + g_{21}(x, u, y, \mu)y + f_{22}(x, u, y, v, \mu)v, \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

где матрица  $A_1(0)$  имеет собственные значения  $(\lambda_1, \dots, \lambda_{m_1})$ , матрица  $A_2(0) = (\lambda_{m_1+1}, \dots, \lambda_m)$ , матрица  $B_1(0) = (\gamma_1, \dots, \gamma_{n_1})$ , а матрица  $B_2(0)$  имеет собственные значения  $(\gamma_{n_1+1}, \dots, \gamma_n)$ . Более того,  $\mathbb{C}^{r-1}$ -функции<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Они имеют непрерывные производные по всем переменным и параметру  $\mu$  до порядка  $(r-1)$ , кроме последней  $(r-1)$ -ой производной по  $\mu$ , которая может не существовать.

$f_{ij}$  и  $g_{ij}$  удовлетворяют тождествам

$$\begin{aligned} f_{ij}(0, 0, 0, 0, \mu) &= 0, & g_{ij}(0, 0, 0, 0, \mu) &= 0, \\ f_{11}(x, 0, 0, \mu) &\equiv 0, & g_{11}(0, 0, y, \mu) &\equiv 0, \\ f_{12}(x, u, 0, 0, \mu) &\equiv 0, & g_{12}(0, 0, y, v, \mu) &\equiv 0, \\ f_{j1}(0, y, v, \mu) &\equiv 0, & g_{j1}(x, u, 0, \mu) &\equiv 0. \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Мы уделим особое внимание приведению к данной форме, поскольку она позволяет дать хорошую оценку решений краевой задачи (см. раздел 3.7) вблизи неподвижной точки седлового типа. А именно: пусть функции  $\xi_k^{1,2}$ ,  $\eta_k^{1,2}$  определяют решение краевой задачи: точка  $(x^1, u^1, y^1, v^1)$  есть образ точки  $(x^0, u^0, y^0, v^0)$ , полученный при помощи отображения  $T(\mu)^k$  (действующего в малой окрестности начала координат) тогда и только тогда, когда  $(x^1, u^1) = (\xi_k^1, \xi_k^2)(x^0, u^0, y^1, v^1)$ , а  $(y^0, v^0) = (\eta_k^1, \eta_k^2)(x^0, u^0, y^1, v^1)$ . Пусть величины  $\lambda_0(\mu)$  и  $\gamma_0(\mu)$  таковы, что при всех  $j \geq 0$  выполняются неравенства

$$\|A_1(\mu)^j\| \leq \text{const} \cdot \lambda_0(\mu)^j, \quad \|B_1(\mu)^{-j}\| \leq \text{const} \cdot \gamma_0(\mu)^{-j}. \quad (\text{B.3})$$

Например, если имеется только один устойчивый ведущий мультипликатор ( $m_1 = 1$ , а  $\lambda_1$  — вещественная величина), то  $\lambda_0(\mu) = \lambda_1(\mu)$ ; если — пара комплексно-сопряженных устойчивых ведущих мультипликаторов ( $m_1 = 2$ , а  $\lambda_1 = \lambda_2^*$  — не целое число), то  $\lambda_0(\mu) = \text{Re } \lambda_1(\mu)$ . Аналогично,  $\gamma_0(\mu) = \gamma_1(\mu)$ , если  $n_1 = 1$ ; и  $\gamma_0(\mu) = \text{Re } \lambda_1(\mu)$ , если  $n_1 = 2$ , а  $\gamma_1 = \gamma_2^*$  — нецелое число.

Поскольку  $A$  и  $B$  гладко зависят от  $\mu$ , получаем также, что при  $q = 1, \dots, r-1$

$$\left\| \frac{\partial^q}{\partial \mu^q} (A_1(\mu)^j) \right\| \leq \text{const} \cdot j^q \lambda_0(\mu)^j, \quad \left\| \frac{\partial^q}{\partial \mu^q} (B_1(\mu)^{-j}) \right\| \leq \text{const} \cdot j^q \gamma_0(\mu)^{-j} \quad (\text{B.4})$$

Введем в рассмотрение такие величины  $\lambda'$  и  $\gamma'$ , удовлетворяющие неравенствам  $\lambda_0^2 < \lambda' < \lambda_0$  и  $\gamma_0 < \gamma' < \gamma_0^2$ , что при всех значениях  $j \geq 0$

$$\|A_2(\mu)^j\| \leq \text{const} \cdot (\lambda')^j, \quad \|B_2(\mu)^{-j}\| \leq \text{const} \cdot (\gamma')^{-j}. \quad (\text{B.5})$$

Эти же неравенства справедливы для всех производных по  $\mu$ .

**Лемма В.1.** Если тождества (В.2) выполняются, то

$$\xi_k^1 = A_1(\mu)^k x^0 + o(\lambda_0(\mu)^k), \quad \eta_k^1 = B_1(\mu)^{-k} y^1 + o(\gamma_0(\mu)^{-k}), \quad (\text{B.6})$$

$$\xi_k^2 = o(\lambda_0(\mu)^k), \quad \eta_k^2 = o(\gamma_0(\mu)^{-k}). \quad (\text{B.7})$$

где члены  $o(\lambda_0^k)$  и  $o(\gamma_0^{-k})$  являются  $\mathbb{C}^{r-1}$ -гладкими, а все их производные по  $(x^0, u^0, y^1, v^1)$  также имеют порядок  $o(\lambda_0^k)$  и  $o(\gamma_0^{-k})$ , соответственно; производные, предполагающие дифференцирование  $q$  раз по  $\mu$  оцениваются, соответственно, как  $o(k^q \lambda_0^k)$  и  $o(k^q \gamma_0^{-k})$  ( $q = 0, \dots, r-2$ ).

Доказательство. Введем обозначения

$$f_i = f_{i1}x + f_{i2}u \quad \text{и} \quad g_i = g_{i1}y + g_{i2}v. \quad (\text{B.8})$$

Достаточно показать (см. раздел 3.7), что при малых значениях  $(x^0, u^0, y^1, v^1)$  решение  $\{(x_0, u_0, y_0, v_0), \dots, (x_k, u_k, y_k, v_k)\}$  системы

$$\begin{aligned} x_j &= A_1^j x^0 + \sum_{s=0}^{j-1} A_1^{j-s-1} f_1(x_s, u_s, y_s, v_s, \mu), \\ u_j &= A_2^j u^0 + \sum_{s=0}^{j-1} A_2^{j-s-1} f_2(x_s, u_s, y_s, v_s, \mu), \\ y_j &= B_1^{-(k-j)} y^1 - \sum_{s=j}^{k-1} B_1^{-(s+1-j)} g_1(x_s, u_s, y_s, v_s, \mu), \\ v_j &= B_2^{-(k-j)} v^1 - \sum_{s=j}^{k-1} B_2^{-(s+1-j)} g_2(x_s, u_s, y_s, v_s, \mu) \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

удовлетворяет следующим неравенствам:

$$\begin{aligned} \|x_j - A_1^j x^0\| &\leq \lambda_0^j \varphi_1(k), \\ \|u_j\| &\leq \lambda_0^j \varphi_2(j), \\ \|y_j - B_1^{-(k-j)} y^1\| &\leq \gamma_0^{-(k-j)} \psi_1(k), \\ \|v_j\| &\leq \gamma_0^{-(k-j)} \psi_2(k-j) \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

где  $\varphi_i$  и  $\psi_i$  — некоторые положительные последовательности, стремящиеся к нулю.

Более того, аналогичные оценки должны выполняться для всех производных по  $(x^0, u^0, y^1, v^1, \mu)$  выражений, входящих в левую часть неравенств (В.10), при этом  $\varphi_i$  и  $\psi_i$  могут зависеть от порядка производной.

Как показано в разделе 3.7, решение системы (В.9) является пределом последовательных приближений  $\{(x_0^{(n)}, u_0^{(n)}, y_0^{(n)}, v_0^{(n)}), \dots, (x_k^{(n)}, u_k^{(n)}, y_k^{(n)}, v_k^{(n)})\}$  ( $n \rightarrow +\infty$ ), определяемых как

$$\begin{aligned} x_j^{(n+1)} &= A_1^j x^0 + \sum_{s=0}^{j-1} A_1^{j-s-1} f_1(x_s^{(n)}, u_s^{(n)}, y_s^{(n)}, v_s^{(n)}, \mu), \\ u_j^{(n+1)} &= A_2^j u^0 + \sum_{s=0}^{j-1} A_2^{j-s-1} f_2(x_s^{(n)}, u_s^{(n)}, y_s^{(n)}, v_s^{(n)}, \mu), \\ y_j^{(n+1)} &= B_1^{-(k-j)} y^1 - \sum_{s=j}^{k-1} B_1^{-(s+1-j)} g_1(x_s^{(n)}, u_s^{(n)}, y_s^{(n)}, v_s^{(n)}, \mu), \\ v_j^{(n+1)} &= B_2^{-(k-j)} v^1 - \sum_{s=j}^{k-1} B_2^{-(s+1-j)} g_2(x_s^{(n)}, u_s^{(n)}, y_s^{(n)}, v_s^{(n)}, \mu), \end{aligned} \quad (\text{В.11})$$

начиная со значения  $(x_0^{(1)}, u_0^{(1)}, y_0^{(1)}, v_0^{(1)}) = 0$ .

Таким образом, чтобы доказать справедливость некоторых оценок решения системы (В.9), нужно допустить, что  $n$ -е последовательное приближение удовлетворяет этим оценкам, а затем, на основе этого положения, проверить, что  $(n+1)$ -е приближение также удовлетворяет им; конечно, оценка не должна зависеть от  $n$ .

Аналогичным образом было доказано (см. лемму 3.3), что при любых значениях  $\bar{\lambda} > \lambda_0$  и  $\bar{\gamma} < \gamma_0$  выполняются неравенства

$$\|x_j, u_j\| \leq K \bar{\lambda}^j, \quad \|y_j, v_j\| \leq K \bar{\gamma}^{j-k} \quad (\text{В.12})$$

где  $K$  — некоторая положительная постоянная (зависящая от конкретного выбора  $\bar{\lambda}$  и  $\bar{\gamma}$ ). Теперь проверим, что выполнение тождеств (В.2) позволяет уточнить данные оценки. В неравенствах (В.12) можно принять  $\bar{\lambda} = \lambda_0$ , а  $\bar{\gamma} = \gamma_0$ .

Действительно, положим, что  $n$ -е приближение удовлетворяет неравен-

ствам

$$\begin{aligned} \|x_j^{(n)}\| &\leq K_x \lambda_0^j, & \|u_j^{(n)}\| &\leq K_u \lambda_0^j, \\ \|y_j^{(n)}\| &\leq K_y \gamma_0^{j-k}, & \|v_j^{(n)}\| &\leq K_v \gamma_0^{j-k}. \end{aligned} \quad (\text{В.13})$$

Следует проверить, что при соответствующем выборе постоянных  $K_x, K_u, K_y, K_v$   $(n+1)$ -е приближение удовлетворяет следующим неравенствам:

$$\begin{aligned} \|x_j^{(n+1)}\| &\leq K_x \lambda_0^j, & \|u_j^{(n+1)}\| &\leq K_u \lambda_0^j, \\ \|y_j^{(n+1)}\| &\leq K_y \gamma_0^{j-k}, & \|v_j^{(n+1)}\| &\leq K_v \gamma_0^{j-k}. \end{aligned} \quad (\text{В.14})$$

Подставляя формулы (В.12), (В.13) в (В.11), получаем

$$\begin{aligned} \|x_j^{(n+1)}\| &\leq \lambda_0^j \varepsilon + \sum_{s=0}^{j-1} \lambda_0^{j-s-1} (\delta K_x^2 \lambda_0^{2s} + C K_u \gamma_0^{s-k} \lambda_0^s), \\ \|u_j^{(n+1)}\| &\leq (\lambda')^j \varepsilon + \sum_{s=0}^{j-1} (\lambda')^{j-s-1} (C K^2 \bar{\lambda}^{2s} + \delta K_u \lambda_0^s). \end{aligned} \quad (\text{В.15})$$

Здесь  $C$  — некоторая постоянная,  $\varepsilon$  ограничивает норму точки  $(x^0, u^0, y^1, v^1)$ . Заметим, что при этом учитываются тождества (В.2):  $\|f_{22}\|$  в качестве оценки имеет постоянную  $\delta$ , величина которой при уменьшении величины окрестности рассматриваемой неподвижной точки седлового типа может быть произвольно мала;  $\|f_{21}\|$  оценивается как  $\|f_{21}(x, y, v)\| \leq \|f_{21}(0, y, v)\| + \sup \|f'_{21x}\| \cdot \|x\| \leq C \|x\|$ . Аналогично получаем, что  $\|f_{11}(x, y, v)\| \leq \sup \|f'_{11x}\| \cdot \|x\|$ , а поскольку  $f'_{11x} \equiv 0$  при  $(y, v) = 0$ , выполняется неравенство  $\|f_{11}(x, y, v)\| \leq \delta \|x\|$ , где величина  $\delta$  может быть произвольно мала. Для функции  $f_{12}$  из тождеств (В.2) следует, что  $\|f_{12}\| \leq C \|y, v\|$ .

На основании неравенств (В.15),  $\|x_j^{(n+1)}\| \leq \lambda_0^j \varepsilon + \lambda_0^{j-1} \delta K_x^2 / (1 - \lambda_0) + \lambda_0^{j-1} C K_u \gamma_0^{j-k} / (\gamma_0 - 1)$ , а  $\|u_j^{(n+1)}\| \leq (\lambda')^j \varepsilon + (\lambda')^j C K^2 / (\lambda' - \bar{\lambda}^2) + \lambda_0^j \delta K_u / (\lambda_0 - \lambda')$ , откуда следует оценка (В.14) для  $(x, u)_j^{(n+1)}$ , при условии, что величины  $K_x$  и  $K_u$  таковы, что

$$K_x \geq \varepsilon + \frac{\delta K_x^2}{\lambda_0(1 - \lambda_0)} + \frac{C K_u}{\lambda_0(\gamma_0 - 1)},$$

$$K_u \geq \varepsilon + \frac{C K^2}{\lambda' - \bar{\lambda}^2} + K_u \frac{\delta}{\lambda_0 - \lambda'}.$$

В силу симметричности задачи требуемые оценки для  $(y, v)_j^{(n+1)}$  получают аналогичным образом.

Таким образом, решение системы (В.11) (а также все последовательные приближения) удовлетворяет уравнениям

$$(x_j, u_j) = O(\lambda_0^j), \quad (y_j, v_j) = O(\gamma_0^{-(k-j)}). \quad (\text{В.16})$$

Положим теперь, что  $n$ -е приближение удовлетворяет неравенствам (В.10). На основании тождеств (В.2), функция  $f_1$  имеет следующую оценку:

$$\|f_1\| \leq \sup_x \|f'_{11x}\| \cdot \|x\|^2 + \sup \|f'_{12(y,v)}\| \cdot \|u\| \cdot \|y, v\|. \quad (\text{В.17})$$

Поскольку  $f'_{11x} \rightarrow 0$  при  $(y, v) \rightarrow 0$ , из уравнений (В.16) и допущении о справедливости неравенств (В.10), следует, что в  $n$ -м приближении

$$\|f_1(x_s^{(n)}, u_s^{(n)}, y_s^{(n)}, v_s^{(n)}, \mu)\| \leq \tilde{\varphi}_1(k-s)\lambda_0^{2s} + C\gamma_0^{s-k}\lambda_0^s\varphi_2(s) \quad (\text{В.18})$$

где  $C$  — некоторая постоянная,  $\varphi_2$  — оценка для  $u$  в формуле (В.10), а  $\tilde{\varphi}_1$  — положительная функция (не зависящая от выбора величин  $\varphi_i$  и  $\psi_i$  в формуле (В.10)), стремящаяся к нулю при  $k-s \rightarrow +\infty$ .

Аналогично,

$$\|f_2(x_s^{(n)}, u_s^{(n)}, y_s^{(n)}, v_s^{(n)}, \mu)\| \leq \tilde{\varphi}_2(s)\lambda_0^s + \delta\varphi_2(s)\lambda_0^s \quad (\text{В.19})$$

где величина  $\delta$  может быть сколь угодно мала при уменьшении размера окрестности седла, а  $\tilde{\varphi}_2(s) \rightarrow 0$  при  $s \rightarrow +\infty$  (функция  $\tilde{\varphi}_2$  есть верхняя граница для  $\|f_{21}\|$  при фиксированном значении  $x = x_s^{(n)}$ ; на основании тождеств (В.2) она стремится к нулю при  $x \rightarrow 0$ ).

Согласно неравенствам (В.18), (В.19) получаем, соответственно,

$$\left\| \sum_{s=0}^{j-1} \lambda_0^{-s} f_1(x_s^{(n)}, u_s^{(n)}, y_s^{(n)}, v_s^{(n)}, \mu) \right\| \leq \sum_{s=0}^{j-1} \lambda_0^s \tilde{\varphi}_1(k-s) + C \sum_{s=0}^{j-1} \gamma_0^{s-k} \varphi_2(s)$$

и

$$\left\| \sum_{s=0}^{j-1} (\lambda')^{-s} f_2(x_s^{(n)}, u_s^{(n)}, y_s^{(n)}, v_s^{(n)}, \mu) \right\| \leq \sum_{s=0}^{j-1} \left( \frac{\lambda_0}{\lambda'} \right)^s [\tilde{\varphi}_2(s) + \delta\varphi_2(s)].$$

Таким образом (см. (В.11)),  $(x, u)^{(n+1)}$  удовлетворяет неравенствам (В.10), если

$$\varphi_1(k) = \sum_{s=0}^{k-1} \lambda_0^s \tilde{\varphi}_1(k-s) + C \sum_{s=0}^{k-1} \gamma_0^{s-k} \varphi_2(s), \quad (\text{В.20})$$

а

$$\varphi_2(j) = \left( \frac{\lambda'}{\lambda_0} \right)^j \left( \varepsilon + \frac{1}{\lambda'} \sum_{s=0}^{j-1} \left( \frac{\lambda_0}{\lambda'} \right)^s [\tilde{\varphi}_2(s) + \delta\varphi_2(s)] \right). \quad (\text{В.21})$$

Известно, что сумма вида

$$\sum_{s=0}^{k-1} \alpha^s \varphi(k-s)$$

стремится к нулю при  $k \rightarrow +\infty$  для любого значения  $\alpha < 1$  и произвольной последовательности  $\varphi$ , стремящейся к нулю при  $k-s \rightarrow +\infty$ . Следовательно, уравнение (В.20) действительно определяет стремящуюся к нулю последовательность  $\varphi_1(k)$ , при условии, что  $\varphi_2(s)$  стремится к нулю при  $s \rightarrow +\infty$ .

Последовательность  $\varphi_2(j)$  задается уравнением (В.21), которое можно записать в виде

$$\varphi_2(j+1) = \frac{\lambda'}{\lambda_0} \left( 1 + \frac{\delta}{\lambda'} \right) \cdot \varphi_2(j) + \frac{1}{\lambda_0} \cdot \tilde{\varphi}_2(j).$$

Поскольку  $\frac{\lambda'}{\lambda_0} \left( 1 + \frac{\delta}{\lambda'} \right) < 1$  при достаточно малой величине  $\delta$ , а  $\tilde{\varphi}_2(j) \rightarrow 0$  при  $j \rightarrow \infty$ , из данной формулы следует, что  $\varphi_2(j)$  действительно стремится к нулю.

В силу симметричности задачи, соответствующие функции  $\psi_1$  и  $\psi_2$  определяются абсолютно аналогичным образом. Мы доказали справедливость оценок (В.10). В заключение леммы необходимо показать, что аналогичные оценки выполняются для всех производных решения  $(x_j, u_j, y_j, v_j)$  системы (В.9).

В разделе 3.7 показано, что последовательные приближения сходятся к решению краевой задачи вместе со всеми производными. Таким образом,

можно *положить*, что  $n$ -е приближение удовлетворяет<sup>2</sup> неравенствам

$$\begin{aligned} \|D_p x_j^{(n)} - D_p (A_1(\mu)^j x^0)\| &\leq k^{p_2} \lambda_0^j \varphi_1^{(p)}(k), \\ \|D_p u_j^{(n)}\| &\leq k^{p_2} \lambda_0^j \varphi_2^{(p)}(j), \\ \|D_p y_j^{(n)} - D_p (B_1(\mu)^{-(k-j)} y^1)\| &\leq k^{p_2} \gamma_0^{-(k-j)} \psi_1^{(p)}(k), \\ \|D_p v_j^{(n)}\| &\leq k^{p_2} \gamma_0^{-(k-j)} \psi_2^{(p)}(k-j), \end{aligned} \quad (\text{B.22})$$

для некоторых стремящихся к нулю последовательностей  $\varphi_{1,2}$  и  $\psi_{1,2}$ , которые не зависят от  $n$ , но могут зависеть от порядка  $|p|$  производной. Тогда, на основании этого предположения, следует показать, что производные последующего приближения  $\{(x_j^{(n+1)}, u_j^{(n+1)}, y_j^{(n+1)}, v_j^{(n+1)})\}_{j=0}^k$  удовлетворяют тем же оценкам.

По сути, необходимо проверить справедливость этих оценок лишь для  $x_j^{(n+1)}$  и  $u_j^{(n+1)}$ ; аналогичное заключение относительно  $y_j^{(n+1)}$  и  $v_j^{(n+1)}$  следует из симметричности задачи.

Дифференцируя систему (B.11) получаем

$$\begin{aligned} D_p x_j^{(n+1)} &= D_p (A_1(\mu)^j x^0) + \sum_{s=0}^{j-1} D_p (A_1(\mu)^{j-s-1} f_1(x_s^{(n)}, u_s^{(n)}, y_s^{(n)}, v_s^{(n)}, \mu)), \\ D_p u_j^{(n+1)} &= D_p (A_2(\mu)^j u^0) + \sum_{s=0}^{j-1} D_p (A_2(\mu)^{j-s-1} f_2(x_s^{(n)}, u_s^{(n)}, y_s^{(n)}, v_s^{(n)}, \mu)). \end{aligned}$$

<sup>2</sup>Используется обозначение  $D_p = \frac{\partial^{p_1+p_2}}{\partial(x^0, u^0, y^1, v^1)^{p_1} \partial \mu^{p_2}}$  (здесь  $p = (p_1, p_2)$ ).

Согласно неравенствам (B.4), (B.5), определяем, что

$$\begin{aligned} \|D_p x_j^{(n+1)} - D_p (A_1(\mu)^j x^0)\| &\leq \text{const} \cdot \lambda_0^{j-1} \sum_{p'_1=p_1, p'_2=0, \dots, p_2} k^{p_2-p'_2} \\ &\times \sum_{s=0}^{j-1} \lambda_0^{-s} \left\| D_{p'} f_1(x_s^{(n)}, u_s^{(n)}, y_s^{(n)}, v_s^{(n)}, \mu) \right\|, \\ \|D_p u_j^{(n+1)}\| &\leq \text{const} \cdot (\lambda')^j \left[ 1 + \sum_{p'_1=p_1, p'_2=0, \dots, p_2} \sum_{s=0}^{j-1} (\lambda')^{-s} \right. \\ &\times \left. \left\| D_{p'} f_2(x_s^{(n)}, u_s^{(n)}, y_s^{(n)}, v_s^{(n)}, \mu) \right\| \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.23})$$

Как и прежде, чтобы доказать лемму необходимо проверить, что оценки, аналогичные неравенствам (B.18) и (B.19), выполняются для производных  $D_p f_{1,2}$  при любых значениях  $p$ :

$$\|D_p f_1(x_s^{(n)}, u_s^{(n)}, y_s^{(n)}, v_s^{(n)}, \mu)\| \leq [\beta_1(k-s)\lambda_0^{2s} + \beta_2(s)\gamma_0^{s-k}\lambda_0^s] k^{p_2} \quad (\text{B.24})$$

и

$$\|D_p f_2(x_s^{(n)}, u_s^{(n)}, y_s^{(n)}, v_s^{(n)}, \mu)\| \leq [\beta_3(s) + \delta \varphi_2^{(p)}(s)] \lambda_0^s k^{p_2} \quad (\text{B.25})$$

где величина  $\delta$  при уменьшении размера окрестности рассматриваемой неподвижной точки седлового типа может быть произвольно мала;  $\beta_{1,2,3}$  — некоторые стремящиеся к нулю последовательности; более того,  $\beta_3$  не зависит от конкретного выбора оценочных функций  $\varphi_{1,2}^{(p)}$  и  $\psi_{1,2}^{(p)}$  в неравенствах (B.22), а  $\beta_{1,2}$  не зависят от  $\varphi_1^{(p)}$  и  $\psi_1^{(p)}$  (тем не менее,  $\beta_{1,2,3}$  могут зависеть от функций  $\varphi$  и  $\psi$ , соответствующих производным низших порядков).

Согласно цепному правилу, производные  $D_p f_i(x_s^{(n)}, u_s^{(n)}, y_s^{(n)}, v_s^{(n)}, \mu)$  в качестве оценки имеют сумму

$$\begin{aligned} &\text{const} \cdot \sum_{q_1, q_2, q_3} \left\| \frac{\partial^{q_1+q_2+q_3} f_i}{\partial(x, u)^{q_1} \partial(y, v)^{q_2} \partial \mu^{q_3}}(x_s^{(n)}, u_s^{(n)}, y_s^{(n)}, v_s^{(n)}, \mu) \right\| \\ &\times \|D_{l_1}(x_s^{(n)}, u_s^{(n)})\| \cdots \|D_{l_{q_1}}(x_s^{(n)}, u_s^{(n)})\| \\ &\times \|D_{l_{q_1+1}}(y_s^{(n)}, v_s^{(n)})\| \cdots \|D_{l_{q_1+q_2}}(y_s^{(n)}, v_s^{(n)})\| \end{aligned} \quad (\text{B.26})$$

где  $q_{1,2,3}$  — неотрицательные целочисленные величины такие, что  $q_1 + q_2 + q_3 \leq p_1 + p_2$ , а  $l$  — пары неотрицательных целых чисел таких, что  $l_{11} + \dots + l_{q_1+q_2,1} = p_1$ , а  $l_{12} + \dots + l_{q_1+q_2,2} + q_3 = p_2$ .

По предположению, оценки производных  $\|D_l u_s^{(n)}\|$  и  $\|D_l v_s^{(n)}\|$  определяются неравенствами (В.22). Поскольку функции  $\varphi_1$  и  $\psi_1$  не зависят от  $j$ , существует такая постоянная  $C$ , не зависящая от конкретного выбора  $\varphi$  и  $\psi$ , что из выполнения неравенств (В.22) будет следовать

$$\|D_l x_s^{(n)}\| \leq C \lambda_0^s k^{l_2}, \quad \|D_l y_s^{(n)}\| \leq C \gamma_0^{-(k-s)} k^{l_2} \quad (\text{В.27})$$

при всех достаточно больших значениях  $k$ .

Таким образом, оценку (В.26) можно записать в виде

$$\text{const} \cdot \sum_{q_1, q_2, q_3} \left\| \frac{\partial^{q_1+q_2+q_3} f_i}{\partial(x, u)^{q_1} \partial(y, v)^{q_2} \partial \mu^{q_3}}(x_s^{(n)}, u_s^{(n)}, y_s^{(n)}, v_s^{(n)}, \mu) \right\| \times \lambda_0^{q_1 s} \gamma_0^{q_2(s-k)} k^{p_2 - q_3}. \quad (\text{В.28})$$

Очевидно, что в оценке для функции  $f_1$  члены, для которых  $q_1 \geq 2$ , а  $q_2 \geq 1$ , соответствуют неравенству (В.24), а все члены, для которых  $q_1 \geq 2$ , соответствуют неравенству (В.25). Заметим также, что

$$\frac{\partial^{q_2+q_3} f_i}{\partial(y, v)^{q_2} \partial \mu^{q_3}} \equiv \frac{\partial^{q_2+q_3} f_{i1}}{\partial(y, v)^{q_2} \partial \mu^{q_3}} \cdot x_s^{(n)} + \frac{\partial^{q_2+q_3} f_{i2}}{\partial(y, v)^{q_2} \partial \mu^{q_3}} \cdot u_s^{(n)} = o(\lambda_0^s)$$

(с учетом формул (В.10), (В.16) и неравенств (В.2), на основании которых  $\frac{\partial^{q_2+q_3} f_{i1}}{\partial(y, v)^{q_2} \partial \mu^{q_3}} \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow 0$ ). Следовательно, члены, для которых  $q_1 = 0$ , а  $q_2 \geq 1$  в оценке (В.28) для функции  $f_1$ , и все члены, для которых  $q_1 = 0$  в оценке для  $f_2$ , также соответствуют неравенствам (В.24) и (В.25), соответственно.

Случай, когда  $q_1 = 0$ ,  $q_2 = 0$ , соответствует дифференцированию только по  $\mu$  (то есть  $p_1 = 0$  и  $p_2 = q_3$ ). Напомним, что  $(r-1)$ -я производная по  $\mu$  может не существовать, поэтому производные  $\frac{\partial^{q_3} f_1}{\partial \mu^{q_3}}$  следует оценивать только при  $q_3 \leq r-2$ . Эти производные являются гладкими относительно  $(x, u, y, v)$ , следовательно, можно записать неравенство (на основании того, что  $f_1 \equiv 0$  при  $(y, v) = 0$ ; см. тождества (В.2))

$$\left\| \frac{\partial^{q_3} f_1}{\partial \mu^{q_3}} \right\| \leq \|y, v\| \cdot \sup \left\| \frac{\partial}{\partial(y, v)} \frac{\partial^{q_3} f_1}{\partial \mu^{q_3}} \right\|.$$

Таким образом, рассматриваемый член оценивается в точной аналогии с другими членами, для которых  $q_1 = 0$ .

В формуле (В.26) осталось проверить члены ( $q_1 = 1$ )

$$\left\| \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^{q_2+q_3} f_i}{\partial(y, v)^{q_2} \partial \mu^{q_3}} \right\| \cdot \gamma_0^{q_2(s-k)} \lambda_0^s k^{p_2 - q_3}$$

и

$$\left\| \frac{\partial}{\partial u} \frac{\partial^{q_2+q_3} f_i}{\partial(y, v)^{q_2} \partial \mu^{q_3}} \right\| \cdot \gamma_0^{q_2(s-k)} o(\lambda_0^s) k^{p_2 - q_3}.$$

Заметим, что  $f'_{ix} \rightarrow 0$  при  $(x, u) \rightarrow 0$  (см. тождества (В.2)). Следовательно, оба указанных члена оцениваются как  $\gamma_0^{q_2(s-k)} o(\lambda_0^s) k^{p_2}$ ; то есть они соответствуют неравенству (В.25), а если  $q_2 \geq 1$ , они соответствуют неравенству (В.24).

Осталось рассмотреть случай, когда для функции  $f_1$   $q_1 = 1$ ,  $q_2 = 0$ . Чтобы убедиться в том, что неравенство (В.24) выполняется, необходимо показать, что

$$\left\| \frac{\partial}{\partial(x, u)} \frac{\partial^{q_3} f_1}{\partial \mu^{q_3}} \right\| \cdot \lambda_0^{-s}$$

стремиться к нулю при  $k-s \rightarrow +\infty$ , но это следует непосредственно из уравнений (В.16), поскольку  $f_1 = f_{11}x + f_{12}y$ , а обе функции  $f_{1i}$  обращаются в нуль при  $(y, v) = 0$  (см. тождества (В.2)).

Следовательно, производные  $D_p f_i(x_s^{(n)}, u_s^{(n)}, y_s^{(n)}, v_s^{(n)}, \mu)$  удовлетворяют оценкам (В.24) и (В.25). Заметим, что для производных функций  $x_s^{(n)}$  и  $y_s^{(n)}$  использовались лишь оценки (В.27), которые не зависят от выбора  $\varphi$  и  $\psi$  в неравенствах (В.22). Таким образом, оценочная функция  $\beta_{1,2}$  в неравенстве (В.24) действительно не зависит от  $\varphi_1$  и  $\psi_1$ . Единственными членами, входящими в формулу (В.26) и способными внести в неравенство (В.25) зависящую от  $\varphi_{1,2}^{(p)}$  и  $\psi_{1,2}^{(p)}$  составляющую, являются

$$\|f'_{2u}\| \cdot \|D_p u_s^{(n)}\| \quad \text{и} \quad \|f'_{2v}\| \cdot \|D_p v_s^{(n)}\|.$$

В данном случае первый член оценивается как  $\delta \lambda_0^s \varphi_2^{(p)}(s) k^{p_2}$ , где величина  $\delta$  может быть произвольно мала. Второй член оценивается как

$$k^{p_2} \psi_2^{(p)}(k-s) \cdot (\|f'_{21v}\| \|x_s^{(n)}\| + \|f'_{22v}\| \|u_s^{(n)}\|)$$

откуда при достаточно большой величине  $k$  получаем оценку  $o(\lambda_0^8)k^{p_2}$  (см. формулы (В.16), (В.2)) независимо от выбора  $\varphi_{1,2}^{(p)}$  и  $\psi_{1,2}^{(p)}$ . Все полученные результаты полностью согласуются с неравенством (В.25).

Теперь справедливость оценок (В.22) для последующего приближения  $\{(x_j^{(n+1)}, u_j^{(n+1)}, y_j^{(n+1)}, v_j^{(n+1)})\}_{j=0}^k$  следует из неравенств (В.24), (В.25) точно также, как справедливость оценок (В.10) следует из неравенств (В.18), (В.19). Лемма доказана.

**Замечание.** Аналогичным образом для функций  $\xi$ ,  $\eta$  и их производных до порядка  $(r - 2)$  в случае, когда отображение является, по крайней мере  $\mathbb{C}^3$ -гладким можно получить немного лучшие оценки. Для этого в формулах (В.6) и (В.7) члены  $o(\lambda_0^k)$  и  $o(\gamma_0^{-k})$  заменяются на  $O((\lambda')^k)$  и  $O((\gamma')^{-k})$ , соответственно, (см. Гонченко и Шильников [27]).

## Литература

- [1] Afraimovich, V. S., Gavrilov, N. K., Lukyanov, V. S. and Shilnikov, L. P. [1985] *The Principal Bifurcations of Dynamical Systems*, Textbook, (Gorky State University: Gorky).
- [2] Afraimovich, V. S. and Shilnikov, L. P. [1974] «On small periodic perturbations of autonomous systems», *Doclady AN SSSR* **5**, 734–742.
- [3] Afraimovich, V. S. and Shilnikov, L. P. [1977] «The annulus principle and problems on interaction of two self-oscillation systems», *Prikladnaja Matematika i Mehanika* **41**, 618–627.
- [4] Andronov, A. A. [1933] «Mathematical problems of the theory of self-oscillations», *Proc. of Vsesojuznaja konferenziya po kolebanijam, Moscow-Leningrad*. GTTI.
- [5] Andronov, A. A., Leontovich, E. A., Gordon, I. E. and Maier, A. G. [1973] *The Theory of Dynamical Systems on a Plane* (Israel program of scientific translations, Israel).
- [6] Andronov, A. A., Leontovich, E. A., Gordon, I. E. and Maier, A. G. [1971] *The Theory of Bifurcations of Dynamical Systems on a Plane* (Israel program of scientific translations, Israel).
- [7] Andronov, A. A. and Pontryagin, L. S. [1937] «Systèmes grossieres», *Dokl. Acad. Nauk SSSR* **14**(5), 247–251.
- [8] Andronov, A. A. and Vitt, A. A. [1933] «On Lyapunov stability», *Zhurnal Eksperimental'noi i Teoreticheskoi Fiziki* **5**.
- [9] Andronov, A. A., Vitt, A. A. and Khaikin, S. E. [1966] *Theory of Oscillations* (Pergamon Press: Oxford).
- [10] Arnold, V. I. [1983] *Geometrical Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations* (Springer-Verlag: New York).

- [11] Belitskii, G. R. [1961] «An algorithm for finding all vertices of convex polyhedral sets», *J. SIAM* **9**(1), 72–88.
- [12] Belitskii, G. R. [1979] *Normal Forms, Invariants, and Local Mappings* (Naukova Dumka: Kiev).
- [13] Bendixson, J. [1901] «Sur les courbes définies par les équations différentielles», *Acta Mathem.* **24**.
- [14] Birkhoff, G. D. [1927] *Dynamical Systems* (A. M. S. Publications: Providence).
- [15] Birkhoff, G. D. [1935] «Nouvelles recherches sur les systèmes dynamiques», *Memoire Pont. Acad. Sci. Novi Lyncaei* **1**(3), 85–216.
- [16] Bronstein, I. U. and Kopanskii, A. Ya. [1994] *Smooth Invariant Manifolds and Normal Forms*. World Scientific Series A on Nonlinear Science, Vol. 7 (World Scientific: Singapore).
- [17] Bruno, A. D. [1979] *The Local Method of Nonlinear Analysis of Differential Equations* (Nauka: Moscow).
- [18] Bruno, A. D. [1991] «On finitely smooth linearization of a system of differential equations near a hyperbolic singular point», *Doklady AN SSSR* **318**(3), 524–527.
- [19] Cartwright, M. L. and Littlewood, J. E. [1945] «On nonlinear differential equations of the second order, I: The equation  $\ddot{y} + k(1 - y^2)\dot{y} = b\lambda \cos(\lambda t + a)$ ,  $k$  large», *J. Lond. Math. Soc.* **20**, 180–189.
- [20] Chen, K. T. [1963] «Equivalence and decomposition of vector fields about an elementary critical point», *Amer. J. Math.* **85**(4), 693–722.
- [21] Coddington, E. A. and Levinson, N. [1955] *Theory of Ordinary Differential Equations* (McGraw-Hill Book Company: New York).
- [22] Denjoy, A. [1932] «Sur les courbes définies par les équations différentielles à la surface du tore», *J. Math.* **17**(IV), 333–375.
- [23] Dulac, H. [1912] «Solutions d'un système d'équations différentielles dans le voisinage des valeurs singulières», *Bull. Math. France* **40**, 324–383.

- [24] Floquet, G. [1883] «Sur les équations différentielles linéaires à coefficients périodiques», *Ann. Ecole Norm., Ser. 2* **12**, 47–89.
- [25] Gavrilov, N. K. and Shilnikov, A. L. [1996], «On a blue sky catastrophe model», *Proc. Int. Conf. Comtemp. Problems of Dynamical Systems Theory*, Ed. Lerman, L. (Nizhny Novgorod State University: Nizhny Novgorod).
- [26] Gonchenko, S. V. and Shilnikov, L. P. [1986] «On dynamical systems with structurally unstable homoclinic curves», *Soviet Math. Dokl.* **33**(1), 234–238.
- [27] Gonchenko, S. V. and Shilnikov, L. P. [1993] «On moduli of systems with a structurally unstable homoclinic Poincaré curve», *Russian Acad. Sci. Izv. Math.* **41**(3), 417–445.
- [28] Gonchenko, S. V., Shilnikov, L. P. and Turaev, D. V. [1993a] «On models with non-rough Poincaré homoclinic curves», *Physica D* **62**, 1–14.
- [29] Gonchenko, S. V., Shilnikov, L. P. and Turaev, D. V. [1993b] «Dynamical phenomena in multi-dimensional systems with a structurally unstable homoclinic Poincaré curve», *Russian Acad. Sci. Dokl. Math.* **47**(3), 410–415.
- [30] Gonchenko, S. V., Shilnikov, L. P. and Turaev, D. V. [1996] «Dynamical phenomena in systems with structurally unstable Poincaré homoclinic orbits», *Interdisc. J. Chaos* **6**(1), 1–17.
- [31] Grobman, D. M. [1959] «On homeomorphisms of systems of differential equations», *Doklady AN SSSR* **128**(5), 880–881.
- [32] Hadamard, J. [1901] «Sur l'itération et les solutions asymptotiques des équations différentielles», *Bull. Soc. Math. France* **29**, 224–228.
- [33] Hartman, F. [1964] *Ordinary Differential Equations* (Wiley: New York).
- [34] Hermann, M. [1971] «Mesure de Lebesgue et nombre de rotation», *Proc. Symp. Geometry and Topology*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 597 (Springer-Verlag: New York), pp. 371–395.
- [35] Hirsch, M., Pugh, C. and Shub, M. [1977] *Invariant Manifolds*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 583 (Springer-Verlag: New York).



- [36] Homburg, A. J. [1996] «Global aspects of homoclinic bifurcations of vector fields», *Memoirs of the A. M. S.* **578**.
- [37] Kelley, A. [1967] «The stable, center-stable, center-unstable, unstable manifolds», *J. Diff. Eq.* **3**, 546–570.
- [38] Krylov, N. M. and Bogolyubov, N. N. [1947] *Introduction to Nonlinear Mechanics* (Princeton Univ. Press: Princeton).
- [39] Lancaster, P. [1969] *Theory of Matrices* (Academic Press: New York).
- [40] Leontovich, E. A. [1951] «On a birth of limit cycles from a separatrix loop», *DAN SSSR* **78**(4), 641–644.
- [41] Lerman, L. M. and Shilnikov, L. P. [1973] «On the classification of structurally stable nonautonomous systems of second order with a finite number of cells», *Sov. Math. Dokl.* **14**(2), 444–448.
- [42] Lorenz, E. N. [1963] «Deterministic non-periodic flow», *J. Atmos. Sci.* **20**, 130–141.
- [43] Lyapunov, A. M. [1950] *The General Problem on Stability Motion* (Gostekhizdat: Moscow).
- [44] Markov, A. A. [1933] «Stabilität im Liapunoffschen Sinne und Fastperiodizität», *Math. Zeitschr.* **36**.
- [45] Maier, A. G. [1939] «A rough transformation of circle into circle», *Uchenye zapiski universiteta*, **12** (Gorky University: Gorky), pp. 215–229.
- [46] de Melo, W. and Pugh, C. [1994] «The  $C^1$  Brunovsky hypothesis», *Diff. Equations* **112**, 300–337.
- [47] Nemytskii, V. V. and Stepanov, V. V. [1960] *Qualitative Theory of Differential Equations* (Princeton Univ. Press: Princeton).
- [48] Ovsyannikov, I. M. and Shilnikov, L. P. [1987] «On systems with a saddle-focus homoclinic curve», *Math. USSR Sb.* **58**, 557–574.
- [49] Ovsyannikov, I. M. and Shilnikov, L. P. [1992] «Systems with a homoclinic curve of multidimensional saddle-focus type, and spiral chaos», *Math. USSR Sb.* **73**, 415–443.

- [50] Perron, O. [1930] «Die Stabilitätsfrage bei Differentialgleichungen», *Math. Zeitschrift* **32**, 703–728.
- [51] Petrowsky, I. [1934] «Über das Verhalten der Integralkurven eines Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen in der Nähe eines singulären Punktes», *Matemat. Sbornik* **41**, 108–156.
- [1930] «Über das Verhalten der Integralkurven eines Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen in der Nähe eines singulären Punktes», *Math. Zeitschrift*.
- [52] Pliss, V. A. [1964] «A reduction principle in the theory of stability of motion», *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* **28**, 1297–1324.
- [53] Poincaré, H. [1892, 1893, 1899] *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, Vols. 1–3 (Gauthier–Villars: Paris).
- [54] Poincaré, H. [1921] «Analyse des travaux de Henri Poincaré faite par lui-même», *Acta mathematica* **38**, 36–135.
- [55] Samovol, V. S. [1972] «On linearization of systems of differential equations in the vicinity of a singular point», *Doklady AN SSSR* **206**(3), 542–548.
- [56] Sanstede, B. [1995] «Center manifold for homoclinic solutions», *Weierstrass Inst. Appl. Analysis & Stochastic, preprint N 186*.
- [57] Shashkov, M. V. [1991] «On existence of a smooth invariant two-dimensional attractive manifold for systems with a separatrix contour», in *Methods of Qualitative Theory and Theory of Bifurcations* (Nizhny Novgorod State University, Russia), pp. 61–73.
- [58] Shashkov, M. V. [1994] «Bifurcations of separatrix contours», Ph. D. thesis, Nizhny Novgorod State University, Russia.
- [59] Shashkov, M. V. and Turaev, D. V. [1997] «On a proof of the global center invariant manifolds», to appear.
- [60] Shilnikov, L. P. [1963] «Some cases of degeneration of periodic motion from singular trajectories», *Math. USSR Sbornik* **61**, 443–466.
- [61] Shilnikov, L. P. [1965] «A case of the existence of a denumerable set of periodic motions», *Sov. Math. Dokl.* **6**, 163–166.

- [62] Shilnikov, L. P. [1967] «The existence of a denumerable set of periodic motions in four-dimensional space in an extended neighborhood of a saddle-focus», *ibid* **8**(1), 54–58.
- [63] Shilnikov, L. P. [1967] «On a Poincaré–Birkhoff problem», *Math. USSR Sbornik* **3**, 415–443.
- [64] Shilnikov, L. P. [1969] «On a new type of bifurcation of multi-dimensional dynamical systems», *Soviet Math. Dokl.* **10**, 1368–1371.
- [65] Shilnikov, L. P. [1970] «A contribution to the problem of the structure of an extended neighborhood of a rough equilibrium state of saddle-focus type», *Math. USSR Sbornik* **10**(1), 91–102.
- [66] Shilnikov, L. P. and Turaev, D. V. [1995] «On a blue sky catastrophe», *Soviet Math. Dokl.* **342**(5), 596–599.
- [67] Siegel, C. L. [1952] «Über die normal form analytischer Differential-Gleichungen in der Nahe einer Gleichgewichtslösung», *Nach. der Acad. Wiss. Göttingen*, 21–30.
- [68] Smale, S. [1965] «Diffeomorphisms with many periodic points», in *Diff. and Combin. Topology*, ed. by S. Cairns (Princeton Univ. Press: Princeton), pp. 63–80.
- [69] Smale, S. [1967] «Differentiable dynamical systems», *Bull. Amer. Math. Soc.* **73**, 747–817.
- [70] Shoshitaishvili, A. N. [1975] «Bifurcations of the topological type of a vector field near a singular point», *Trudy Seminarov I. G. Petrovskogo* **1**, 279–309.
- [71] Sternberg, S. [1958a] «Local contraction and a theorem of Poincaré», *Amer. J. Math.* **79**, 809–824.
- [72] Sternberg, S. [1958b] «On the structure of local homeomorphisms of Euclidian  $n$ -space, II», *ibid.* **80**, 623–631.
- [73] Turaev, D. V. [1984] «On a case of bifurcations of a contour composed by two homoclinic curves of a saddle», in *Methods of Qualitative Theory of Differential Equations* (Gorky State University: Gorky), pp. 162–175.

- [74] Turaev, D. V. [1991] «On bifurcations of dynamical systems with two homoclinic curves of the saddle», Ph. D. thesis, Nizhny Novgorod State University, Russia.
- [75] Turaev, D. V. [1996] «On dimension of non-local bifurcational problems», *Int. J. Bifurcation and Chaos* **2**(4), 911–914.
- [76] Shilnikov, L. P. [1994] «Chua's Circuit: Rigorous results and future problems», *Int. J. Bifurcation and Chaos* **4**(3), 489–519.
- [77] Mira, C. [1997] «Chua's Circuit and the qualitative theory of dynamical systems», *Int. J. Bifurcation and Chaos* **7**(9), 1911–1916.
- [78] Madan, R. N. [1993] *Chua's Circuit: A Paradigm for Chaos* (World Scientific: Singapore).
- [79] Pivka, L., Wu, C. W. and Huang, A. [1996] «Lorenz equation and Chua's equation», *Int. J. Bifurcation and Chaos* **6**(12B), 2443–2489.
- [80] Wu, C. W. and Chua, L. O. [1996] «On the generality of the unfolded Chua's Circuit», *Int. J. Bifurcation and Chaos* **6**(5), 801–832.
- [81] Chua, L. O. [1998] *CNN: A Paradigm for Complexity* (World Scientific: Singapore).

## Предметный указатель

- $\alpha$ -предельная точка, 14  
 $\alpha$ -предельное множество, 14  
 $\gamma$ -норма, 289  
 $\lambda$ -лемма, 160  
 $\omega$ -предельная точка, 14
- Автоколебательные системы с периодическим возмущением, 235  
 Автономные нормальные формы, 218  
 Алгебраический автоморфизм тора, 257  
 Андронов, 105, 106  
 Андронов–Витт, 203  
 Антипериодический, 201  
 Асимптотическая фаза, 204  
 Асимптотически устойчивый, 44  
 Ассоциированное движение, 4  
 Аттрактор, 12
- База, 279  
 Базис Жордана, 39  
 Белицкий, 213  
 Бесконечная в обе стороны траектория, 8  
 Биркгоф, 6, 10  
 Блуждающая точка, 8  
 Борель, 103
- Ведущая плоскость, 32  
 Ведущее
- и неведущее многообразие, 65, 128  
 — инвариантное многообразие, 141  
 — инвариантное подпространство, 44  
 — направление, 25, 31  
 Ведущий
- инвариантный, 126  
 — устойчивый, 84  
 Восьмерка, 350  
 Вполне неустойчивая неподвижная точка, 127  
 Вполне неустойчивый, 205  
 Время возвращения Пуанкаре, 10, 189
- Гетероклинический цикл, 325, 348, 352  
 Гладкая динамическая система, 8  
 Глобально дихотомический, 287  
 Глобальное отображение, 325  
 Глобальный, 325
- неустойчивый, 79  
 — устойчивый, 79  
 Гомеоморфизмы, 6  
 Гомоклиническая
- бабочка, 350  
 — петля, 104, 325–327, 334  
 — траектория, 9  
 Гомоклинические циклы, 325  
 Гробман–Хартман, 61, 129
- Грубый, 24, 115  
 Группа свойств, 6  
 Групповое свойство, 2
- Данжуа, 265  
 Диаграмма Ламерея, 116  
 Дикритический узел, 26  
 Динамические системы, 6  
 Дискретная динамическая система, 7  
 Дiffeоморфизм, 7  
 Дiffeоморфизмы окружности, 264  
 Дьявольская лестница, 267  
 Дюлак, 101, 102
- Евклидова норма, 42
- Задачи синхронизации, 264  
 Замена времени, 5
- Изменение масштаба времени, 5  
 Инвариантное
- многообразие, 64, 79, 280  
 — подпространство, 44, 126  
 — слоение, 272, 302, 310  
 Инвариантность множества, 8  
 Инвариантные торы, 325  
 Инвариантный, 9, 282
- тор, 242, 258  
 Интегральная кривая, 2
- Каскад, 7  
 Качественное
- интегрирование, 12  
 — исследование, 24  
 Квазиминимальное множество, 10  
 Квазипериодическая
- траектория, 11  
 — функция, 239  
 Квазипериодический поток, 11
- Кольцо, 242  
 Краевая задача, 154, 155, 286  
 Критерий
- Брауэра, 238  
 — Рауса–Гурвица, 23  
 Критический случай, 270
- Леонтович, 105, 106, 325  
 Линеаризованная система, 21, 22  
 Линеаризованное отображение, 114  
 Линейные системы, 24, 37  
 Лист, 279  
 Локальная
- бифуркация, 271  
 — теория, 19  
 Локально инвариантный, 70  
 Локально топологически эквивалентный, 63  
 Локальное
- неустойчивое многообразие, 132  
 — отображение, 335  
 — устойчивое многообразие, 132  
 Локальный случай, 269  
 Ляпунов, 199, 202
- Майер, 266  
 Малые знаменатели, 102  
 Минимальное множество, 10  
 Многомерные линейные отображения, 125  
 Многомерный, 37  
 Многообразие, 71  
 Множество минимальное, 10  
 Мультипликаторы, 112, 115, 204
- Флоке, 195
- Накрытие, 264  
 Неблуждающая точка, 9  
 Неведущая плоскость, 31

- Неведущее  
 — многообразие, 65, 69, 70, 137  
 — направление, 25, 32  
 Неведущий, 44, 84, 126  
 Нелокальный, 325  
 Неоднородная система, 93  
 Неподвижная  
 — точка, 114, 115, 125  
 — седлового типа, 128, 141, 153, 154  
 Нерезонансные функции, 106, 215  
 Неустойчивое  
 — инвариантное  
 — многообразие, 132  
 — подпространство, 30, 128  
 — подпространство, 36  
 Неустойчивый, 128  
 — узел, 30, 34, 45, 78, 119  
 — фокус, 30, 34, 78, 123  
 Нормальные  
 — координаты, 186, 192  
 — формы, 103, 277
- Область  
 — Зигеля, 101  
 — Пуанкаре, 101  
 — устойчивости, 270  
 Обратное отображение, 253  
 Обращенный во времени, 5  
 Общий, 328  
 Обыкновенные дифференциальные уравнения, 1  
 Овсянников–Шильников, 108  
 Орбитальная устойчивость, 204  
 Ориентируемая кривая, 6  
 Основные понятия, 1  
 Особая траектория, 17  
 Отображение Пуанкаре, 112, 334
- Отрицательная полутраектория, 6  
 Отгалкивающийся, 205
- Перекрестная форма, 227, 228, 243, 252  
 Период, 7, 111  
 Периодическая  
 — точка, 111  
 — траектория, 3, 4, 14, 111, 115, 205, 284  
 Периодические решения, 111  
 Петли, 325  
 Поверхности Ляпунова, 203  
 Поглощающая область, 12  
 Подмногообразия, 84  
 Поднятие, 264  
 Показатели Ляпунова, 104, 197  
 Показатель, 37  
 Поле скоростей, 7  
 Положение  
 — равновесия, 3, 14, 21, 44, 56, 78  
 — седлового типа, 79, 357  
 Положительная полутраектория, 6  
 Полутраектории, 14  
 Порядок резонанса, 96, 209  
 Предельный цикл, 16, 111  
 Представляющая точка, 4  
 Принцип  
 — кольца, 235, 242, 255  
 — сжимающих отображений Банаха, 223  
 Пуанкаре, 101, 265
- Распрямление, 71  
 Расширенное  
 — неустойчивое  
 — инвариантное подпространство, 46, 128  
 — многообразие, 84

- устойчивое  
 — инвариантное подпространство, 46, 128  
 — многообразие, 84  
 — фазовое  
 — пространство, 2  
 Расширенный, 128  
 Резонанс, 95, 96, 209  
 Резонансная (гипер)плоскость, 101  
 Резонансное множество, 96  
 Рекуррентная траектория, 10  
 Решение, 1
- Самопредельная траектория, 14  
 Седло, 28, 34, 46, 78, 119, 128  
 Седло-узел, 61  
 Седло-фокус, 34, 46, 128, 153  
 Седло-фокус (1,2), 46  
 Седло-фокус (2,1), 46  
 Седло-фокус (2,2), 46  
 Седловая периодическая траектория, 111, 201, 207  
 Седлового типа, 45  
 Седловое отображение, 228  
 Секущая, 112  
 Сепаратриса, 18, 29  
 Сжимающие отображения, 223  
 Сильно неустойчивый, 282  
 Сильно устойчивое слоение, 279  
 Сильно устойчивый, 44, 126  
 Скелет, 18  
 Слабые резонансы, 104  
 Слоение, 279, 282  
 Сохранение, 258  
 Спираль Ламерея, 116  
 Стенберг, 103, 212  
 Сток, 64  
 Странные аттракторы, 12
- Структурно неустойчивый, 284  
 Структурно устойчивое равновесие, 21, 56  
 Структурно устойчивые периодические траектории, 115  
 Структурно устойчивый, 24, 111, 115  
 Ступенчатая функция Ламерея, 116  
 Схема, 18
- Теорема  
 — Адамара, 142  
 — Биркгофа, 10  
 — Флоке, 198  
 — о ведущем многообразии, 141  
 — о гладкой сопряженности, 276  
 — о неведущем многообразии, 137  
 — о редукции, 277, 278  
 — о центральном многообразии, 271  
 — о центральном неустойчивом многообразии, 281
- Теория бифуркаций, 325  
 Тожественное отображение, 124  
 Топологическая  
 — классификация, 56  
 — сопряженность, 128  
 Топологически сопряженные неподвижные точки, 133  
 Топологически эквивалентный, 18  
 Топологические седла, 64  
 Топологический тип, 63, 133, 207  
 Точка, 8  
 —  $\omega$ -предельная, 13  
 — устойчивая по Пуассону, 9  
 Траектория, 7  
 — особая, 17  
 — отображения Пуанкаре, 114  
 — устойчивая по Пуассону, 9  
 — эквивалентная, 18

- Треугольная форма, 272
- Узел (+), 140
- Узел (–), 140
- Укороченная нормальная форма, 110
- Укороченный, 110
- Уравнение в вариациях, 2, 91, 92, 194
- Условно неустойчивое многообразие, 313
- Условно устойчивый или  $\gamma$ -устойчивый, 303
- Устойчивое
- инвариантное
  - многообразие, 132
  - подпространство, 29, 128
  - многообразие, 208
  - подпространство, 36
- Устойчивые по Пуассону траектории, 9
- Устойчивый, 128
- по Пуассону, 9
  - топологический узел, 64
  - узел, 25, 31, 45, 74, 119
  - узел (+), 127
  - узел (–), 127
  - фокус, 26, 32, 74, 123, 127
- Фазовая траектория, 2, 6
- Фокус, 74, 140
- Формула Вронского, 197
- Фундаментальная матрица, 195
- Характеристические
- корни, 195
  - показатели, 23, 38, 197, 204
- Характеристическое уравнение, 23, 195
- Целая траектория, 4, 6
- Центр, 59
- Центральное
- многообразие, 269, 282, 325, 326, 348
  - устойчивое многообразие, 282
- Центральный устойчивый, 282
- Цикл, 7, 14
- Частичный порядок, 100
- Число вращения, 265
- Эквиморфный, 264
- Экспоненциально неустойчивый, 45
- Ячейка, 18

Интересующие Вас книги нашего издательства можно заказать почтой или электронной почтой:

**subscribe@rcd.ru**

**Внимание:** дешевле и быстрее всего книги можно приобрести через наш Интернет-магазин:

**http://shop.rcd.ru**

Книги также можно приобрести:

1. Москва, ФТИАН, Нахимовский проспект, д. 36/1, к. 307, тел.: 332–48–92 (почтовый адрес: Нахимовский проспект, д. 34).
2. Москва, ИМАШ, ул. Бардина, д. 4, корп. 3, к. 414, тел. 135–54–37.
3. МГУ им. Ломоносова (ГЗ, 1 этаж).
4. Магазины:  
Москва: «Дом научно-технической книги» (Ленинский пр., 40)  
«Московский дом книги» (ул. Новый Арбат, 8)  
«Библиоглобус» (м. Лужанка, ул. Мясницкая, 6)  
С.-Пб.: «С.-Пб. дом книги» (Невский пр., 28)

**Леонид Павлович Шильников,  
Андрей Леонидович Шильников,  
Дмитрий Владимирович Тураев,  
Леон Чуа**

## МЕТОДЫ КАЧЕСТВЕННОЙ ТЕОРИИ В НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКЕ

*Дизайнер М. В. Ботя  
Технический редактор А. В. Широбоков  
Компьютерная верстка С. В. Высоцкий  
Корректор М. А. Ложкина*

Подписано в печать 29.05.02. Формат 60 × 84<sup>1</sup>/<sub>16</sub>.  
Печать офсетная. Усл. печ. л. 13,71. Уч. изд. л. 14,12.  
Гарнитура Балтика. Бумага офсетная №1.  
Тираж 1000 экз. Заказ №

АНО «Институт компьютерных исследований»  
426034, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.  
Лицензия на издательскую деятельность ЛУ №084 от 03.04.00.  
http://rcd.ru E-mail: borisov@rcd.ru

Отпечатано в полном соответствии с качеством  
предоставленных диапозитивов в ГИПП «Вятка».  
610033, г. Киров, ул. Московская, 122.